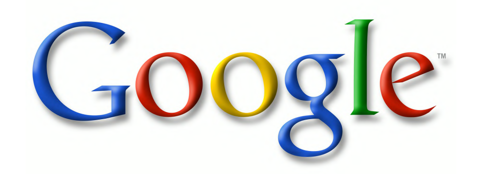

Google

L. SCHLESINGER

# VORLESUNGEN ÜBER LINEARE DIFFERENTIALGLEICHUNGEN

# P. P.

Meinen umfangreichen Verlag auf dem Gebiete der **Mathematik**, der **Technischen- und Natur-Wissenschaften** nach allen Richtungen hin weiter auszubauen, ist mein stetes durch das Vertrauen und Wohlwollen zahlreicher hervorragender Vertreter dieser Gebiete von Erfolg begleitetes Bemühen, wie mein Verlagskatalog zeigt, und ich hoffe, daß bei gleicher Unterstützung seitens der Gelehrten und Schulmänner des In- und Auslandes auch meine weiteren Unternehmungen Lehrenden und Lernenden in Wissenschaft und Schule jederzeit förderlich sein werden. **Verlagsanerbieten** gediegener Arbeiten auf einschlägigem Gebiete werden mir deshalb, wenn auch schon gleiche oder ähnliche Werke über denselben Gegenstand in meinem Verlage erschienen sind, stets sehr willkommen sein.

Unter meinen zahlreichen Unternehmungen mache ich ganz besonders auf die von den Akademien der Wissenschaften zu Göttingen, Leipzig, München und Wien herausgegebene **Encyklopädie der Mathematischen Wissenschaften** aufmerksam, die in 7 Bänden die Arithmetik und Algebra, die Analysis, die Geometrie, die Mechanik, die Physik, die Geodäsie und Geophysik und die Astronomie behandelt und in einem Schlußband Geschichte, Philosophie und Didaktik besprechen wird. Eine **französische Ausgabe**, von französischen Mathematikern besorgt, hat zu erscheinen begonnen.

Weitester Verbreitung erfreuen sich die mathematischen und naturwissenschaftlichen Zeitschriften meines Verlags, als da sind: Die **Mathematischen Annalen**, die **Bibliotheca Mathematica** (Zeitschrift für Geschichte der Mathematischen Wissenschaften), das **Archiv der Mathematik und Physik**, die **Jahresberichte der Deutschen Mathematiker-Vereinigung**, die **Zeitschrift für Mathematik und Physik** (Organ für angewandte Mathematik), die **Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht**, die **Mathematisch-naturwissenschaftlichen Blätter**, ferner **Natur und Schule** (Zeitschrift für den gesamten naturkundlichen Unterricht aller Schulen), die **Geographische Zeitschrift** u. a.

Seit 1868 veröffentliche ich: **„Mitteilungen der Verlagsbuchhandlung B. G. Teubner"**. Diese jährlich zweimal erscheinenden „Mitteilungen", die in 30000 Exemplaren im In- und Auslande von mir verbreitet werden, sollen das Publikum, das meinem Verlage Aufmerksamkeit schenkt, von den erschienenen, unter der Presse befindlichen und von den vorbereiteten Unternehmungen des Teubnerschen Verlags durch ausführliche Selbstanzeigen der Verfasser in Kenntnis setzen. **Die Mitteilungen werden jedem Interessenten auf Wunsch regelmäßig bei Erscheinen umsonst und postfrei von mir übersandt.** Das ausführliche **„Verzeichnis des Verlags von B. G. Teubner auf dem Gebiete der Mathematik, der Technischen- und Natur-Wissenschaften nebst Grenzgebieten"** (100. Ausgabe. [XLVIII u. 272 S.] gr. 8. 1904 vergriffen) erscheint im Frühjahr 1908 in neuer Auflage mit eingehender alphabetischer und systematischer Bibliographie und einem Gedenktagebuch für Mathematiker. Wünsche um Zusendung, die kostenfrei erfolgt, nehme ich jederzeit gern entgegen.

LEIPZIG, Poststraße 3.

B. G. Teubner.

# VORLESUNGEN

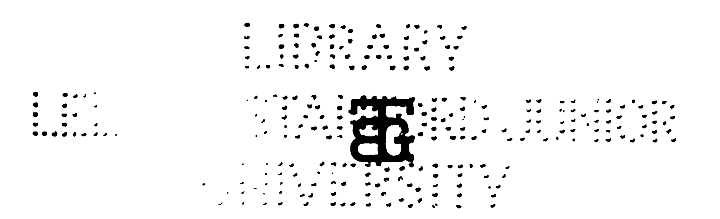
ÜBER

# LINEARE DIFFERENTIALGLEICHUNGEN

VON

LUDWIG SCHLESINGER

MIT 6 FIGUREN IM TEXT



LEIPZIG UND BERLIN
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER
1908

DEM ANDENKEN

VON

# L. FUCHS

GEWIDMET

# Vorwort.

Die von L. Fuchs begründete analytische Theorie der linearen Differentialgleichungen ist in den letzten Jahren so vielfach und so ausführlich dargestellt worden, daß es einer besonderen Rechtfertigung bedarf, wenn ich in dem vorliegenden Buche mit einer neuen Darstellung dieser Theorie vor die Öffentlichkeit trete. Ich möchte vorweg bemerken, daß die hier folgenden Darlegungen mit der klassischen Theorie, wie sie z. B. in dem von mir herausgegebenen „Handbuch der Theorie der linearen Differentialgleichungen" (Leipzig, Teubner, 1895—1898) im Zusammenhange entwickelt worden ist, sehr wenig gemein haben, so daß ich den Vorwurf nicht zu fürchten brauche, ich wollte hier oft Gesagtes wiederholen oder auch nur Altbekanntes in neuem Gewande erscheinen lassen. Es handelt sich vielmehr darum, Methoden vorzuführen, die einerseits zu den Resultaten der klassischen Theorie einen bequemen und naturgemäßen Zugang eröffnen, die aber andererseits zu neuen Ergebnissen führen, von denen ich hier nur die am nächsten liegenden habe auseinandersetzen können.

Ich hoffe darum, daß dieses Buch für den Anfänger, der die Theorie der linearen Differentialgleichungen kennen lernen will, einen brauchbaren Führer abgeben wird, und daß es für solche, die an der Weiterbildung der Theorie der Differentialgleichungen tätigen Anteil nehmen wollen, mehrfach auch als Wegweiser wird dienen können.

* * *

Mein Bestreben war darauf gerichtet, die in Rede stehende Theorie im Sinne der Methoden von Riemann auszugestalten. Daß mir dabei in erster Linie das 1876 aus dem Nachlasse Riemanns veröffentlichte Fragment*) zur Richtschnur diente, erscheint danach als selbstverständlich. Gleichwohl erwies es sich als notwendig, das von Riemann in jenem Fragmente angedeutete Verfahren geradezu umzukehren, so daß Riemanns Ausgangspunkt — der das von mir sogenannte Riemannsche Problem involviert — bei mir als der Schlußstein erscheint. Die von Riemann betrachteten Funktionssysteme definiere ich von vornherein als Lösungen von Systemen linearer Differentialgleichungen erster Ordnung, die dann auch dauernd das Substrat

*) Riemanns Werke (2. Aufl. 1892), S. 379.

der Untersuchung bilden.*) Wenn auch, so wie es sich um Spezialfragen handelt, die Betrachtung der Differentialgleichung höherer Ordnung das einfachere zu sein scheint, so sichert bei allgemeinen Untersuchungen das System von Differentialgleichungen erster Ordnung eine größere Bewegungsfreiheit und Symmetrie. Es tritt dies namentlich an zwei Stellen der Theorie in so überzeugender Weise hervor, daß ich mir es nicht versagen kann, schon in diesen einleitenden Zeilen auf diese Stellen besonders hinzuweisen.

Die eine liegt ganz an der Schwelle; ich meine die Existenzbeweise für die Lösungen. Ich verfahre bei diesen in derselben Weise, wie es Riemann für das gewöhnliche bestimmte Integral vorgezeichnet hat, indem ich für den Fall einer realen Variabeln das Interpolationsverfahren zur Anwendung bringe und für ein System mit einer komplexen unabhängigen Veränderlichen die Existenz der Lösungen dadurch beweise, daß ich ihre realen und imaginären Bestandteile als Lösungen komplett integrabler Systeme mit zwei realen unabhängigen Variabeln definiere. Dabei gestaltet sich nun die Theorie der Systeme von linearen Differentialgleichungen erster Ordnung zu einem überaus durchsichtigen Infinitesimalkalkül der Matrizen von $n^2$ Funktionen, und ich möchte gleich hier mit Dank der Anregung gedenken, die ich in bezug auf diesen Kalkül aus den schönen Abhandlungen**) des Herrn V. Volterra geschöpft habe. Abgesehen davon, daß ich mich bei der Durchführung im einzelnen anderer Methoden bediene wie dieser ausgezeichnete Mathematiker, kann das Verhältnis, in dem die Darstellung des Herrn Volterra zu meiner eigenen steht, vielleicht in der Weise bezeichnet werden, daß Herr Volterra die „Integrale von Substitutionen (Matrizen)“ als independente Gebilde einführt, ähnlich wie man etwa die Determinante einer Matrix selbständig definiert, während diese Gebilde bei mir als „Integralmatrizen“ von Systemen linearer Differentialgleichungen erscheinen, also ähnlich, wie wenn die Theorie der Determinanten aus der Auflösung der Systeme linearer Gleichungen heraus entwickelt wird.

Ich bemerke, daß auch die anderen Methoden, die für den Existenzbeweis der Lösungen zu Gebote stehen (sukzessive Approximationen, calcul des limites) dem Matrizenkalkül in sehr übersichtlicher Weise angepaßt werden können.

Die andere Stelle, wo sich die Betrachtung der Systeme anstatt der einzelnen Differentialgleichung höherer Ordnung bewährt hat, ist die Theorie der „schlechthin kanonischen Systeme“. Es gelingt für diese Systeme — natürlich auf den von der klassischen Theorie geschaffenen Grundlagen — eine Theorie zu entwickeln, die die Lösungen der gedachten Systeme nicht nur als Funktionen der Differentiationsvariabeln, sondern auch in ihrer Abhängigkeit von den in den Koeffizienten auftretenden Parametern so weit zu

*) Den Gedanken, an Stelle der einzelnen linearen Differentialgleichung höherer Ordnung die Systeme von Gleichungen erster Ordnung zu studieren, hat schon Herr L. Koenigsberger in seinem „Lehrbuch der Theorie der Differentialgleichungen“ (Leipzig, Teubner, 1889) konsequent durchgeführt.

**) Memorie della Società Italiana delle Scienze (detta dei XL), t. VI, Nr. 8 (1887), t. XII (1899); Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, t. II (1888), S. 69.

beherrschen gestattet, daß man diese Lösungen als ein ebenso handliches analytisches Instrument ansehen kann, wie etwa die Integrale rationaler oder algebraischer Funktionen. Ich möchte hier besonders die „parametrischen Normalreihen" und die durch diese vermittelten asymptotischen Darstellungen der Lösungen hervorheben, ferner den auf die Theorie der schlechthin kanonischen Systeme gegründeten Beweis für die Lösbarkeit des Riemannschen Problems und endlich darauf hinweisen, daß das sogenannte „Fuchssche Problem" auf ein System von Differentialgleichungen erster Ordnung und zweiten Grades führt, das durch die aus den schlechthin kanonischen Systemen entspringenden parametralen Funktionen in ähnlicher Weise integriert wird, wie man etwa lineare Differentialgleichungen durch bestimmte Integrale integriert, die die Differentiationsvariable als Parameter enthalten.

In bezug auf weitere Einzelheiten muß ich auf die Darstellung selbst verweisen.

* * *

Zur Orientierung für den Anfänger, der dies Buch zur Hand nimmt, bemerke ich, daß es eine im wesentlichen unveränderte Wiedergabe der Vorlesungen ist, die ich an unserer Universität im Studienjahre 1905/06 zwei Semester hindurch gehalten habe. Meine Zuhörer brachten zum Teil an Vorkenntnissen nur die Elemente der Funktionentheorie mit; die Aneignung des Matrizenkalküls, von dem in diesen Vorlesungen ausgiebiger Gebrauch gemacht wird, vollzog sich leicht und unter dem regen Interesse der Studierenden.

Meine auf die hier behandelte Materie bezüglichen Veröffentlichungen stelle ich unter dem Texte*) zusammen.

Es bleibt mir nur noch übrig, den befreundeten Gelehrten, die meine Bitte, die Korrekturbogen dieses Buches zu lesen, gütigst gewährt haben, für ihr Interesse und für manchen wertvollen Rat herzlich zu danken; es waren dies die Herren L. Heffter, A. Hirsch, A. Loewy und L. Fejér. Nicht minder gilt mein Dank dem freundlichen Entgegenkommen des Verlagshauses B. G. Teubner.

Klausenburg, im Februar 1908.

**L. Schlesinger.**

---

*) Comptes Rendus (Paris), t. 126 (1898), S. 723; t. 132 (1901), S. 27; t. 135 (1902), S. 676; t. 138 (1904), S. 955; t. 142 (1906), S. 1031; t. 146 (1908), S. 106; Sitzungsberichte (Berlin) 1902, S. 283; Crelles Journal, Bd. 123, S. 138; Bd. 124, S. 47, S. 292; Bd. 125, S. 28; Bd. 128, S. 263; Bd. 129, S. 287; Bd. 130, S. 26; Bd. 131, S. 202; Bd. 132, S. 247; Mathematische Annalen, Bd. 63, S. 273, S. 277; Annales de l'École Normale (3), t. 20, S. 331; L'Enseignement mathém. t. 7, S. 356; Verhandlungen des III. internat. Mathematiker-Kongresses (Leipzig, 1905), S. 219; ferner eine Reihe von Mitteilungen an die ungarische Akademie der Wissenschaften, 1902—1906.

# Inhaltsverzeichnis.

Seite

**Vorwort** . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . V—VII

**Erste Vorlesung** . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 1—16

Einleitendes. Systeme linearer Differentialgleichungen. Komplette und homogene Systeme. Integralexistenz. Interpolationsverfahren für den Fall einer realen unabhängigen Variabeln.

**Zweite Vorlesung** . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 17—31

Neue Form des Interpolationsverfahrens. Rechnen mit Matrizen. Integralmatrizen. Derivierte Matrizen. Derivations- und Integrationsregeln für Matrizen. Adjungierte Differentialsysteme und Integralmatrizen.

**Dritte Vorlesung** . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 32—47

Multiplikatoren. Weiteres über adjungierte Systeme. Integration der kompletten Systeme. Methode der sukzessiven Approximationen. Neuer Existenzbeweis und Darstellung für eine Integralmatrix. Kurze Bemerkung über den Fall einer komplexen Variabeln.

**Vierte Vorlesung** . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 48—66

Einleitendes über Differentialgleichungen, deren Lösungen gewöhnliche Quadraturen bezw. sogenannte Kurvenintegrale sind. Übergang von dem linearen Differentialsystem mit einer komplexen unabhängigen Variabeln zu einem Systeme totaler Differentialgleichungen mit zwei realen unabhängigen Variabeln. Integrabilitätsbedingungen. Rechtecksatz. Unabhängigkeit der Integralmatrix vom Wege. Analogon des Riemannschen Satzes für einen geschlossenen Integrationsweg.

**Fünfte Vorlesung** . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 67—85

Integralmatrizen totaler Differentialsysteme in mehrfach zusammenhängenden Bereichen. Lineare Substitution. Fundamentalsubstitutionen. Geschlossene Wege. Ähnliche Matrizen. Anwendung auf gewöhnliche lineare Differentialsysteme mit komplexen Variabeln. Existenz monogener Integralmatrizen im Holomorphiebereich der Koeffizienten. Gespaltene Matrizen. Allgemeine Integralmatrix des komplexen Systemes. Verhalten in mehrfach zusammenhängenden Bereichen. Änderungen des Querschnittsystems.

**Sechste Vorlesung** . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 86—103

Taylorsche Reihenentwicklung der Integrale. Historisches. Konvergenzbeweis. Außerwesentlich singuläre Punkte der Integralmatrix. Isolierte singuläre Punkte, in deren Umgebung die Koeffizienten

Seite

eindeutig sind. Cauchysche Systeme. Systeme mit konstanten Koeffizienten. Erledigung des Falles ungleicher Wurzeln der charakteristischen Gleichung. Anwendung. Fundamentalgleichung. Kanonische Integralmatrix.

**Siebente Vorlesung** . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 104—121

Rationalitätsbereich. Der Artbegriff. Reduzibilität linearer Differentialsysteme. Zurückführung auf evident reduzible Systeme. Form der Integralmatrix. Sätze über reduzible Systeme und Systeme, die zu derselben Art gehören.

**Achte Vorlesung** . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 122—140

Differentialsysteme mit konstanten Koeffizienten im Falle mehrfacher Wurzeln der charakteristischen Gleichung. Elementarteiler. Integration der Teilsysteme. Kanonische Form einer Matrix. Notwendige und hinreichende Bedingungen für die Ähnlichkeit der Matrizen. Cauchysche Systeme. Aufstellung einer speziellen Integralmatrix. Kanonische Form der Umlaufsubstitution. Lösung der Aufgabe der fünften Vorlesung.

**Neunte Vorlesung** . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 141—162

Singularitäten monogener Funktionen. Punkte der Unbestimmtheit. Differentialsysteme, deren Lösungen in einem Punkte nicht unbestimmt sind. Die zu dem singulären Punkte gehörige Cauchysche Matrix. Determinierende Fundamentalgleichung und Matrix. Unterscheidung zweier Fälle. Diskussion des ersten Falles. Residuenmatrix. Rekursionsformel. Reduktion des zweiten Falles auf den ersten. Differentialgleichungen $n$-ter Ordnung. Fundamentalsystem. Wronskische Matrix und Determinante. Notwendige Form der Koeffizienten.

**Zehnte Vorlesung** . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 163—182

Differentialsysteme, die in der Umgebung eines Punktes kanonisch sind, haben Lösungen, die daselbst nicht unbestimmt werden. Der Satz von Fuchs. Rekursionsformel für die kanonischen Systeme. Untersuchung des Differentialsystems in der Umgebung des unendlich fernen Punktes. Rang. Normalreihen.

**Elfte Vorlesung** . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 183—203

Differentialsysteme vom Range Eins. Charakteristische Gleichung. Divergenz der Normalreihen. Allgemeines über asymptotische Darstellungen. Das Poincarésche Lemma. Riccatische Differentialsysteme. Aufstellung eines Integralsystems. Reduktion eines Differentialsystems bei Kenntnis eines partikularen Lösungssystems.

**Zwölfte Vorlesung** . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 204—214

Fortsetzung der Untersuchung der Differentialsysteme vom Range Eins. Nachweis der asymptotischen Darstellung für reale positive Annäherung der unabhängigen Variabeln an die Unbestimmtheitsstelle und für Annäherung mit beliebigem festen Argument.

→ **Dreizehnte Vorlesung** . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 215—238

Differentialsysteme mit rationalen Koeffizienten. Der Fuchssche Typus. Differentialgleichungen $n$-ter Ordnung und schlechthin kanonische Differentialsysteme. Bedeutung der Fundamentalsubstitutionen für das Integrationsproblem. Kogredienz. Artbegriff. Klassen-

Seite

begriff. Das Riemannsche Problem. Das Fundamentallemma. Historisches.

**Vierzehnte Vorlesung** . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 239—267

Abhängigkeit der Lösungen linearer Differentialsysteme von einem Parameter. Ein Satz von Poincaré und seine Verallgemeinerung. Anwendung auf schlechthin kanonische Systeme. Diskussion gewisser Systeme von ganzen transzendenten Funktionen. Formelle Aufstellung der parametrischen Normalreihen. Charakteristische Gleichung. Beweis eines Lemmas. Asymptotische Darstellung der Integrale für große Werte des Parameters durch die parametrischen Normalreihen.

**Fünfzehnte Vorlesung** . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 268—285

Allgemeine Sätze über schlechthin kanonische Differentialsysteme. Darstellung der Residuenmatrizen und der Fundamentalsubstitutionen. Abhängigkeit der Koeffizienten von einem Parameter, von dem die singulären Punkte und die Wurzeln der determinierenden Fundamentalgleichungen nicht abhängen. Asymptotische Darstellung der Lösungen und der Elemente der Fundamentalsubstitutionen für große Werte des Parameters.

**Sechzehnte Vorlesung** . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 286—304

Kontinuitätsmethode. Beweis der Lösbarkeit des Riemannschen Problems. Folgerungen. Die Inversen der ganzen transzendenten Funktionen $E_{(x)}^{(\nu)}$. Ein allgemeines Theorem über die Kogredienz. Lösung des Riemannschen Problems durch die Fuchsschen Zetareihen, wenn die Konvergenzbedingungen erfüllt sind. Zwei Bemerkungen.

**Siebzehnte Vorlesung** . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 305—330

Monodromie der Verzweigungspunkte. Die Probleme konstanter Residuen und konstanter Fundamentalsubstitutionen bei variabeln Verzweigungspunkten. Das Fuchssche Problem. Integralmatrix und Residuen als Funktionen der Verzweigungspunkte. Simultane lineare Differentialsysteme und der Fuchssche Satz. Differentialsystem zweiten Grades für die Residuen.

**Register** . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 331—333

**Berichtigungen** . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 334

# Erste Vorlesung.

**Einleitendes. Systeme linearer Differentialgleichungen. Komplette und homogene Systeme. Integralexistenz. Interpolationsverfahren für den Fall einer realen unabhängigen Variabeln.**

Relationen zwischen veränderlichen Größen und ihren Differentialen oder Derivierten nennt man Differentialgleichungen. Die Aufgabe der Integralrechnung besteht darin, wenn ein System von Differentialgleichungen vorgelegt ist, ein System von Relationen zwischen den veränderlichen Größen selbst herzustellen, das dem gegebenen Systeme von Differentialgleichungen äquivalent ist. Ein solches System heißt dann ein System von Integralgleichungen der gegebenen Differentialgleichungen. In diesen Vorlesungen werden wir uns mit einer besonderen Klasse von Differentialgleichungen beschäftigen, die sich von den verschiedenartigsten Gesichtspunkten aus als die einfachste und am leichtesten zugängliche erwiesen hat, mit der Klasse der linearen Differentialgleichungen, und zwar vorwiegend mit den linearen Differentialgleichungen mit einer unabhängigen Variabeln.

Bedeuten $y_1, \ldots, y_p$ $p$ unbekannte Funktionen der Variabeln $x$, so hat ein System von linearen Differentialgleichungen $m^{\text{ter}}$ Ordnung für diese Funktionen die Form

$$L_\varkappa\left(y_1, \cdots, y_p; \quad \frac{dy_1}{dx}, \cdots, \frac{dy_p}{dx}; \cdots; \quad \frac{d^m y_1}{dx^m}, \cdots, \frac{d^m y_p}{dx^m}\right) = 0, \qquad (\varkappa = 1, 2, \cdots, p)$$

wo die $L_\varkappa$ lineare, d. h. ganze rationale Funktionen ersten Grades ihrer Argumente bedeuten, mit Koeffizienten, die Funktionen von $x$ sind. Dieses System kann auch in der folgenden Gestalt geschrieben werden:

$$L_\varkappa\left(y_1, \cdots y_p; \quad y_1', \cdots, y_p'; \cdots; \quad \frac{dy_1^{(m-1)}}{dx}, \cdots, \frac{dy_p^{(m-1)}}{dx}\right) = 0,$$

$$\frac{dy_\varkappa}{dx} = y_\varkappa',$$

$$\cdots\cdots$$

$$\frac{dy_\varkappa^{(m-2)}}{dx} = y_\varkappa^{(m-1)}, \qquad (\varkappa = 1, 2, \cdots, p)$$

und erscheint dann als ein System linearer Differentialgleichungen erster Ordnung für die $pm = n$ Funktionen

$$y_1, \ldots, y_p;\quad y_1', \ldots, y_p'; \ldots;\quad y_1^{(m-1)}, \ldots, y_p^{(m-1)}.$$

Denken wir uns ein solches System nach den Derivierten der unbekannten Funktionen, die wir jetzt der Reihe nach mit

$$y_1, \ldots, y_n$$

bezeichnen wollen, aufgelöst, so erhält es (vorausgesetzt, daß eine solche Auflösung sich algebraisch als möglich erweist), die Form:

$$\text{(A)}\qquad \frac{dy_\varkappa}{dx} = a_{0\varkappa} + y_1 a_{1\varkappa} + y_2 a_{2\varkappa} + \cdots + y_n a_{n\varkappa}; \qquad (\varkappa = 1, 2, \cdots, n)$$

Systeme von Differentialgleichungen oder kürzer*) Differentialsysteme von dieser Form sind es also, mit denen wir uns zu beschäftigen haben werden.

In dem Systeme (A) bedeuten die $a_{i\varkappa}$ Funktionen von $x$. Wenn die $a_{0\varkappa}$ nicht sämtlich verschwinden, so heißt das lineare Differentialsystem ein inhomogenes oder komplettes, sind sämtliche $a_{0\varkappa}$ gleich Null, so haben wir ein homogenes lineares Differentialsystem. Wir werden später zeigen, wie die Theorie der kompletten Systeme auf die der homogenen zurückgeführt werden kann, und beschäftigen uns darum zuvörderst mit den homogenen Systemen:

$$\text{(B)}\qquad \frac{dy_\varkappa}{dx} = \sum_{\lambda=1}^{n} y_\lambda a_{\lambda\varkappa}. \qquad (\varkappa = 1, 2, \cdots, n)$$

In dem einfachsten Falle, wo $n = 1$ ist, haben wir

$$\text{(1)}\qquad \frac{dy}{dx} = ya.$$

Die Integration dieser Differentialgleichung läßt sich, indem man

$$\text{(2)}\qquad u = \log y$$

setzt, auf die einfache Quadratur

$$\text{(3)}\qquad \frac{du}{dx} = a, \qquad u = \int a\,dx$$

zurückführen. Das heißt, wenn man die Theorie der Quadratur und die Theorie des Logarithmus und der Exponentialfunktion als bekannt ansieht, so ergibt sich

$$y = e^{\int a\,dx}$$

als Lösung der Differentialgleichung (1).

*) Nach dem Vorschlage von P. Stäckel (1898).

Der leitende Gedanke, der unserer Behandlungsweise des Differentialsystems (B) zugrunde liegt, ist nun der folgende: Wir übertragen die für die Untersuchung der Differentialgleichung (3) entwickelten Methoden zunächst auf die Differentialgleichung (1) und suchen diese Methoden dann so zu verallgemeinern, daß sie für die Systeme von der Form (B) brauchbar werden. Dabei ist es wesentlich zu bemerken, daß vermöge der Relation (2), die zwischen den abhängigen Variabeln der Differentialgleichungen (3) und (1) besteht, allemal dort, wo in der Theorie der Differentialgleichung (3), d. h. in der gewöhnlichen Integralrechnung eine Addition beziehungsweise Subtraktion auszuführen ist, für die Differentialgleichung (1) eine Multiplikation beziehungsweise Division auftritt. Während also z. B. für die Differentialgleichung (3) das allgemeine Integral $u$ aus einem partikulären durch additive Hinzufügung der willkürlichen Konstanten hervorgeht, wird das allgemeine Integral von (1) aus einem partikulären durch Multiplikation mit einer willkürlichen Konstanten entstehen.

Wie in der gewöhnlichen Integralrechnung werden wir $x$ zunächst als reale Variable betrachten und dann zu dem Falle einer komplexen unabhängigen Variabeln aufsteigen. Für den Fall einer realen Variabeln $x$ handelt es sich dann vor allem um die Beantwortung der Frage, wann die Differentialgleichung (1) und allgemeiner das System (B) überhaupt lösbar ist, d. h. um die Frage der Existenz der Integrale. Wir beginnen mit der Differentialgleichung (1) und folgen Schritt für Schritt dem Wege, den man nach Riemanns Vorgange einschlägt*), um die Existenz des bestimmten Integrals

$$\int_p^r a\,dx$$

zu erweisen.

Um die Bedingungen aufzustellen, denen die Funktion $a$ zu unterwerfen ist, damit eine Funktion $y$ existiere, die der Differentialgleichung (1) genügt, setzen wir zunächst voraus, daß $a$ in dem Intervalle $(p \ldots q)$ der realen Variabeln $x$, die Grenzen $p$, $q$ eingeschlossen, eine reale, eindeutige und endliche Funktion von $x$ sei. Es sei $p < q$, und es bedeute $r$ einen Wert, für den

$$p < r \leqq q$$

ist. Wir teilen dann, wie in der gewöhnlichen Integralrechnung, das Intervall von $p$ bis $r$ durch die Punkte

$$x_1, \cdots, x_{m-1}, \qquad (x_1 < \cdots < x_{m-1}),$$

*) Man sehe z. B. Thomae, Einleitung in die Theorie der best. Integrale (Halle 1875), S. 11—13.

in $m$ Teile, setzen

$$x_0 = p, \qquad x_m = r$$

und wählen in jedem Teilintervalle $(x_{\nu-1} \ldots x_\nu)$ einen willkürlichen Zwischenwert $\xi_{\nu-1}$:

$$x_{\nu-1} \leqq \xi_{\nu-1} < x_\nu.$$

Dann bilden wir das System von Differenzengleichungen

$$y^{(\nu)} - y^{(\nu-1)} = y^{(\nu-1)} a(\xi_{\nu-1}) \cdot (x_\nu - x_{\nu-1}), \qquad (\nu = 1, 2, \cdots, m) \tag{4}$$

wo $y^{(0)}$ einen willkürlichen Anfangswert der Funktion $y$ bedeutet, der dem Anfangswerte $x_0 = p$ der unabhängigen Variabeln entspricht, und fragen nach dem Grenzwerte, dem sich die durch den Algorithmus (4) bestimmte Größe $y^{(m)}$ annähert, wenn wir die Anzahl $m$ der Teile so ins Unendliche wachsen lassen, daß die Ausdehnung $x_\nu - x_{\nu-1}$ der einzelnen Teilintervalle gegen Null konvergiert.

Wir schreiben das Gleichungssystem (4) in der Form

$$y^{(\nu)} = y^{(\nu-1)} (a(\xi_{\nu-1})(x_\nu - x_{\nu-1}) + 1); \qquad (\nu = 1, 2, \cdots, m) \tag{5}$$

dann lassen sich durch Multiplikation dieser Gleichungen miteinander — so wie in der gewöhnlichen Integralrechnung durch Addition — die Zwischenwerte $y^{(1)}, \ldots y^{(m-1)}$ eliminieren, und wir erhalten

$$y^{(m)} = y^{(0)} \prod_{\nu=1}^{m} (a(\xi_{\nu-1})(x_\nu - x_{\nu-1}) + 1)\cdot \tag{6}$$

Es handelt sich also um die Untersuchung des Grenzwertes dieses Produktes. Um Wiederholungen zu vermeiden, führen wir diese Untersuchung nicht erst an der speziellen Gleichung (1) durch, sondern verallgemeinern gleich auf das System (B).

Es seien denn die Koeffizienten $a_{i\varkappa}(x)\,(i, \varkappa = 1, 2, \ldots, n)$ des Systems (B) reale, eindeutige und endliche Funktionen der Variabeln $x$ in dem Intervalle $(p \ldots q)$, ferner seien

$$y_1^{(0)}, \ldots, y_n^{(0)}$$

willkürlich vorgeschriebene Anfangswerte für den Anfangspunkt $x_0 = p$. Wir bilden die den Gleichungen (4) analogen Differenzengleichungen:

$$\text{(C)} \qquad \left\{ \begin{array}{l} y_\varkappa^{(1)} - y_\varkappa^{(0)} \quad = (x_1 - x_0) \sum_{\lambda=1}^{n} y_\lambda^{(0)} a_{\lambda\varkappa}(\xi_0), \\ y_\varkappa^{(2)} - y_\varkappa^{(1)} \quad = (x_2 - x_1) \sum_{\lambda=1}^{n} y_\lambda^{(1)} a_{\lambda\varkappa}(\xi_1), \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ y_\varkappa^{(m)} - y_\varkappa^{(m-1)} = (x_m - x_{m-1}) \sum_{\lambda=1}^{n} y_\lambda^{(m-1)} a_{\lambda\varkappa}(\xi_{m-1}) \end{array} \right\} \quad (\varkappa = 1, 2, \cdots, n)$$

und untersuchen, unter welchen Bedingungen die durch diesen Algorithmus definierten

$$y_1^{(m)}, \ldots, y_n^{(m)}$$

bestimmten Grenzwerten zustreben, wenn $m$ so ins Unendliche wächst, daß die $x_\nu - x_{\nu-1}$ beliebig klein werden, und zwar Grenzwerten, die unabhängig sind von der Wahl der Teilungspunkte, von der Wahl der Zwischenwerte und von der Art, wie, d. h. nach welchem Gesetze, die $x_\nu - x_{\nu-1}$ verkleinert werden.

Wir beweisen zuvörderst zwei wichtige Hilfssätze.

Da die $a_{i\varkappa}(x)$ für $p \leqq x \leqq q$ endlich sind, so läßt sich eine positive Größe $g$ so angeben, daß

$$|a_{i\varkappa}(x)| < g \qquad \text{für} \qquad p \leqq x \leqq q.$$

Dann folgt aus der ersten der Gleichungen (C)

$$|y_\varkappa^{(1)}| < |y_\varkappa^{(0)}| + (x_1 - x_0)\, g \sum_{\lambda=1}^{n} |y_\lambda^{(0)}|,$$

also, indem wir in bezug auf $\varkappa$ von 1 bis $n$ summieren,

$$\sum_{\varkappa=1}^{n} |y_\varkappa^{(1)}| < \{(x_1 - x_0)\, ng + 1\} \sum_{\varkappa=1}^{n} |y_\varkappa^{(0)}|.$$

Ebenso ergibt sich

$$\sum_{\varkappa=1}^{n} |y_\varkappa^{(2)}| < \{(x_2 - x_1)\, ng + 1\} \sum_{\varkappa=1}^{n} |y_\varkappa^{(1)}|,$$

und somit

$$\sum_{\varkappa=1}^{n} |y_\varkappa^{(2)}| < \{(x_2 - x_1)\, ng + 1\}\ \{(x_1 - x_0)\, ng + 1\} \sum_{\varkappa=1}^{n} |y_\varkappa^{(0)}|.$$

Allgemein erhalten wir

$$(7) \qquad \sum_{\varkappa=1}^{n} |y_\varkappa^{(\nu)}| < \prod_{\mu=1}^{\nu} \{(x_\mu - x_{\mu-1})\, ng + 1\} \sum_{\varkappa=1}^{n} |y_\varkappa^{(0)}|. \qquad (\nu = 1, 2, \cdots, m)$$

Wir führen jetzt zur Erleichterung der Rechnung die Exponentialfunktion ein, bemerken aber, daß sich dies auch vermeiden ließe, wenn man auf Kosten der Bequemlichkeit die „Reinheit der Methode" wahren wollte. — Zufolge der einfachsten Eigenschaften der Exponentialfunktion ist:

$$1 + ng(x_\mu - x_{\mu-1}) < e^{ng(x_\mu - x_{\mu-1})};$$

wir erhalten also aus (7) die Ungleichung

$$\text{(I)} \qquad \sum_{\varkappa=1}^{n} |y_\varkappa^{(\nu)}| < e^{(x_\nu - x_0) n g} \sum_{\varkappa=1}^{n} |y_\varkappa^{(0)}|, \qquad (\nu = 1, 2, \cdots, m)$$

die unseren ersten Hilfssatz ausdrückt.

Dieser Satz offenbart uns schon eine der wichtigsten Eigenschaften des linearen Differentialsystems (B), wodurch sich dieses System von den allgemeinen nicht linearen Differentialsystemen unterscheidet. Wir erkennen nämlich aus der Ungleichung (I), daß die $y_\varkappa^{(\nu)}$ bei beliebiger Wahl der Teilung dem absoluten Betrage nach stets unterhalb einer a priori angebbaren Grenze

$$e^{(r-p) n g} \sum_{\varkappa=1}^{n} |y_\varkappa^{(0)}|$$

bleiben. Schon für die einfache, nichtlineare Differentialgleichung

$$\frac{dy}{dx} = y^2$$

würde, wenn man das angewandte Interpolationsverfahren auf sie überträgt*), eine analoge Eigenschaft nicht bestehen.

Durch Addition der $\nu$ ersten Gleichungen des Systems (C) ergibt sich:

$$|y_\varkappa^{(\nu)} - y_\varkappa^{(0)}| < \sum_{\mu=1}^{\nu} (x_\mu - x_{\mu-1}) \sum_{\lambda=1}^{n} |y_\lambda^{(\mu-1)} a_{\lambda\varkappa}(\xi_{\mu-1})|,$$

$$< g \sum_{\mu=1}^{\nu} (x_\mu - x_{\mu-1}) \sum_{\lambda=1}^{n} |y_\lambda^{(\mu-1)}|,$$

also, da nach (I)

$$\sum_{\lambda=1}^{n} |y_\lambda^{(\mu-1)}| < e^{(x_{\mu-1} - x_0) n g} \sum_{\lambda=1}^{n} |y_\lambda^{(0)}|$$

gefunden wird,

$$|y_\varkappa^{(\nu)} - y_\varkappa^{(0)}| < g \sum_{\mu=1}^{\nu} (x_\mu - x_{\mu-1})\, e^{(x_{\mu-1} - x_0) n g} \sum_{\lambda=1}^{n} |y_\lambda^{(0)}|.$$

Nun ist aber

$$e^{(x_{\mu-1} - x_0) n g} \leqq e^{(x_{\nu-1} - x_0) n g}, \qquad (\mu = 1, 2, \cdots, \nu)$$

wir finden demnach

---

*) Das Interpolationsverfahren ist für beliebige Differentialsysteme von Cauchy zum Existenzbeweise der Integrale benutzt und dann von Lipschitz (vgl. des letzteren Lehrbuch der Analysis II, Bonn 1880, S. 504) weiter entwickelt worden.

(IIa) $$|y_\varkappa^{(\nu)} - y_\varkappa^{(0)}| < g(x_\nu - x_0) e^{(x_{\nu-1} - x_0) n g} \sum_{\lambda=1}^{n} |y_\lambda^{(0)}|$$

und insbesondere

(IIb) $$|y_\varkappa^{(m)} - y_\varkappa^{(0)}| < g(r-p)\, e^{(r-p) n g} \sum_{\lambda=1}^{n} |y_\lambda^{(0)}|;$$

die Formeln (IIa) und (IIb) enthalten unseren zweiten Hilfssatz. Wir betonen noch nachdrücklich, daß die auf der rechten Seite der letzteren Ungleichung auftretende Größe von der Wahl der Teilung und der Zwischenwerte unabhängig ist, daß also durch Verkleinerung des Intervalls $(p \ldots r)$ die Differenzen

$$y_\varkappa^{(m)} - y_\varkappa^{(0)}$$

dem absoluten Betrage nach beliebig klein gemacht werden können.

Wir betrachten jetzt die Gleichungen (C) für dieselben Teilungspunkte $x_1, \ldots, x_{m-1}$, aber für zwei verschiedene Systeme von Zwischenwerten $\xi_{\nu-1}$, $\bar{\xi}_{\nu-1}$, wo also:

$$x_{\nu-1} \leqq \xi_{\nu-1} < x_\nu,\ x_{\nu-1} \leqq \bar{\xi}_{\nu-1} < x_\nu. \qquad (\nu = 1, 2, \cdots, m)$$

Für die neuen Zwischenwerte erhalten wir dann den Algorithmus

($\bar{\mathrm{C}}$) $$\bar{y}_\varkappa^{(\nu)} - \bar{y}_\varkappa^{(\nu-1)} = (x_\nu - x_{\nu-1}) \sum_{\lambda=1}^{n} \bar{y}_\lambda^{(\nu-1)} a_{\lambda\varkappa}(\bar{\xi}_{\nu-1}), \qquad (\nu = 1, 2, \cdots, m)$$

wo aber

$$\bar{y}_\varkappa^{(0)} = y_\varkappa^{(0)}. \qquad (\varkappa = 1, 2, \cdots, n)$$

Durch Subtraktion der Gleichungen ($\bar{\mathrm{C}}$) von den entsprechenden des Systems (C) ergibt sich:

$$\bar{y}_\varkappa^{(\nu)} - y_\varkappa^{(\nu)} = \bar{y}_\varkappa^{(\nu-1)} - y_\varkappa^{(\nu-1)} + (x_\nu - x_{\nu-1}) \sum_{\lambda=1}^{n} \Big[\bar{y}_\lambda^{(\nu-1)} a_{\lambda\varkappa}(\bar{\xi}_{\nu-1}) - \\ - y_\lambda^{(\nu-1)} a_{\lambda\varkappa}(\xi_{\nu-1})\Big],$$

also, wenn wir zur Abkürzung

$$\bar{y}_\varkappa^{(\nu)} - y_\varkappa^{(\nu)} = \Delta_{\varkappa\nu} \qquad (\varkappa = 1, 2, \cdots, n;\ \nu = 1, 2, \cdots, m)$$

setzen,

(8) $$\begin{cases} \Delta_{\varkappa\nu} = \Delta_{\varkappa,\nu-1} + (x_\nu - x_{\nu-1}) \sum_{\lambda=1}^{n} y_\lambda^{(\nu-1)} \big[a_{\lambda\varkappa}(\bar{\xi}_{\nu-1}) - a_{\lambda\varkappa}(\xi_{\nu-1})\big] \\ \qquad + (x_\nu - x_{\nu-1}) \sum_{\lambda=1}^{n} a_{\lambda\varkappa}(\bar{\xi}_{\nu-1}) \Delta_{\lambda,\nu-1}. \end{cases}$$

Für ein Intervall $(x_{\nu-1} \cdots x_\nu)$ nennen wir den Unterschied zwischen dem größten und dem kleinsten Werte, den eine Funktion von $x$ in diesem Intervalle anzunehmen imstande ist, die **Schwankung** dieser Funktion in jenem Intervalle. Die Schwankung derjenigen unter den $n^2$ Funktionen $a_{i\varkappa}$, die nicht kleiner ist als die Schwankung aller übrigen für das Intervall $(x_{\nu-1} \cdots x_\nu)$, bezeichnen wir als die Schwankung $\sigma_{\nu-1}$ des Systems von $n^2$ Funktionen $a_{ik}$ oder kürzer als die **Schwankung der Matrix** $(a_{i\varkappa})$.

Da sowohl $\xi_{\nu-1}$ als auch $\bar{\xi}_{\nu-1}$ dem Intervalle $(x_{\nu-1} \ldots x_\nu)$ angehören, ist

$$|a_{\lambda\varkappa}(\bar{\xi}_{\nu-1}) - a_{\lambda\varkappa}(\xi_{\nu-1})| < \sigma_{\nu-1}; \qquad (\lambda, \varkappa = 1, 2, \cdots, n)$$

ferner folgt nach dem Hilfssatze (I):

$$\sum_{\lambda=1}^{n} |y_\lambda^{(\nu-1)}| < e^{(x_{\nu-1} - x_0) n g} \sum_{\lambda=1}^{n} |y_\lambda^{(0)}|,$$

hiernach ergibt die Gleichung (8):

$$(9) \qquad \left\{ \begin{aligned} |\Delta_{\varkappa\nu}| < |\Delta_{\varkappa\,\nu-1}| + (x_\nu - x_{\nu-1}) \sigma_{\nu-1} e^{(x_{\nu-1} - x_0) n g} \sum_{\lambda=1}^{n} |y_\varkappa^{(0)}| \\ + (x_\nu - x_{\nu-1}) \sum_{\lambda=1}^{n} |a_{\lambda\varkappa}(\bar{\xi}_{\nu-1}) \Delta_{\lambda,\nu-1}| \end{aligned} \right.$$

und, indem wir in bezug auf $\varkappa$ von 1 bis $n$ summieren:

$$(10) \qquad \sum_{\varkappa=1}^{n} |\Delta_{\varkappa\nu}| < E_\nu + (1 + ng(x_\nu - x_{\nu-1})) \sum_{\varkappa=1}^{n} |\Delta_{\varkappa,\nu-1}|,$$

wo

$$(11) \qquad E_\nu = n(x_\nu - x_{\nu-1}) \sigma_{\nu-1} e^{ng(x_{\nu-1} - x_0)} \sum_{\varkappa=1}^{n} |y_\varkappa^{(0)}|$$

gesetzt wurde. — Die Ungleichung (10) hat die folgende Form:

$$(a) \qquad \Delta_\nu < E_\nu + [1 + ng(x_\nu - x_{\nu-1})] \Delta_{\nu-1}; \qquad (\nu = 1, 2, \cdots, m)$$

beachtet man nun, daß

$$[1 + ng(x_m - x_{m-1})] \cdots [1 + ng(x_\nu - x_{\nu-1})] < e^{ng(x_m - x_{\nu-1})},$$

so folgt, indem man in die letzte der Ungleichungen (a) für $\Delta_{m-1}$ die rechte Seite der vorletzten Ungleichung, hierin für $\Delta_{m-2}$ die rechte Seite der drittletzten usw. substituiert:

$$(b) \qquad \Delta_m < \sum_{\nu=1}^{m} e^{ng(x_m - x_\nu)} E_\nu.$$



Hiernach ergibt sich aus (10):

$$\sum_{\varkappa=1}^{n} |\Delta_{\varkappa m}| < \sum_{\nu=1}^{m} e^{ng(x_m - x_\nu)} n(x_\nu - x_{\nu-1})\sigma_{\nu-1} e^{ng(x_{\nu-1} - x_0)} \sum_{\varkappa=1}^{n} |y_\varkappa^{(0)}|$$

und folglich

$$(12) \qquad \sum_{\varkappa=1}^{n} |\Delta_{\varkappa m}| < e^{ng(r-p)} n \sum_{\varkappa=1}^{n} |y_\varkappa^{(0)}| \sum_{\nu=1}^{m} (x_\nu - x_{\nu-1})\sigma_{\nu-1}.$$

Der auf der rechten Seite dieser Ungleichung auftretende Faktor

$$(13) \qquad \sum_{\nu=1}^{m} (x_\nu - x_{\nu-1})\sigma_{\nu-1}$$

kann, analog wie in der gewöhnlichen Integralrechnung, als die Gesamtschwankung der Koeffizientenmatrix $(a_{i\varkappa})$ für die Teilung $(x_1, \ldots, x_{m-1})$ bezeichnet werden. Sollen die Differenzen

$$|\Delta_{\varkappa m}| = |\bar{y}_\varkappa^{(m)} - y_\varkappa^{(m)}|$$

mit wachsendem $m$ beliebig klein gemacht werden können, so muß im allgemeinen die Gesamtschwankung (13) selbst diese Eigenschaft haben; umgekehrt ist nach (12) klar, daß wenn der Grenzwert der Gesamtschwankung verschwindet, d. h.

$$(14) \qquad \lim_{m} \sum_{\nu=1}^{m} (x_\nu - x_{\nu-1})\sigma_{\nu-1} = 0$$

ist, auch

$$\lim_{m} (\bar{y}_\varkappa^{(m)} - y_\varkappa^{(m)}) = 0$$

sein wird. Wir setzen also für die Koeffizienten $a_{i\varkappa}$ unseres Differentialsystems voraus, daß sie nebst den Bedingungen der Eindeutigkeit und Endlichkeit in dem Intervalle $(p \ldots q)$ noch die folgende Bedingung erfüllen: Bildet man für irgendeine Teilung des Intervalls $(p \ldots r)$, wo $r < q$, die Gesamtschwankung (13) der Matrix $(a_{i\varkappa})$, so kann diese beliebig klein gemacht werden, indem man die Ausdehnung der einzelnen Teilintervalle $(x_\nu - x_{\nu-1})$ hinreichend klein und damit die Anzahl $m$ dieser Teilintervalle hinreichend groß wählt.

Diese Bedingung, die wir als Bedingung (D) bezeichnen wollen, erweist sich nun auch als hinreichend dafür, daß die durch den Algorithmus (C) erzielten $y_1^{(m)}, \ldots, y_n^{(m)}$ in dem oben (S. 5) angegebenen Sinne bestimmten Grenzwerten zustreben.

Wir zeigen dies, indem wir wieder Schritt für Schritt ebenso ver-

fahren, wie man bei der analogen Untersuchung in der gewöhnlichen Integralrechnung vorzugehen pflegt.

Von der Teilung $x_1, \ldots, x_{m-1}$, mit den Zwischenwerten $\xi_{\nu-1}$ gehen wir zuvörderst zu einer Unterteilung über, indem wir jedes Intervall $(x_{\nu-1}, \ldots, x_\nu)$ durch die Punkte

$$x_{\nu-1} = \mathfrak{x}_0, \quad \mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_{m-1}, \quad x_\nu = \mathfrak{x}_m$$

weiter teilen und in jedem Intervalle $(\mathfrak{x}_{i-1} \ldots \mathfrak{x}_i)$ einen willkürlichen Zwischenwert $\eta_{i-1}$ wählen. Für diese Unterteilung bilden wir den Algorithmus (C), wobei wir natürlich die Ausgangswerte $y_x^{(0)}$ für $x_0$ unverändert beibehalten; die auf diese Weise für den Punkt $x_\lambda$ der ursprünglichen Teilung sich ergebenden Interpolationswerte mögen mit $\bar{y}_x^{(\lambda)}$ $(x = 1, 2, \ldots n)$ bezeichnet werden. Es handelt sich dann um die Vergleichung der $\bar{y}_x^{(\lambda)}$ mit den $y_x^{(\lambda)}$.

Wir setzen

$$\bar{y}_x^{(\nu-1)} = \mathfrak{y}_x^{(0)}, \qquad \bar{y}_x^{(\nu)} = \mathfrak{y}_x^{(\mathrm{m})}.$$

Dann haben wir den Algorithmus

$$(\mathrm{C}_\nu) \qquad \mathfrak{y}_x^{(\lambda)} = \mathfrak{y}_x^{(\lambda-1)} + (\mathfrak{x}_\lambda - \mathfrak{x}_{\lambda-1}) \sum_{i=1}^{n} a_{ix}(\eta_{\lambda-1}) \mathfrak{y}_i^{(\lambda-1)}, \quad (\lambda = 1, 2, \cdots, \mathrm{m})$$

für den natürlich die durch die Ungleichungen (I) und (II) dargestellten Hilfssätze gültig sind.

Die Ungleichung (IIa) ergibt:

$$|\mathfrak{y}_x^{(\lambda-1)} - \mathfrak{y}_x^{(0)}| < g e^{ng(\mathfrak{x}_{\lambda-1} - \mathfrak{x}_0)} (\mathfrak{x}_{\lambda-1} - \mathfrak{x}_0) \sum_{x=1}^{n} |\mathfrak{y}_x^{(0)}|,$$

also haben wir a potiori

$$(15) \qquad |\mathfrak{y}_x^{(\lambda-1)} - \mathfrak{y}_x^{(0)}| < g e^{ng(x_\nu - x_{\nu-1})} (x_\nu - x_{\nu-1}) \sum_{x=1}^{n} |\mathfrak{y}_x^{(0)}|.$$

Nun folgt durch Addition der Gleichungen $(\mathrm{C}_\nu)$

$$(16) \qquad \mathfrak{y}_x^{(\mathrm{m})} = \mathfrak{y}_x^{(0)} + \sum_{\lambda=1}^{\mathrm{m}} (\mathfrak{x}_\lambda - \mathfrak{x}_{\lambda-1}) \sum_{i=1}^{n} a_{ix}(\eta_{\lambda-1}) \mathfrak{y}_i^{(\lambda-1)}.$$

Es ist aber

$$\sum_{i=1}^{n} [a_{ix}(\eta_{\lambda-1}) \mathfrak{y}_i^{(\lambda-1)} - a_{ix}(\eta_0) \mathfrak{y}_i^{(0)}] = \sum_{i=1}^{n} [a_{ix}(\eta_{\lambda-1}) - a_{ix}(\eta_0)] \mathfrak{y}_i^{(0)}$$
$$+ \sum_{i=1}^{n} a_{ix}(\eta_{\lambda-1})(\mathfrak{y}_i^{(\lambda-1)} - \mathfrak{y}_i^{(0)}),$$

also, da $\eta_0$, $\eta_{\lambda-1}$ in dem Intervalle $(x_{\nu-1} \ldots x_\nu)$ liegen,

$$(17) \qquad \left| \sum_{i=1}^{n} [a_{i\varkappa}(\eta_{\lambda-1})\mathfrak{y}_i^{(\lambda-1)} - a_{i\varkappa}(\eta_0)\mathfrak{y}_i^{(0)}] \right| < \sigma_{\nu-1} \sum_{i=1}^{n} |\mathfrak{y}_i^{(0)}| + g \sum_{i=1}^{n} |\mathfrak{y}_i^{(\lambda-1)} - \mathfrak{y}_i^{(0)}|.$$

Statt dieser Ungleichung können wir auch schreiben:

$$\sum_{i=1}^{n} a_{i\varkappa}(\eta_{\lambda-1})\mathfrak{y}_i^{(\lambda-1)} = \sum_{i=1}^{n} a_{i\varkappa}(\eta_0)\mathfrak{y}_i^{(0)} + \bar{\theta}_{\lambda-1}\left(\sigma_{\nu-1} \sum_{i=1}^{n} |\mathfrak{y}_i^{(0)}| + g \sum_{i=1}^{n} |\mathfrak{y}_i^{(\lambda-1)} - \mathfrak{y}_i^{(0)}|\right),$$

wo $\bar{\theta}_{\lambda-1}$ eine Größe bedeutet, deren absoluter Betrag kleiner ist als Eins. Mit Rücksicht auf (15) haben wir also

$$\sum_{i=1}^{n} a_{i\varkappa}(\eta_{\lambda-1})\mathfrak{y}_i^{(\lambda-1)} = \sum_{i=1}^{n} a_{i\varkappa}(\eta_0)\mathfrak{y}_i^{(0)} + \theta_{\lambda-1}\left(\sigma_{\nu-1} \sum_{i=1}^{n} |\mathfrak{y}_i^{(0)}| + g^2 e^{ng(x_\nu - x_{\nu-1})}(x_\nu - x_{\nu-1}) \sum_{i=1}^{n} |\mathfrak{y}_i^{(0)}|\right),$$

wo auch $|\theta_{\lambda-1}| < 1$. Dies in (16) eingesetzt liefert:

$$\mathfrak{y}_\varkappa^{(\mathfrak{m})} - \mathfrak{y}_\varkappa^{(0)} = \sum_{\lambda=1}^{\mathfrak{m}} (\mathfrak{x}_\lambda - \mathfrak{x}_{\lambda-1}) \left[ \sum_{i=1}^{n} a_{i\varkappa}(\eta_0)\mathfrak{y}_i^{(0)} + \theta_{\lambda-1}(\sigma_{\nu-1} + g^2 e^{ng(x_\nu - x_{\nu-1})}(x_\nu - x_{\nu-1})) \sum_{i=1}^{n} |\mathfrak{y}_i^{(0)}| \right]$$

oder, wenn $\theta$ wieder eine Größe bedeutet, deren absoluter Betrag kleiner ist als Eins:

$$\mathfrak{y}_\varkappa^{(\mathfrak{m})} - \mathfrak{y}_\varkappa^{(0)} = (x_\nu - x_{\nu-1}) \left[ \sum_{i=1}^{n} a_{i\varkappa}(\eta_0)\mathfrak{y}_i^{(0)} + \theta(\sigma_{\nu-1} + g^2 e^{ng(x_\nu - x_{\nu-1})}(x_\nu - x_{\nu-1})) \sum_{i=1}^{n} |\mathfrak{y}_i^{(0)}| \right].$$

Subtrahieren wir von dieser Gleichung die Gleichung

$$y_\varkappa^{(\nu)} - y_\varkappa^{(\nu-1)} = (x_\nu - x_{\nu-1}) \sum_{i=1}^{n} a_{i\varkappa}(\xi_{\nu-1}) y_i^{(\nu-1)}$$

und setzen dann für $\mathfrak{y}_x^{(m)}$, $\mathfrak{y}_x^{(0)}$ wieder $\bar{y}_x^{(\nu)}$, $\bar{y}_x^{(\nu-1)}$, so kommt:

$$\bar{y}_x^{(\nu)} - y_x^{(\nu)} = \bar{y}_x^{(\nu-1)} - y_x^{(\nu-1)} + (x_\nu - x_{\nu-1})\Big\{\sum_{i=1}^{n}[a_{ix}(\eta_0)\bar{y}_i^{(\nu-1)} - a_{ix}(\xi_{\nu-1})y_i^{(\nu-1)}]$$
$$+ \theta(\sigma_{\nu-1} + g^2 e^{ng(x_\nu - x_{\nu-1})}(x_\nu - x_{\nu-1})) \sum_{i=1}^{n} |\bar{y}_i^{(\nu-1)}|\Big\},$$

also, indem wir die Differenz

$$\sum_{i=1}^{n}[a_{ix}(\eta_0)\bar{y}_i^{(\nu-1)} - a_{ix}(\xi_{\nu-1})y_i^{(\nu-1)}]$$

nach dem Muster der Ungleichung (17) umformen:

$$(18)\quad |\bar{y}_x^{(\nu)} - y_x^{(\nu)}| < |\bar{y}_x^{(\nu-1)} - y_x^{(\nu-1)}| + (x_\nu - x_{\nu-1})\Big\{\sigma_{\nu-1}\sum_{i=1}^{n}|y_i^{(\nu-1)}|$$
$$+ g\sum_{i=1}^{n}|\bar{y}_i^{(\nu-1)} - y_i^{(\nu-1)}| + |\theta|(\sigma_{\nu-1} + g^2 e^{ng(x_\nu - x_{\nu-1})}(x_\nu - x_{\nu-1}))$$
$$\sum_{i=1}^{n}|\bar{y}_i^{(\nu-1)}|\Big\},$$

wo wir jetzt an die Stelle von $|\theta|$ auch 1 setzen können.

Nun ist aber nach dem ersten Hilfssatze (Ungleich. (I))

$$\sum_{i=1}^{n}|y_i^{(\nu-1)}| < e^{ng(x_{\nu-1} - x_0)}\sum_{i=1}^{n}|y_i^{(0)}|,$$

$$\sum_{i=1}^{n}|\bar{y}_i^{(\nu-1)}| < e^{ng(x_{\nu-1} - x_0)}\sum_{i=1}^{n}|y_i^{(0)}|,$$

wir finden also, indem wir (18) in bezug auf $x$ von 1 bis $n$ summieren

$$\sum_{x=1}^{n}|\bar{y}_x^{(\nu)} - y_x^{(\nu)}| < \sum_{x=1}^{n}|\bar{y}_x^{(\nu-1)} - y_x^{(\nu-1)}|\{1 + ng(x_\nu - x_{\nu-1})\}$$
$$+ 2\sigma_{\nu-1}n(x_\nu - x_{\nu-1})e^{ng(x_{\nu-1} - x_0)}\sum_{i=1}^{n}|y_i^{(0)}|$$
$$+ (x_\nu - x_{\nu-1})^2 g^2 n^2 e^{ng(x_\nu - x_0)}\sum_{i=1}^{n}|y_i^{(0)}|.$$

Diese Ungleichung ist von derselben Form wie die Ungleichung (a); es ergibt sich folglich nach (b):

$$\sum_{x=1}^{n} |\bar{y}_x^{(m)} - y_x^{(m)}| < \sum_{\nu=1}^{m} e^{ng(x_m - x_{\nu-1})}$$

$$\left\{ 2(x_\nu - x_{\nu-1}) n \sigma_{\nu-1} e^{(x_{\nu-1} - x_0)ng} \sum_{i=1}^{n} |y_i^{(0)}| + (x_\nu - x_{\nu-1})^2 g^2 n^2 e^{ng(x_\nu - x_0)} \sum_{i=1}^{n} |y_i^{(0)}| \right\},$$

also endlich

$$(19) \qquad \sum_{x=1}^{n} |\bar{y}_x^{(m)} - y_x^{(m)}| < e^{ng(r-p)} \sum_{i=1}^{n} |y_i^{(0)}|$$

$$\left\{ 2n \sum_{\nu=1}^{m} (x_\nu - x_{\nu-1}) \sigma_{\nu-1} + g^2 n^2 \sum_{\nu=1}^{m} (x_\nu - x_{\nu\ -1})^2 e^{ng(x_\nu - x_{\nu-1})} \right\}.$$

Zufolge der Voraussetzung können wir die Intervalle $(x_\nu - x_{\nu-1})$ der ursprünglichen Teilung so klein wählen, daß die Gesamtschwankung $\sum_{\nu=1}^{m} (x_\nu - x_{\nu-1}) \sigma_{\nu-1}$ beliebig klein wird, wir können aber durch hinreichende Verkleinerung der Intervalle $x_\nu - x_{\nu-1}$ auch erreichen, daß die Ausdrücke

$$(x_\nu - x_{\nu-1}) g^2 n^2 e^{ng(x_\nu - x_{\nu-1})}$$

beliebig klein werden; daraus folgt aber im Sinne der Ungleichung (19), daß wir durch Verkleinerung der Teilintervalle der ursprünglichen Teilung erreichen können, daß für jede beliebige Unterteilung die Differenzen $|\bar{y}_x^{(m)} - y_x^{(m)}|$ beliebig klein ausfallen.

Der Beweis dafür, daß sich die $y_x^{(m)}$ in dem oben angegebenen Sinne bestimmten Grenzwerten annähern, wird offenbar geliefert sein, wenn wir folgendes zeigen können. Wir betrachten zwei Teilungen (erste und zweite), deren Teilintervalle sämtlich kleiner sind als eine kleine positive Größe $\delta$, bilden für beide Teilungen, mit beliebigen Zwischenwerten, den Algorithmus (C) und bezeichnen die durch diesen Algorithmus erzielten Endwerte (d. h. die $y_x^{(m)}$) für die erste Teilung mit $Y_x^{(1)}$ für die zweite mit $Y_x^{(2)}$. Dann muß gezeigt werden, daß die Differenzen $| Y_x^{(2)} - Y_x^{(1)} |$ dadurch beliebig klein gemacht werden können, daß wir $\delta$ hinreichend klein wählen. — Zu dem Ende vereinigen wir die beiden Teilungen zu einer dritten, indem wir die Teilungspunkte beider als Teilungspunkte jener dritten Teilung ansehen. Die Endwerte, die unser Algorithmus bei Zugrundelegung

dieser dritten Teilung und beliebiger Zwischenwerte liefert, seien $Y_\varkappa^{(3)}$. Da die dritte Teilung sowohl für die erste als auch für die zweite Teilung eine Unterteilung darstellt, kann $\delta$ nach dem Vorhergehenden so klein gewählt werden, daß sowohl

$$|Y_\varkappa^{(3)} - Y_\varkappa^{(1)}| \quad \text{als auch} \quad |Y_\varkappa^{(3)} - Y_\varkappa^{(2)}| \qquad (\varkappa = 1, 2, \cdots, n)$$

beliebig klein ausfallen, also, da

$$|Y_\varkappa^{(2)} - Y_\varkappa^{(1)}| < |Y_\varkappa^{(3)} - Y_\varkappa^{(1)}| + |Y_\varkappa^{(3)} - Y_\varkappa^{(2)}|$$

ist, auch so klein, daß die Differenzen $|Y_\varkappa^{(2)} - Y_\varkappa^{(1)}|$ beliebig klein sind, was zu beweisen war.

Es fragt sich nun, was durch den eben gelieferten Beweis der Existenz für die $\lim\limits_m y_\varkappa^{(m)}$ für die Integration des Differentialsystems (B) gewonnen ist. Um diese Frage zu entscheiden, setzen wir jetzt $r = x$ und betrachten $x$ als veränderlich. Dann werden die Grenzwerte der $y_\varkappa^{(m)}$ zu Funktionen von $x$, die wir mit

$$\lim_m y_\varkappa^{(m)} = y_\varkappa(x)$$

bezeichnen wollen. Für diese Funktionen gelten nun zuvörderst die folgenden Bemerkungen.

1. Wir fassen die den Funktionen $a_{i\varkappa}(x)$ auferlegte Bedingung des Verschwindens der Gesamtschwankung an der Grenze so, daß die Annäherung der Gesamtschwankung an die Null für das ganze Intervall $(p \ldots q)$ gleichmäßig erfolgen soll. D. h. nach Vorschrift einer beliebig kleinen Größe $\varepsilon$ soll es möglich sein, die Ausdehnung $\delta$ der Teilintervalle so klein zu nehmen, daß für ein jedes zwischen $p$ und $q$ gelegenes $x$ die einer Teilung des Intervalles $(p \ldots x)$ in Teile, die kleiner sind als $\delta$, entsprechende Gesamtschwankung kleiner ausfällt als $\varepsilon$. Man kann zeigen, daß diese gleichmäßige Annäherung der Gesamtschwankung an die Null stets statthat, wenn die Gesamtschwankung für jeden Punkt $x$ des Intervalles $(p \ldots q)$ sich in dem früher angegebenen Sinne der Null nähert. Der Beweis wird nach denselben Prinzipien geliefert wie der, daß eine Funktion von $x$, die für jeden Punkt des Intervalles $(p \ldots q)$ stetig ist, im Innern dieses Intervalles auch gleichmäßig stetig sein muß*).

Aus den Ungleichungen (19) folgt dann ohne weiteres, daß die $y_\varkappa^{(m)}$ sich den Funktionen $y_\varkappa(x)$ im Innern des ganzen Inter-

*) Vgl. hierfür etwa: Dini-Lüroth-Schepp, Grundlagen usw. (Teubner 1892), § 41.

valles $(p \ldots q)$ gleichmäßig annähern. Wir können demnach die Funktionen $y_k(x)$ durch Reihen darstellen, die in dem ganzen Intervalle $(p \ldots q)$ gleichmäßig konvergieren.

2. Die Funktionen $y_\varkappa(x)$ sind in dem Intervalle $(p \ldots q)$ stetig. In der Tat, seien $x$ und $x'$ zwei Punkte im Innern dieses Intervalles, $x < x'$. Wir bestimmen zuvörderst die $y_\varkappa(x)$ mit Hilfe unseres Interpolationsverfahrens, und dann die $y_\varkappa(x')$, indem wir das Intervall $(x \ldots x')$ teilen und von den $y_\varkappa(x)$ als Anfangswerten für den Punkt $x$ ausgehend unseren Algorithmus herstellen. Die Endwerte im Punkte $x'$, die sich bei einer Teilung des Intervalles $(x \ldots x')$ in $m$ Teile ergeben, mögen mit $\tilde{y}_\varkappa^{(m)}$ bezeichnet werden. Dann kann nach 1. jede der Differenzen $y_\varkappa(x') - \tilde{y}_\varkappa^{(m)}$ dem absoluten Betrage nach beliebig klein gemacht werden dadurch, daß man die Teile des Intervalles $(x \ldots x')$ hinreichend klein wählt. Ferner folgt aber, wenn wir für $x < \xi < x'$

$$(20) \qquad Y_\varkappa - y_\varkappa(x) = (x' - x) \sum_{i=1}^{n} y_i(x) a_{i\varkappa}(\xi)$$

setzen, nach (18), daß

$$(21) \qquad \left\{ \begin{aligned} |\tilde{y}_\varkappa^{(m)} - Y_\varkappa| < (x' - x)\Bigg[ \sigma \sum_{i=1}^{n} |y_i(x)| + \theta\sigma \sum_{i=1}^{n} |y_i(x)| \\ + \theta g^2 e^{ng(x'-x)}(x' - x) \sum_{i=1}^{n} |y_i(x)| \Bigg], \end{aligned} \right.$$

wo $|\theta| < 1$, und $\sigma$ die Schwankung der Matrix $(a_{i\varkappa}(x))$ in dem Intervalle $(x \ldots x')$ bedeutet. Aus (20) und (21) folgt aber, daß

$$(22) \qquad \tilde{y}_\varkappa^{(m)} - y_\varkappa(x) = (x' - x) \sum_{i=1}^{n} y_i(x) a_{i\varkappa}(\xi) + \Theta \,.\, L$$

ist, wo $|\Theta| < 1$ und $L$ den auf der rechten Seite der Ungleichung (21) auftretenden Ausdruck bedeutet. Es können folglich durch Verkleinerung der Differenz $x' - x$ die Differenzen $\tilde{y}_\varkappa^{(m)} - y_\varkappa(x)$ und folglich auch die Differenzen $y_\varkappa(x') - y_\varkappa(x)$ dem absoluten Betrage beliebig klein gemacht werden, wodurch die Stetigkeit des Funktionssystems $y_k(x)$ in dem Intervalle $(p \ldots q)$ erwiesen ist.

Soll das Funktionssystem $y_\varkappa(x)$ das Differentialsystem (B) befriedigen, so müssen aber die $y_\varkappa(x)$ nicht nur stetig sondern auch differentiierbar sein. Damit dies der Fall sei, wollen wir für die Koeffizienten $a_{i\varkappa}(x)$ des Differentialsystems jetzt die Voraussetzung Platz greifen

lassen, daß diese Koeffizienten im Intervalle $(p \dots q)$ eindeutige, endliche und stetige Funktionen seien. — Zunächst ist klar, daß alsdann der Grenzwert der Gesamtschwankung der Matrix $(a_{i\varkappa})$ gleich Null ist, da zufolge der Stetigkeit die Schwankung $\sigma_{\nu-1}$ der Matrix $(a_{i\varkappa})$ in jedem Teilintervalle beliebig klein gemacht werden kann, indem man die Ausdehnung der Teilintervalle hinreichend verkleinert. Ferner folgt aber aus (21), daß die Quotienten

$$\frac{y_\varkappa(x') - y_\varkappa(x)}{x' - x}$$

den Grenzwerten

$$\lim_{x'=x} \sum_{i=1}^{n} y_i(x)\, a_{i\varkappa}(\xi) = \sum_{i=1}^{n} y_i(x)\, a_{i\varkappa}(x)$$

zustreben, wenn sich $x'$ dem $x$ unbegrenzt annähert; es ist also gezeigt, daß die $y_\varkappa(x)$ differentiierbar sind, und daß

$$\frac{d y_\varkappa(x)}{dx} = \sum_{i=1}^{n} y_i(x) a_{i\varkappa}(x)$$

ist, d. h. daß die Funktionen $y_\varkappa(x)$ dem Differentialsysteme (B) Genüge leisten.

Wir fassen die Ergebnisse dieser Vorlesung zu dem folgenden Lehrsatze zusammen:

In einem Intervalle $(p \dots q)$, innerhalb dessen die Koeffizienten $a_{i\varkappa}(x)$ des homogenen, linearen Differentialsystems (B) eindeutige, endliche und stetige Funktionen der realen Variabeln $x$ sind, liefert das Interpolationsverfahren ein System von Funktionen $y_\varkappa(x)$, die in dem bezeichneten Intervalle das Differentialsystem befriedigen und für $x = p$ die willkürlich vorgeschriebenen Anfangswerte $y_\varkappa^{(0)}$ annehmen.

---

## Zweite Vorlesung.

**Neue Form des Interpolationsverfahrens. Rechnen mit Matrizen. Integralmatrizen. Derivierte Matrizen. Derivations- und Integrationsregeln für Matrizen. Adjungierte Differentialsysteme und Integralmatrizen.**

Wir denken uns nun $n$ Systeme von Anfangswerten gegeben

$$(1)\qquad \begin{cases} y^{(0)}_{11}, & y^{(0)}_{12}, & \cdots, & y^{(0)}_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ y^{(0)}_{n1}, & y^{(0)}_{n2}, & \cdots, & y^{(0)}_{nn} \end{cases},$$

für die nur die Bedingung erfüllt sein möge, daß die aus diesen $n^2$ Elementen gebildete Determinante

$$\left| y^{(0)}_{i\varkappa} \right| \quad (i, \varkappa = 1, 2, \cdots, n)$$

einen von Null verschiedenen Wert besitzt. Durch Anwendung des in der vorigen Vorlesung auseinandergesetzten Verfahrens erhalten wir dann $n$ Systeme von Lösungen unseres Differentialsystems.

Der zur Bestimmung dieser Lösungssysteme dienende Algorithmus (C) lautet wie folgt:

$$(C')\qquad y^{(\nu)}_{i\varkappa} - y^{(\nu-1)}_{i\varkappa} = (x_\nu - x_{\nu-1}) \sum_{\lambda=1}^{n} y^{(\nu-1)}_{i\lambda}\, a_{\lambda\varkappa}(\xi_{\nu-1}),$$
$$(i, \varkappa = 1, 2, \cdots, n; \quad \nu = 1, 2, \cdots, m)$$

und wenn wir, wie stets im folgenden, die $a_{i\varkappa}$ als stetige Funktionen von $x$ im Intervalle $(p \ldots q)$ voraussetzen, so sind die in Rede stehenden Lösungssysteme unseres Differentialsystems durch die Grenzwerte

$$(2)\qquad y_{i\varkappa}(x) = \lim_{m} y^{(m)}_{ik}$$

gegeben. Wir können nun durch Anwendung der üblichen Bezeichnungsweisen des Matrizenkalküls die Gleichungen (C′) in eine Form setzen, die der in der vorigen Vorlesung für den Fall $n = 1$ gefundenen ganz analog ist. Die Bezeichnungen, deren wir uns auch späterhin stets bedienen werden, sind die folgenden:

* * *

Bedeuten $a_{i\varkappa}$, $b_{i\varkappa}$ zwei Systeme von je $n^2$ Elementen, indem die Indizes $i$, $\varkappa$ alle ganzzahligen Werte $1, 2, \ldots, n$ durchlaufen, so verstehen wir unter der Summe der beiden Matrizen $(a_{i\varkappa})$ und $(b_{i\varkappa})$ die Matrix

$$(a_{i\varkappa} + b_{i\varkappa}) = (a_{i\varkappa}) + (b_{i\varkappa})$$

und unter dem Produkt dieser beiden Matrizen die Matrix

$$\left(\sum_{\lambda=1}^{n} a_{i\lambda} b_{\lambda\varkappa}\right) = (a_{i\varkappa})(b_{i\varkappa}),$$

wobei jedoch im allgemeinen die Reihenfolge der Faktoren (oder Komponenten) wesentlich ist. Offenbar ist die Determinante der Matrix $(a_{i\varkappa})(b_{i\varkappa})$ gleich dem Produkte der beiden Determinanten $|a_{i\varkappa}|$, $|b_{i\varkappa}|$. Statt von dem Produkte sprechen wir auch von der aus $(a_{i\varkappa})$, $(b_{i\varkappa})$ komponierten Matrix. Für das Produkt von mehr als zwei Faktoren gilt dann offenbar das assoziative Gesetz; ferner ist

$$(a_{i\varkappa})(b_{i\varkappa} + c_{i\varkappa}) = (a_{i\varkappa})(b_{i\varkappa}) + (a_{i\varkappa})(c_{i\varkappa}).$$

Die Matrix $(\alpha a_{i\varkappa})$, wo $\alpha$ irgendeine Größe bedeutet, bezeichnen wir auch durch $\alpha(a_{i\varkappa})$. Ferner bedeute $(\delta_{i\varkappa})$ diejenige Matrix, für die alle nicht in der Diagonale stehenden Elemente (d. h. also alle $\delta_{i\varkappa}$, wo $i \neq \varkappa$) gleich Null, dagegen alle Diagonalelemente (d. h. also alle $\delta_{\varkappa\varkappa}$) gleich Eins sind; da eine beliebige Matrix $(a_{i\varkappa})$ sowohl durch rechtsseitige als durch linksseitige Komposition mit $(\delta_{i\varkappa})$ nicht geändert wird, nennen wir $(\delta_{i\varkappa})$ die Einheitsmatrix. Die Bedeutung der positiven ganzzahligen Potenzen einer Matrix erhellt aus der Formel:

$$(a_{i\varkappa})^{\varrho} = (a_{i\varkappa})(a_{i\varkappa})^{\varrho-1} = (a_{i\varkappa})^{\varrho-1}(a_{i\varkappa}),$$

dabei ist stets

$$(a_{i\varkappa})^0 = (\delta_{i\varkappa})$$

zu nehmen. Mit (0) bezeichnen wir diejenige Matrix, deren sämtliche Elemente gleich Null sind. Ist

$$(a_{i\varkappa})(b_{i\varkappa}) = (0)$$

und die Determinante der Matrix $(b_{i\varkappa})$

$$\underset{(i,\varkappa=1,2,\cdots,n)}{|b_{i\varkappa}|} = \operatorname{Det}(b_{i\varkappa})$$

von Null verschieden, so folgt aus der Theorie der linearen Gleichungen, daß

$$(a_{i\varkappa}) = (0)$$

sein muß.

Bedeutet $(a_{i\varkappa})$ eine Matrix mit von Null verschiedener Determinante, so kann die Matrix $(b_{i\varkappa})$ stets so bestimmt werden, daß

$$(b_{i\varkappa})(a_{i\varkappa}) = (\delta_{i\varkappa});$$

wir setzen dann

$$(b_{i\varkappa}) = (a_{i\varkappa})^{-1}$$

und nennen $(b_{i\varkappa})$ die zu $(a_{i\varkappa})$ inverse Matrix. Es ist dann offenbar

$$\text{Det}\,(a_{i\varkappa})^{-1} = \frac{1}{\text{Det}\,(a_{i\varkappa})},$$

und die Beziehung zwischen einer Matrix und ihrer inversen ist eine gegenseitige. Für die inverse einer Matrix, die aus mehreren Matrizen $(a_{i\varkappa})$, $(b_{i\varkappa})$, . . ., $(c_{i\varkappa})$ komponiert ist, gilt offenbar die Gleichung

$$((a_{i\varkappa})(b_{i\varkappa}) \cdots (c_{i\varkappa}))^{-1} = (c_{i\varkappa})^{-1} \cdots (b_{i\varkappa})^{-1}(a_{i\varkappa})^{-1}.$$

*  *  *

Wir schreiben nunmehr die Gleichungen (C′) in der Form

(3) $$y_{i\varkappa}^{(\nu)} = \sum_{\lambda=1}^{n} y_{i\lambda}^{(\nu-1)} (a_{\lambda\varkappa}(\xi_{\nu-1}) \cdot (x_\nu - x_{\nu-1}) + \delta_{\lambda\varkappa})$$

oder als Kompositionsgleichung von Matrizen in der Form

(4) $$(y_{i\varkappa}^{(\nu)}) = (y_{i\varkappa}^{(\nu-1)})(a_{i\varkappa}(\xi_{\nu-1}) \cdot (x_\nu - x_{\nu-1}) + \delta_{i\varkappa}),$$

die der Gleichung (5) der vorigen Vorlesung ganz analog ist.

Ebenso wie dort können wir nun durch Komposition (oder Multiplikation) die Zwischenmatrizen

$$(y_{i\varkappa}^{(\nu)}) \qquad (\nu = 1, 2, \cdots, m-1)$$

eliminieren und erhalten

$$(y_{i\varkappa}^{(m)}) = (y_{i\varkappa}^{(0)})(a_{i\varkappa}(\xi_0) \cdot (x_1 - x_0) + \delta_{i\varkappa}) \cdots (a_{i\varkappa}(\xi_{m-1}) \cdot (x_m - x_{m-1}) + \delta_{i\varkappa})$$

oder in symbolischer Gestalt (vgl. für $n = 1$ die Formel (6) der ersten Vorlesung)

(5) $$(y_{i\varkappa}^{(m)}) = (y_{i\varkappa}^{(0)}) \prod_{\nu=1,2,\cdots,m} (a_{i\varkappa}(\xi_{\nu-1}) \cdot (x_\nu - x_{\nu-1}) + \delta_{i\varkappa}).$$

Wir führen nun für die Grenzwerte dieser $y_{i\varkappa}^{(m)}$ beziehungsweise für die aus diesen Grenzwerten gebildete Matrix eine stehende Bezeichnung ein.

Der Algorithmus (C′) beziehe sich auf das Intervall mit dem Anfangswerte $p = x_0$ und dem Endwerte $r = x_m$, wo

$$p < r < q;$$

wir nehmen jetzt ferner die Anfangswerte $y_{i\varkappa}^{(0)}$ so, daß ihre Matrix die Einheitsmatrix darstellt, also

$$y_{i\varkappa}^{(0)} = \delta_{i\varkappa};$$

dann möge die Matrix der Grenzwerte

$$(\alpha) \qquad \lim_{m} \prod_{\nu=1,2,\cdots,m} (a_{i\varkappa}(\xi_{\nu-1})(x_\nu - x_{\nu-1}) + \delta_{i\varkappa}) = \widehat{\int_p^r} (a_{i\varkappa}(x)dx + \delta_{i\varkappa})$$

gesetzt werden. Diese Bezeichnung ist so gewählt, daß sie sich so eng als möglich an das Zeichen für das gewöhnliche Integral zwischen den Grenzen $p$ und $r$

$$\lim_{m} \sum_{\nu=1}^{m} a(\xi_{\nu-1})(x_\nu - x_{\nu-1}) = \int_p^r a(x)dx$$

anschließt, sie soll ferner an den Anfangsbuchstaben des Wortes Produkt ebenso erinnern, wie das gewöhnliche Integralzeichen an den des Wortes Summe. Gelesen wird das durch ($\alpha$) eingeführte Zeichen: „Integralmatrix von $p$ bis $r$“.

Für die Existenz der Integralmatrix ($\alpha$) ist zwar, wie wir wissen, die Stetigkeit der $a_{i\varkappa}(x)$ nicht erforderlich, gleichwohl setzen wir im folgenden die $a_{i\varkappa}(x)$ stets als im Intervalle $(p \ldots q)$ stetig voraus, da die weitere Voraussetzung des Verschwindens der Gesamtschwankung an der Grenze für die Zwecke, die wir im Auge haben, nicht ausreicht.

Setzen wir $r = x$, und betrachten wir $x$ als im Intervalle $(p \ldots q)$ veränderlich, so stellt die Integralmatrix

$$(\eta_{i\varkappa}(x)) = \widehat{\int_p^x} (a_{i\varkappa}(x)dx + \delta_{i\varkappa})$$

eine Matrix von Funktionen von $x$ dar, die die folgenden Eigenschaften besitzt. Die Funktionen einer Zeile, d. h. diejenigen, für die der erste Index $i$ einen festen Wert besitzt, befriedigen das Differentialsystem (B) und nehmen für $x = p$ die Werte $\delta_{i\varkappa}$ an, d. h. es ist

$$(6) \qquad \frac{d\eta_{i\varkappa}(x)}{dx} = \sum_{\lambda=1}^{n} \eta_{i\lambda}(x) a_{\lambda\varkappa}(x),$$

$$(i, \varkappa = 1, \cdots, n)$$

$$(7) \qquad \eta_{i\varkappa}(p) = \delta_{i\varkappa}.$$

Die Determinante der Matrix $(\eta_{i\varkappa}(x))$ ist nicht identisch gleich Null, da sie sich doch für $x = p$ auf die Determinante der Einheits-

matrix $(\delta_{i\varkappa})$ d. h. auf Eins reduziert. Wir behaupten aber, daß diese Determinante $|\eta_{i\varkappa}(x)|$ für keinen Wert $x$ des ganzen Stetigkeitsintervalles $(p \ldots q)$ der Funktionen $a_{i\varkappa}(x)$ verschwinden kann. In der Tat ist nach den Regeln für die Differentiation einer Determinante

$$\frac{d|\eta_{i\varkappa}|}{dx} = \begin{vmatrix} \frac{d\eta_{11}}{dx} & \eta_{12} & \cdots & \eta_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{d\eta_{n1}}{dx} & \eta_{n2} & \cdots & \eta_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \eta_{11} & \frac{d\eta_{12}}{dx} & \cdots & \eta_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \eta_{n1} & \frac{d\eta_{n2}}{dx} & \cdots & \eta_{nn} \end{vmatrix}$$

$$+ \cdots + \begin{vmatrix} \eta_{11} & \eta_{12} & \cdots & \frac{d\eta_{1n}}{dx} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \eta_{n1} & \eta_{n2} & \cdots & \frac{d\eta_{nn}}{dx} \end{vmatrix},$$

also, wenn wir für die Derivierten $\frac{d\eta_{i\varkappa}}{dx}$ ihre Werte aus (6) einsetzen,

$$\frac{d|\eta_{i\varkappa}|}{dx} = (a_{11} + \cdots + a_{nn})|\eta_{i\varkappa}|;$$

hieraus ergibt sich aber

$$|\eta_{i\varkappa}| = C \cdot e^{\int_p^x (a_{11} + \cdots + a_{nn})dx},$$

wo $C$ eine Integrationskonstante bedeutet, die sich, indem man für $x$ den Spezialwert $p$ einsetzt, gleich Eins ergibt.

Wir haben also

$$(8) \qquad |\eta_{i\varkappa}| = e^{\int_p^x (a_{11} + \cdots + a_{nn})dx},$$

und aus dieser von Jacobi*) herrührenden Gleichung geht ohne weiteres hervor, daß die Determinante $|\eta_{i\varkappa}|$ einen von Null verschiedenen Wert besitzt, solange die Funktion $a_{11} + \cdots + a_{nn}$ endlich und stetig ist, also jedenfalls in dem Stetigkeitsintervalle $(p \ldots q)$.

Auf Grund dieser Bemerkung können wir für jeden Wert von $x$, der dem Intervalle $(p \ldots q)$ angehört, zu der Matrix $(\eta_{i\varkappa})$ die inverse Matrix bilden. Schreiben wir die Gleichungen (6) in der Form einer Kompositionsgleichung

*) Jacobis Werke, Bd. IV, S. 403.

$$(9) \qquad \left(\frac{d\eta_{i\varkappa}(x)}{dx}\right) = (\eta_{i\varkappa}(x))(a_{i\varkappa}(x)),$$

so ist folglich, indem wir beiderseits mit $(\eta_{i\varkappa}(x))^{-1}$ von links her komponieren,

$$(10) \qquad (a_{i\varkappa}(x)) = (\eta_{i\varkappa}(x))^{-1}\left(\frac{d\eta_{i\varkappa}(x)}{dx}\right);$$

wir haben demnach die Koeffizienten unseres Differentialsystems durch die $n$ Lösungssysteme $\eta_{i\varkappa}$ und ihre Derivierten dargestellt.

Dieses Ergebnis zeigt, daß die Matrix $(\eta_{i\varkappa})$ in gewissem Sinne den gesamten Inhalt des Differentialsystems (B) erschöpft. Diese Tatsache wird auch durch den folgenden Satz in Evidenz gesetzt.

Bedeutet $(v_{i\varkappa})$ eine Matrix, von der jede Zeile ein Lösungssystem des Differentialsystems darstellt, so ist

$$(11) \qquad (v_{i\varkappa}) = (c_{i\varkappa})(\eta_{i\varkappa}),$$

wo $(c_{i\varkappa})$ eine konstante Matrix*) ist.

Zum Beweise dieses Satzes denken wir uns die Matrix $(c_{i\varkappa})$ durch die Gleichung (11) definiert, was mit Rücksicht darauf, daß die Determinante $|\eta_{i\varkappa}|$ in dem Intervalle $(p \ldots q)$ nicht verschwindet, durch die Formel

$$(c_{i\varkappa}) = (v_{i\varkappa})(\eta_{i\varkappa})^{-1}$$

auf eindeutige Weise geleistet wird. Durch Differentiation folgt aus (11)

$$\left(\frac{dv_{i\varkappa}}{dx}\right) = \left(\frac{dc_{i\varkappa}}{dx}\right)(\eta_{i\varkappa}) + (c_{i\varkappa})\left(\frac{d\eta_{i\varkappa}}{dx}\right),$$

und da nach Voraussetzung

$$\left(\frac{dv_{i\varkappa}}{dx}\right) = (v_{i\varkappa})(a_{i\varkappa}),$$

$$\left(\frac{d\eta_{i\varkappa}}{dx}\right) = (\eta_{i\varkappa})(a_{i\varkappa})$$

ist, so haben wir weiter:

$$(v_{i\varkappa})(a_{i\varkappa}) = \left(\frac{dc_{i\varkappa}}{dx}\right)(\eta_{i\varkappa}) + (c_{i\varkappa})(\eta_{i\varkappa})(a_{i\varkappa}),$$

also mit Rücksicht auf (11)

$$\left(\frac{dc_{i\varkappa}}{dx}\right)(\eta_{i\varkappa}) = (0),$$

---

*) D. h. eine Matrix, deren sämtliche $n^2$ Elemente Konstanten sind.

und, da $|\eta_{i\varkappa}| \neq 0$ ist,

$$\frac{dc_{i\varkappa}}{dx} = 0; \qquad (i, \varkappa = 1, 2, \cdots, n)$$

die $c_{i\varkappa}$ sind also in der Tat Konstanten.

Umgekehrt liefert die linksseitige Komposition von $(\eta_{i\varkappa})$ mit einer willkürlichen konstanten Matrix $(\gamma_{i\varkappa})$ offenbar eine Matrix, für die jede Zeile ein Lösungssystem des Differentialsystems (B) darstellt. — Daraus folgt zunächst, wenn wir alle Zeilen der Matrix $(v_{i\varkappa})$ miteinander gleich annehmen:

Das allgemeinste Lösungssystem des Differentialsystems (B) wird durch die Ausdrücke

$$\begin{gathered} c_1\eta_{11} + c_2\eta_{21} + \cdots + c_n\eta_{n1}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ c_1\eta_{1n} + c_2\eta_{2n} + \cdots + c_n\eta_{nn} \end{gathered}$$

gegeben, wo die $c_1, \ldots, c_n$ willkürliche (Integrations-)Konstanten bedeuten.

Wir sagen von $n$ Lösungssystemen

$$y_{i1}, \cdots, y_{in} \qquad (i = 1, 2, \cdots, n)$$

unseres Differentialsystems, daß sie eine Integralmatrix bilden, wenn die Determinante

$$\underset{(i, \varkappa = 1, 2, \cdots, n)}{|y_{i\varkappa}|}$$

wenigstens für einen Wert von $x$ einen von Null verschiedenen Wert besitzt. — Da in diesem Falle

$$(y_{i\varkappa}) = (c_{i\varkappa})(\eta_{i\varkappa})$$

sein muß, wo $(c_{i\varkappa})$ eine konstante Matrix bedeutet, so folgt, daß die Determinante $|c_{i\varkappa}|$ nicht verschwindet, und damit ist gezeigt, daß die Determinante der Integralmatrix $(y_{i\varkappa})$ in dem ganzen Stetigkeitsintervalle $(p \ldots q)$ der Koeffizienten $a_{i\varkappa}$ von Null verschieden ist. Offenbar ist nach (8)

$$(12) \qquad |y_{i\varkappa}| = |c_{i\varkappa}| \cdot e^{\int_p^x (a_{11} + \cdots + a_{nn})\, dx}.$$

Die $c_{i\varkappa}$ sind, wie man sofort erkennt, nichts anderes als die Werte der $y_{i\varkappa}$ im Punkte $x = p$; wenn wir also in der Gleichung (5)

$$y_{i\varkappa}^{(0)} = c_{i\varkappa}$$

nehmen, so sind die $y_{i\varkappa}$ durch die Gleichungen

$$y_{i\varkappa} = \lim_m y_{i\varkappa}^{(m)}$$

gegeben. Wir können folglich jede Integralmatrix durch das Interpolationsverfahren erzeugen.

Die Definition einer Integralmatrix kann auch so gefaßt werden, daß die $n$ Lösungssysteme $y_{i1}, \ldots, y_{in}$ dann und nur dann eine Integralmatrix konstituieren, wenn zwischen ihren Elementen keine homogene lineare Relation mit konstanten Koeffizienten

(13) $$c_1 y_{1\varkappa} + c_2 y_{2\varkappa} + \cdots + c_n y_{n\varkappa} = 0 \qquad (\varkappa = 1, 2, \cdots, n)$$

besteht, d. h. wenn aus dem Bestehen der Gleichungen (13) und der Tatsache, daß die $c_1, \ldots, c_n$ von $x$ unabhängig sind, mit Notwendigkeit folgt, daß $c_1 = \cdots = c_n = 0$ ist. In der Tat ist zuvörderst evident, daß, wenn die $y_{i\varkappa}$ eine Integralmatrix konstituieren, d. h. wenn $|y_{i\varkappa}| \neq 0$ ist, aus dem Bestehen der Gleichungen (13)

$$c_1 = \cdots = c_n = 0$$

folgt. Wir haben also nur noch zu zeigen, daß das Verschwinden der Determinante $|y_{i\varkappa}|$ das Bestehen von Relationen der Form (13) mit konstanten und nicht sämtlich verschwindenden $c_1, \ldots, c_n$ nach sich zieht. Zu dem Ende denken wir uns die Relationen (13) angesetzt. Dann folgt aus der Theorie der linearen Gleichungen, daß Systeme von nicht sämtlich verschwindenden $c_1, \ldots, c_n$ vorhanden sind, für die jene Gleichungen gelten; es handelt sich also nur darum, zu zeigen, daß diese $c_1, \ldots, c_n$ als von $x$ unabhängige Größen gewählt werden können. Durch Differentiation der Gleichungen (13) folgt:

$$c_1 \frac{dy_{1\varkappa}}{dx} + \cdots + c_n \frac{dy_{n\varkappa}}{dx} + \frac{dc_1}{dx} y_{1\varkappa} + \cdots + \frac{dc_n}{dx} y_{n\varkappa} = 0,$$

also mit Rücksicht auf die Tatsache, daß die $y_{i\varkappa}$ dem Differentialsysteme (B) Genüge leisten:

$$\sum_{i=1}^{n} c_i \sum_{\lambda=1}^{n} y_{i\lambda} a_{\lambda\varkappa} + \sum_{i=1}^{n} \frac{dc_i}{dx} y_{i\varkappa} = 0,$$

d. h. aber zufolge der Gleichungen (13)

(14) $$\sum_{i=1}^{n} \frac{dc_i}{dx} y_{i\varkappa} = 0.$$

Wenn also die $c_1, \ldots, c_n$ ein Lösungssystem der Gleichungen (13) bilden, so gilt das gleiche für ihre Derivierten $\frac{dc_1}{dx}, \cdots, \frac{dc_n}{dx}$. Es möge

nun von den Subdeterminanten $(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung der Determinante $|y_{i\varkappa}|$ wenigstens eine von Null verschieden sein; dann folgt aus dem gleichzeitigen Bestehen der Gleichungen (13) und (14), daß

$$\frac{dc_1}{c_1} = \cdots = \frac{dc_n}{c_n},$$

so daß die Verhältnisse der $c_1, \ldots, c_n$ sich von $x$ unabhängig erweisen. Sind allgemein in der Determinante $|y_{i\varkappa}|$ noch alle Subdeterminanten der Ordnung $n-r+1$ gleich Null, von den Subdeterminanten $(n-r)^{\text{ter}}$ Ordnung jedoch mindestens eine von Null verschieden, ist also, wie man zu sagen pflegt, die Matrix $(y_{i\varkappa})$ vom Range $n-r$, so folgt ebenso die Existenz von genau $r$ voneinander unabhängigen linearen Beziehungen der Form (13) mit konstanten und nicht sämtlich verschwindenden $c_1, \ldots, c_n$.

Ähnlich den Gleichungen (9), (10) für die Integralmatrix

$$(\eta_{i\varkappa}) = \widehat{\int_p^x}(a_{i\varkappa}\,dx + \delta_{i\varkappa}),$$

bestehen für jede beliebige Integralmatrix

$$(y_{i\varkappa}) = (c_{i\varkappa})(\eta_{i\varkappa})$$

die Gleichungen

$$(15)\qquad \left(\frac{dy_{i\varkappa}}{dx}\right) = (y_{i\varkappa})(a_{i\varkappa}),$$

$$(16)\qquad (a_{i\varkappa}) = (y_{i\varkappa})^{-1}\left(\frac{dy_{i\varkappa}}{dx}\right).$$

Wir bezeichnen nun — analog dem Zeichen für das unbestimmte Integral der gewöhnlichen Integralrechnung — die willkürliche oder allgemeine Integralmatrix $(y_{i\varkappa})$ mit

$$(17)\qquad (y_{i\varkappa}) = \widehat{\int}(a_{i\varkappa}\,dx + \delta_{i\varkappa}),$$

so daß

$$(18)\qquad \widehat{\int}(a_{i\varkappa}\,dx + \delta_{i\varkappa}) = (c_{i\varkappa})\widehat{\int_p^x}(a_{i\varkappa}\,dx + \delta_{i\varkappa})$$

ist, wo $(c_{i\varkappa})$ eine willkürliche konstante Matrix mit nicht verschwindender Determinante bedeutet. Ferner führen wir für die Operation, durch die nach (16) die Koeffizientenmatrix $(a_{i\varkappa})$ aus der Integralmatrix $(y_{i\varkappa})$

hervorgeht, ein dem Derivationszeichen der gewöhnlichen Infinitesimalrechnung analoges Symbol ein, indem wir

(19) $$(y_{ix})^{-1}\left(\frac{dy_{ix}}{dx}\right) = D_x(y_{ix})$$

setzen (zu lesen: derivierte Matrix in bezug auf $x$).*) Dieses Symbol kann für irgendeine Matrix differentiierbarer Funktionen mit nicht verschwindender Determinante $(y_{ix}(x))$ definiert werden. Wir erhalten also auf diese Weise einen Infinitesimalkalkül der Matrizen von $n^2$ Funktionen**), der durch seine Analogie mit dem gewöhnlichen Infinitesimalkalkül ein heuristisches Hilfsmittel von nicht zu unterschätzender Bedeutung für die Theorie der linearen Differentialgleichungen liefert. Wir wollen nun zuvörderst die wichtigsten Rechnungsregeln zusammenstellen, die sich für die beiden eingeführten Symbole aus den bisherigen Untersuchungen ergeben.

## I. Derivationsregeln.

Bedeutet $(y_{ix})$ eine Matrix differentiierbarer Funktionen mit nicht verschwindender Determinante und ist

(20) $$D_x(y_{ix}) = (y_{ix})^{-1}\left(\frac{dy_{ix}}{dx}\right) = (a_{ix}),$$

so hat man, wenn die Differentiale $dx$, $dy_k$ in üblicher Weise verstanden werden,

(I) $$(y_{ix})^{-1}(dy_{ix} + y_{ix}) = (a_{ix}dx + \delta_{ix})\cdot$$

Bedeutet $(\alpha_{ix})$ eine konstante Matrix mit nicht verschwindender Determinante, so ist

(II) $$D_x(\alpha_{ix})(y_{ix}) = D_x(y_{ix}),$$

(III) $$D_x(\alpha_{ix}) = (0)\cdot$$

Es sei $(p_{ix})$ eine Matrix differentiierbarer Funktionen mit nicht verschwindender Determinante, dann folgt aus der Definition des Derivationszeichens $D_x$ die Formel

(IV) $$D_x[(y_{ix})(p_{ix})] = (p_{ix})^{-1}\cdot D_x(y_{ix})\cdot(p_{ix}) + D_x(p_{ix})$$

*) Für $n = 1$ entspricht dieses Zeichen der logarithmischen Derivierten einer Funktion $y$,

$$\frac{d\log y}{dx}.$$

**) Einen solchen Kalkül hat zuerst V. Volterra in den Memorie della Società Italiana delle Scienze (detta dei XL), 1889, 1899 aufgestellt.

und für die konstante Matrix $(\alpha_{i\varkappa})$ insbesondere

$$\text{(V)} \qquad D_x[(y_{i\varkappa})(\alpha_{i\varkappa})] = (\alpha_{i\varkappa})^{-1} \cdot D_x(y_{i\varkappa}) \cdot (\alpha_{i\varkappa}).$$

Zu einer wichtigen Formel führt die Betrachtung der zu $(y_{i\varkappa})$ inversen Matrix

$$(y_{i\varkappa})^{-1} = (Y_{i\varkappa}).$$

Es ist zufolge der Definition der inversen Matrix

$$\text{(21)} \qquad \sum_{\nu=1}^{n} Y_{\varkappa\nu} y_{\nu\lambda} = \delta_{\varkappa\lambda}. \qquad (\varkappa, \lambda = 1, 2, \cdots, n)$$

Durch Differentiation nach $x$ folgt

$$\sum_{\nu=1}^{n} Y_{\varkappa\nu} \frac{dy_{\nu\lambda}}{dx} + \sum_{\nu=1}^{n} \frac{dY_{\varkappa\nu}}{dx} y_{\nu\lambda} = 0,$$

also, wenn wir beachten, daß

$$\frac{dy_{\nu\lambda}}{dx} = \sum_{\mu=1}^{n} y_{\nu\mu} a_{\mu\lambda}$$

ist,

$$\sum_{\nu=1}^{n} \sum_{\mu=1}^{n} Y_{\varkappa\nu} y_{\nu\mu} a_{\mu\lambda} = -\sum_{\nu=1}^{n} \frac{dY_{\varkappa\nu}}{dx} y_{\nu\lambda}$$

und mit Rücksicht auf (21)

$$a_{\varkappa\lambda} = -\sum_{\nu=1}^{n} \frac{dY_{\varkappa\nu}}{dx} y_{\nu\lambda},$$

d. h. in anderen Zeichen:

$$(a_{\varkappa\lambda}) = -\left(\frac{dY_{\varkappa\lambda}}{dx}\right)(y_{\varkappa\lambda})$$

oder

$$\text{(22)} \qquad (a_{\varkappa\lambda})(y_{\varkappa\lambda})^{-1} = (a_{\varkappa\lambda})(Y_{\varkappa\lambda}) = -\left(\frac{dY_{\varkappa\lambda}}{dx}\right).$$

Setzen wir also

$$\text{(23)} \qquad \begin{cases} Y_{\varkappa\lambda} = z_{\lambda\varkappa}, \\ a_{\varkappa\lambda} = -b_{\lambda\varkappa}, \end{cases}$$

so haben wir nach (22)

$$\frac{dz_{\lambda\varkappa}}{dx} = -\sum_{\nu=1}^{n} a_{\varkappa\nu} Y_{\nu\lambda} = \sum_{\nu=1}^{n} z_{\lambda\nu} b_{\nu\varkappa},$$

d. h. es ist

$$D_x(z_{i\varkappa}) = (b_{i\varkappa}).$$

Während also $(y_{i\varkappa})$ eine Integralmatrix des Differentialsystems

$$(\alpha) \qquad \frac{dy_\varkappa}{dx} = \sum_{\lambda=1}^{n} y_\lambda a_{\lambda\varkappa}$$

darstellt, bildet $(z_{i\varkappa})$ eine Integralmatrix des Differentialsystems

$$(\beta) \qquad \frac{dz_\varkappa}{dx} = \sum_{\lambda=1}^{n} z_\lambda b_{\lambda\varkappa}.$$

Dabei ist im Sinne von (23) die Koeffizientenmatrix von $(\beta)$ aus der Koeffizientenmatrix von $(\alpha)$ durch Multiplikation mit $-1$ und Transposition*) entstanden, während die Integralmatrix $(z_{i\varkappa})$ von $(\beta)$ die transponierte der inversen der Integralmatrix $(y_{i\varkappa})$ von $(\alpha)$ ist. Offenbar ist die Beziehung zwischen $(a_{i\varkappa})$, $(b_{i\varkappa})$ einerseits, sowohl wie die zwischen $(y_{i\varkappa})$, $(z_{i\varkappa})$ andrerseits eine gegenseitige. Man nennt die Differentialsysteme $(\alpha)$, $(\beta)$ und ebenso auch die Integralmatrizen $(y_{i\varkappa})$, $(z_{i\varkappa})$ einander adjungiert. Wir werden auf die Theorie der adjungierten Systeme noch zurückzukommen haben; fürs erste merken wir die aus (22) folgende Derivationsformel an:

$$\text{(VI)} \qquad D_x(y_{i\varkappa})^{-1} = -(y_{i\varkappa}) \cdot D_x(y_{i\varkappa}) \cdot (y_{i\varkappa})^{-1},$$

die sich übrigens auch aus (IV) ergibt, indem man $(p_{i\varkappa}) = (y_{i\varkappa})^{-1}$ setzt.

## II. Integrationsregeln.

Es bedeute $(a_{i\varkappa})$ eine Matrix eindeutiger, endlicher und stetiger Funktionen. Es sei

$$(\eta_{i\varkappa}) = \overset{x}{\underset{p}{\widehat{\int}}} (a_{i\varkappa} dx + \delta_{i\varkappa}), \qquad p < x < q.$$

Dann folgt zunächst aus der Definition des Integrationssymbols, daß, wenn $r$, $s$ zwei Größen bedeuten, für die

$$p < r < s < q$$

ist, die Gleichung besteht:

$$\text{(VII)} \qquad \overset{s}{\underset{p}{\widehat{\int}}} (a_{i\varkappa} dx + \delta_{i\varkappa}) = \overset{r}{\underset{p}{\widehat{\int}}} (a_{i\varkappa} dx + \delta_{i\varkappa}) \cdot \overset{s}{\underset{r}{\widehat{\int}}} (a_{i\varkappa} dx + \delta_{i\varkappa}).$$

*) D. h. Vertauschung der beiden Indizes, oder Vertauschung von Zeilen und Kolonnen.

Bedeutet $(y_{ix})$ eine Matrix differentiierbarer Funktionen mit nicht verschwindender Determinante, für die

$$D_x(y_{ix}) = (a_{ix})$$

ist, so folgt aus den Erörterungen dieser Vorlesung, daß

$$(24) \qquad (y_{ix}) = (c_{ix})(\eta_{ix})$$

ist, wo $(c_{ix})$ eine konstante Matrix nichtverschwindender Determinante bedeutet. Dieser Satz kann als der **Fundamentalsatz des Kalküls der Integralmatrizen** bezeichnet werden. Eine unmittelbare Folge dieses Satzes ist, daß **eine Integralmatrix des Differentialsystems (B) durch die Matrix ihrer Anfangswerte eindeutig bestimmt wird.**

Als einfachen speziellen Fall merken wir die Formel an:

$$(\text{VIII}) \qquad \widehat{\int_p^x}(0\,dx + \delta_{ix}) = (\delta_{ix}).$$

Wir betrachten nun eine Integralmatrix, deren untere Grenze $r$ größer ist als die obere Grenze $p$, und definieren:

$$(25) \qquad \widehat{\int_r^p}(a_{ix}dx + \delta_{ix}) = \lim_m \prod_{\nu = m,\, m-1,\, \cdots,\, 1} (a_{ix}(\xi_{\nu-1})(x_{\nu-1} - x_\nu) + \delta_{ix}),$$

wo die Reihenfolge der Zahlenwerte von $\nu$ am Fuße des Produktzeichens die Reihenfolge der Faktoren des symbolischen Produktes anzeigt, und im übrigen die in der ersten Vorlesung benutzten Bezeichnungen beibehalten worden sind. — Setzen wir

$$(\eta_{ix})^{-1} = (Y_{ix}),$$

so ist nach Gleichung (22)

$$\left(\frac{dY_{ix}}{dx}\right) = -(a_{ix})(Y_{ix});$$

indem wir auf diese Gleichung das Interpolationsverfahren anwenden, erhalten wir

$$Y_{ix}^{(\nu)} - Y_{ix}^{(\nu-1)} = (x_\nu - x_{\nu-1}) \sum_{\lambda=1}^{n} - a_{i\lambda}(\xi_{\nu-1})\, Y_{\lambda x}^{(\nu-1)},$$

wo

$$(Y_{ix}^{(0)}) = (\eta_{ix}^{(0)})^{-1} = (\delta_{ix})$$

zu nehmen ist. Wir haben demnach

$$(Y_{ix}^{(\nu)}) = (a_{ix}(\xi_{\nu-1})(x_{\nu-1} - x_\nu) + \delta_{ix})(Y_{ix}^{(\nu-1)}),$$

also

$$(Y_{ix}^{(m)}) = \prod_{\nu=m, m-1, \cdots, 1} (a_{ix}(\xi_{\nu-1})(x_{\nu-1} - x_\nu) + \delta_{ix}).$$

Nun ist aber

$$\lim_m Y_{ix}^{(m)} = Y_{ix}(r),$$

d. h. gleich dem Werte der Funktion $Y_{ik}$ im Punkte $x = r$, also finden wir, da

$$(Y_{ix}(r)) = (\eta_{ix}(r))^{-1} = \left(\int\limits_p^{\frown r} (a_{ix}dx + \delta_{ix})\right)^{-1}$$

ist, aus der Definitionsgleichung (25) die wichtige Formel

$$\text{(IX)} \qquad \int\limits_r^{\frown p} (a_{ix}dx + \delta_{ix}) = \left(\int\limits_p^{\frown r} (a_{ix}dx + \delta_{ix})\right)^{-1}.$$

Wir bemerken, daß diese Formel auch direkt aus der Definition der Integralmatrizen bewiesen werden kann, so daß für die Gültigkeit von (IX) — ebenso wie für die Gültigkeit von (VII) — das Verschwinden des Grenzwertes der Gesamtschwankung von $(a_{ix})$ hinreichend ist.

Aus (IX) folgt, daß die Formel (VII) auch dann gültig bleibt, wenn $p$, $r$, $s$ irgendwelche Punkte des Stetigkeitsintervalles der Funktionen $a_{ix}$ bedeuten.

Für die Matrix $(y_{ix})$ folgt, indem wir in (24) für $x$ den Wert $p$ einsetzen,

$$(y_{ix}(p)) = (c_{ix}),$$

und indem wir jetzt in derselben Gleichung (24) für $x$ den Wert $r$ setzen, finden wir die Formel:

$$\text{(X)} \qquad \int\limits_p^{\frown r} (a_{ix}dx + \delta_{ix}) = (y_{ix}(p))^{-1}(y_{ix}(r)).$$

Bedeutet endlich $(b_{ix})$ eine Matrix differentiierbarer Funktionen mit nicht verschwindender Determinante, so ist nach der Derivationsformel (IV)

$$D_x[(y_{ix})(b_{ix})] = (b_{ix})^{-1} D_x(y_{ix}) \cdot (b_{ix}) + D_x(b_{ix}),$$

also folgt aus (X)

$$\int\limits_p^{r\frown} [((b_{ix})^{-1} D_x(y_{ix}) \cdot (b_{ix}) + D_x(b_{ix}))\,dx + \delta_{ix}] = (b_{ix}(p))^{-1}(y_{ix}(p))^{-1}(y_{ix}(r))(b_{ix}(r)).$$

Setzen wir

$$(q_{ix}) = (b_{ix})^{-1} D_x(y_{ix}) \cdot (b_{ix}),$$

so ist

$$D_x(y_{ix}) = (b_{ix})(q_{ix})(b_{ix})^{-1};$$

wir finden also die Formel

$$\text{(XI)} \qquad \int\limits_p^{r\frown} [((q_{ix}) + D_x(b_{ix}))\,dx + \delta_{ix}]$$

$$= (b_{ix}(p))^{-1} \int\limits_p^{r\frown} [(b_{ix})(q_{ix})(b_{ix})^{-1}\,dx + \delta_{ix}] \cdot (b_{ix}(r)),$$

die in gewissem Sinne der partiellen Integrationsformel der gewöhnlichen Integralrechnung an die Seite zu stellen ist.

---

# Dritte Vorlesung.

**Multiplikatoren. Weiteres über adjungierte Systeme. Integration der kompletten Systeme. Methode der sukzessiven Approximationen. Neuer Existenzbeweis und Darstellung für eine Integralmatrix. Kurze Bemerkung über den Fall einer komplexen Variabeln.**

Wir haben in der vorigen Vorlesung bei Gelegenheit der Derivationsformel für die Inverse einer gegebenen Matrix das adjungierte Differentialsystem definiert. Um einige weitere Eigenschaften adjungierter Differentialsysteme herzuleiten, Eigenschaften, deren wir für unsere folgenden Untersuchungen bedürfen, wollen wir das adjungierte System durch eine Fragestellung zu gewinnen suchen, die in der historischen Entwicklung zur Auffindung dieses Systems geführt hat.

Wir schreiben das homogene lineare Differentialsystem

$$\text{(B)} \qquad \frac{dy_\varkappa}{dx} = \sum_{\lambda=1}^{n} y_\lambda a_{\lambda\varkappa} \qquad (\varkappa = 1, 2, \cdots, n)$$

in der Form

$$\text{(1)} \qquad dy_\varkappa - dx \sum_{\lambda=1}^{n} y_\lambda a_{\lambda\varkappa} = 0,$$

und fragen, nach dem Vorgange von Lagrange und Jacobi, ob sich ein System von $n$ Funktionen $\mu_1, \ldots, \mu_n$ so angeben läßt, daß der Ausdruck

$$\text{(2)} \qquad \sum_{\varkappa=1}^{n} \mu_\varkappa \left( dy_\varkappa - dx \sum_{\lambda=1}^{n} y_\lambda a_{\lambda\varkappa} \right) = dZ$$

wird, wo $Z$ eine Funktion von $x, y_1, \ldots, y_n$ bedeutet. Falls solche Funktionen existieren, so werden sie als Multiplikatoren zu bezeichnen sein, ähnlich, wie man für einen Differentialausdruck von der Form $Pdx + Qdy$ eine Funktion $M$ einen Multiplikator nennt (Euler), wenn $M(Pdx + Qdy)$ gleich dem totalen Differential einer Funktion von $x$ und $y$ wird.

Wenn die Gleichung (2) besteht, so kann der Ausdruck

$$(3)\quad \int \sum_{\varkappa=1}^{n} \mu_\varkappa \left( dy_\varkappa - dx \sum_{\lambda=1}^{n} y_\lambda a_{\lambda\varkappa} \right) = \sum_{\varkappa=1}^{n} \int \mu_\varkappa \left( dy_\varkappa - dx \sum_{\lambda=1}^{n} y_\lambda a_{\lambda\varkappa} \right)$$

durch partielle Integration umgeformt werden. Es ist nämlich

$$\int \mu_\varkappa dy_\varkappa = \mu_\varkappa y_\varkappa - \int y_\varkappa d\mu_\varkappa ,$$

der Ausdruck (3) wird also

$$\int \sum_{\varkappa=1}^{n} \mu_\varkappa \left( dy_\varkappa - dx \sum_{\lambda=1}^{n} y_\lambda a_{\lambda\varkappa} \right)$$
$$= \sum_{\varkappa=1}^{n} \left[ \mu_\varkappa y_\varkappa - \int \left( y_\varkappa d\mu_\varkappa + \mu_\varkappa dx \sum_{\lambda=1}^{n} y_\lambda a_{\lambda\varkappa} \right) \right]$$
$$= \sum_{\varkappa=1}^{n} \mu_\varkappa y_\varkappa - \int \left( \sum_{\varkappa=1}^{n} y_\varkappa d\mu_\varkappa + dx \sum_{\varkappa=1}^{n} \sum_{\lambda=1}^{n} \mu_\varkappa y_\lambda a_{\lambda\varkappa} \right).$$

Vertauschen wir in der Doppelsumme rechter Hand die Summationsindizes $\varkappa$, $\lambda$ miteinander, so haben wir

$$\int \sum_{\varkappa=1}^{n} \mu_\varkappa \left( dy_\varkappa - dx \sum_{\lambda=1}^{n} y_\lambda a_{\lambda\varkappa} \right)$$
$$= \sum_{\varkappa=1}^{n} \mu_\varkappa y_\varkappa - \int \sum_{\varkappa=1}^{n} y_\varkappa \left( d\mu_\varkappa + dx \sum_{\lambda=1}^{n} a_{\varkappa\lambda} \mu_\lambda \right),$$

und hieraus folgt durch Differentiation die Gleichung:

$$(4)\quad \sum_{\varkappa=1}^{n} \left[ \mu_\varkappa \left( dy_\varkappa - dx \sum_{\lambda=1}^{n} y_\lambda a_{\lambda\varkappa} \right) + y_\varkappa \left( d\mu_\varkappa + dx \sum_{\lambda=1}^{n} a_{\varkappa\lambda} \mu_\lambda \right) \right]$$
$$= d \sum_{\varkappa=1}^{n} \mu_\varkappa y_\varkappa ,$$

die wir als **Identität von Lagrange** bezeichnen wollen.

Wenn wir die Funktionen $\mu_\varkappa$ so wählen, daß

$$(5)\quad d\mu_\varkappa + dx \sum_{\lambda=1}^{n} a_{\varkappa\lambda} \mu_\lambda = 0$$

ist, so haben wir nach (4)

$$\sum_{\varkappa=1}^{n} \mu_\varkappa \left( dy_\varkappa - dx \sum_{\lambda=1}^{n} y_\lambda a_{\lambda\varkappa} \right) = d \sum_{\varkappa=1}^{n} \mu_\varkappa y_\varkappa ;$$

die so gewählten $\mu_\varkappa$ sind demnach Multiplikatoren, indem die Gleichung (2) für

$$Z = \sum_{\varkappa=1}^{n} \mu_\varkappa y_\varkappa$$

erfüllt wird. Die Gleichungen (5) besagen aber nichts anderes, als daß $\mu_1, \ldots, \mu_n$ ein Lösungssystem des zu (B) adjungierten Differentialsystems

$$(\bar{\text{B}}) \qquad \frac{dz_\varkappa}{dx} = - \sum_{\lambda=1}^{n} a_{\varkappa\lambda} z_\lambda \qquad (\varkappa = 1, 2, \cdots, n)$$

(vgl. ($\beta$) der vorigen Vorlesung, wo

$$- a_{\varkappa\lambda} = b_{\lambda\varkappa}$$

gesetzt wurde) bilden. Die Existenz eines Systems von Multiplikatoren für das Differentialsystem kann also als erwiesen gelten. Auch folgt aus der Identität von **Lagrange** ohne weiteres, daß ein Lösungssystem von (B) auch umgekehrt ein System von Multiplikatoren für das System ($\bar{\text{B}}$) liefert; überhaupt läßt der in bezug auf (B) und ($\bar{\text{B}}$) völlig symmetrische Bau der Identität (4) die Gegenseitigkeit in der Beziehung zwischen adjungierten Differentialsystemen hervortreten.

Das Differentialsystem (B) ist dann und nur dann mit seinem adjungierten Systeme identisch, wenn die Koeffizientenmatrix $(a_{\iota\varkappa})$ die Eigenschaft

$$a_{\iota\varkappa} = - a_{\varkappa\iota}$$

besitzt. Solche **sich selbst adjungierte Systeme** spielen namentlich in der Variationsrechnung eine Rolle.

Es sei $(y_{\iota\varkappa})$ eine Integralmatrix von (B), und

$$(y_{\iota\varkappa})^{-1} = (Y_{\iota\varkappa});$$

dann ist, wie wir in der zweiten Vorlesung gezeigt haben, die transponierte Matrix von $(Y_{\iota\varkappa})$, d. h. also die Matrix $(z_{\iota\varkappa})$, wo

$$z_{\iota\varkappa} = Y_{\varkappa\iota},$$

eine Integralmatrix von ($\bar{\text{B}}$). Setzen wir

$$(z_{\iota\varkappa})^{-1} = (Z_{\iota\varkappa}),$$

so haben wir

$$(6)\qquad \begin{cases} \sum_{\lambda=1}^{n} y_{i\lambda} Y_{\lambda\varkappa} = \sum_{\lambda=1}^{n} y_{i\lambda} z_{\varkappa\lambda} = \delta_{i\varkappa}, \\ \sum_{\lambda=1}^{n} z_{i\lambda} Z_{\lambda\varkappa} = \delta_{i\varkappa}. \end{cases}$$

Aus diesen beiden Gleichungssystemen folgt ohne weiteres, daß

$$Z_{i\varkappa} = y_{\varkappa i}$$

d. h. also, daß auch $(y_{i\varkappa})$ aus der inversen Matrix von $(z_{i\varkappa})$ durch Transposition hervorgeht. Den Relationen (6) stellen wir (vgl. die Gl. (21) der zweiten Vorlesung) noch die folgenden zur Seite:

$$(7)\qquad \sum_{\lambda=1}^{n} z_{\lambda i} y_{\lambda\varkappa} = \delta_{i\varkappa},$$

$$(7\text{a})\qquad \sum_{\lambda=1}^{n} y_{\lambda i} z_{\lambda\varkappa} = \delta_{i\varkappa}.$$

Setzen wir in der Identität von **Lagrange** $z_{i\varkappa}$ an die Stelle von $\mu_\varkappa$, so folgt:

$$\sum_{\varkappa=1}^{n} z_{i\varkappa}\left(dy_\varkappa - dx \sum_{\lambda=1}^{n} y_\lambda a_{\lambda\varkappa}\right) = d \sum_{\varkappa=1}^{n} y_\varkappa z_{i\varkappa},$$

also durch Integration

$$\sum_{\varkappa=1}^{n} y_\varkappa z_{i\varkappa} = \int \sum_{\varkappa=1}^{n} z_{i\varkappa}\left(dy_\varkappa - dx \sum_{\lambda=1}^{n} y_\lambda a_{\lambda\varkappa}\right).$$

Multiplizieren wir diese Gleichung mit $y_{i\nu}$ und summieren dann in bezug auf $i = 1, 2, \ldots, n$, so kommt

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{\varkappa=1}^{n} y_\varkappa y_{i\nu} z_{i\varkappa} = \sum_{i=1}^{n} y_{i\nu} \int \sum_{\varkappa=1}^{n} z_{i\varkappa}\left(dy_\varkappa - dx \sum_{\lambda=1}^{n} y_\lambda a_{\lambda\varkappa}\right),$$

also mit Rücksicht auf (7)

$$(8)\qquad \sum_{\varkappa=1}^{n} y_\varkappa \delta_{\nu\varkappa} = y_\nu = \sum_{i=1}^{n} y_{i\nu} \int \sum_{\varkappa=1}^{n} z_{i\varkappa}\left(dy_\varkappa - dx \sum_{\lambda=1}^{n} y_\lambda a_{\lambda\varkappa}\right);$$

diese Gleichungen sind **Identitäten**, indem sie für jedes beliebige Funktionssystem $y_1, \ldots, y_n$ gelten.

Wir machen nun eine Anwendung dieser Identitäten auf die Integration des kompletten Differentialsystems

$$\text{(A)} \qquad \frac{du_\varkappa}{dx} = \sum_{\lambda=1}^{n} u_\lambda a_{\lambda\varkappa} + f_\varkappa(x). \qquad (\varkappa = 1, 2, \cdots, n)$$

Setzen wir nämlich in (8) für $y_1, \ldots, y_n$ ein Lösungssystem $u_1, \ldots, u_n$ des kompletten Differentialsystems (A) ein, so ergibt sich für dieses Lösungssystem die Darstellung

$$\text{(9)} \qquad u_\nu = \sum_{i=1}^{n} y_{i\nu} \int \sum_{\varkappa=1}^{n} z_{i\varkappa} f_\varkappa(x)\, dx\,; \qquad (\nu = 1, 2, \cdots, n)$$

das allgemeine Lösungssystem des kompletten Systems (A) kann also, wenn eine Integralmatrix $(y_{i\varkappa})$ des reduzierten Systems (B) bekannt ist, durch Quadraturen erhalten werden.

Wir betrachten vorläufig die $a_{i\varkappa}$ sowohl wie die $f_\varkappa(x)$ wie bisher als eindeutige, endliche und stetige Funktionen der realen Variabeln $x$ in dem Intervalle $(p \ldots q)$. Bedeutet dann $x_0$ irgendeinen festen Punkt dieses Intervalles und $x$ einen veränderlichen Punkt desselben Intervalles, so hat das Lösungssystem

$$\text{(9a)} \qquad u_\nu = \sum_{i=1}^{n} y_{i\nu} \int_{x_0}^{x} \sum_{\varkappa=1}^{n} z_{i\varkappa} f_\varkappa(x)\, dx$$

des kompletten Systems die Eigenschaft, daß alle $u_1, \ldots, u_n$ für $x = x_0$ verschwinden. Wir nennen dieses Lösungssystem, nach Fuchs, das zum Punkte $x = x_0$ gehörige Hauptsystem; es ist offenbar durch die betonte Eigenschaft eindeutig charakterisiert. Das allgemeine Lösungssystem von (A) kann dann in der Form

$$u_\nu + \sum_{i=1}^{n} c_i y_{i\nu} \qquad (\nu = 1, 2, \cdots, n)$$

dargestellt werden, wo die $c_1, \ldots, c_n$ willkürliche Konstanten bedeuten.

* * *

Das in der ersten Vorlesung entwickelte Interpolationsverfahren hat uns, wie in derselben Vorlesung hervorgehoben wurde, eine in dem ganzen Stetigkeitsintervalle gleichmäßig konvergente Darstellung des durch die Anfangswerte $y_1^{(0)}, \ldots, y_n^{(0)}$ im Punkte $x = p$ fixierten Lösungssystems des homogenen Differentialsystems (B) geliefert. Wir wollen jetzt ein anderes Verfahren entwickeln, das ebenfalls zu einer

solchen Darstellung führen wird und zugleich einen neuen Existenzbeweis für die Lösungen linearer Differentialsysteme liefert. Dieses Verfahren, das als das der sukzessiven Approximationen bezeichnet werden kann, wurde für den Fall einer linearen Differentialgleichung $n^{\text{ter}}$ Ordnung zuerst von Caqué (1864) und Fuchs (1870) angegeben, für ein System von $n$ linearen Differentialgleichungen erster Ordnung hat Peano (1887) eine spezielle Form dieses Verfahrens entwickelt.

Wir denken uns die Koeffizienten $a_{i\varkappa}$ des homogenen Systems (B) auf irgendeine Weise als Summen von je zwei Funktionen geschrieben:

$$a_{i\varkappa} = \alpha_{i\varkappa} + \beta_{i\varkappa}. \tag{10}$$

Die $\alpha_{i\varkappa}$ können ganz willkürlich als stetige Funktionen von $x$ gewählt werden; man wird die Wahl nur so zu treffen haben, daß für das Differentialsystem

$$\frac{d u_\varkappa^{(0)}}{dx} = \sum_{\lambda=1}^{n} u_\lambda^{(0)} \alpha_{\lambda\varkappa} \qquad (\varkappa = 1, 2, \cdots, n) \tag{11}$$

das zu gewissen Anfangswerten gehörige Lösungssystem als bekannt angesehen werden kann, oder, wenn es sich um den Existenzbeweis für die Lösungen des Differentialsystems (B) handelt, wenigstens so, daß für das System (11) die Existenz der Lösungen feststeht. Beides ist offenbar der Fall, wenn wir

$$\alpha_{i\varkappa} = 0 \qquad (i, \varkappa = 1, 2, \cdots, n)$$

wählen, ein Fall, der weiter unten noch besonders erörtert werden soll.

Es möge sich um die Darstellung — bezw. um den Nachweis der Existenz — desjenigen Lösungssystems $y_1, \ldots, y_n$ von (B) handeln, das im Punkte $x = x_0$ die Anfangswerte

$$y_1 = \eta_1, \ldots, y_n = \eta_n$$

besitzt. Dann sei $u_1^{(0)}, \ldots, u_n^{(0)}$ dasjenige Lösungssystem des Differentialsystems (11), das sich für $x = x_0$ auf dieselben Anfangswerte

$$u_1^{(0)} = \eta_1, \ldots, u_n^{(0)} = \eta_n$$

reduziert. Wir setzen dann

$$y_\varkappa = u_\varkappa^{(0)} + v_\varkappa^{(0)}, \tag{12}$$

so daß

$$\frac{d\left(u_\varkappa^{(0)} + v_\varkappa^{(0)}\right)}{dx} = \sum_{\lambda=1}^{n} (\alpha_{\lambda\varkappa} + \beta_{\lambda\varkappa})(u_\lambda^{(0)} + v_\lambda^{(0)})$$

ist. Hieraus ergibt sich für die Funktionen $v_\varkappa^{(0)}$ das Differentialsystem

$$\frac{d v_\varkappa^{(0)}}{dx} = \sum_{\lambda=1}^{n} (\alpha_{\lambda\varkappa} + \beta_{\lambda\varkappa}) v_\lambda^{(0)} + \sum_{\lambda=1}^{n} \beta_{\lambda\varkappa} u_\lambda^{(0)}. \tag{13}$$

Da die $v_1^{(0)}, \ldots, v_n^{(0)}$ im Punkte $x = x_0$ verschwinden, so bilden diese Funktionen das zum Punkte $x = x_0$ gehörige Hauptsystem des kompletten Systems (13).

Es sei nun $u_1^{(1)}, \ldots, u_n^{(1)}$ das zum Punkte $x = x_0$ gehörige Hauptsystem des kompletten Systems

$$\frac{d u_\varkappa^{(1)}}{dx} = \sum_{\lambda=1}^{n} \alpha_{\lambda\varkappa} u_\lambda^{(1)} + \sum_{\lambda=1}^{n} \beta_{\lambda\varkappa} u_\lambda^{(0)}; \tag{14}$$

wir setzen dann

$$v_\varkappa^{(0)} = u_\varkappa^{(1)} + v_\varkappa^{(1)},$$

wodurch sich für die $v_\varkappa^{(1)}, \ldots, v_\varkappa^{(n)}$ das Differentialsystem

$$\frac{d v_\varkappa^{(1)}}{dx} = \sum_{\lambda=1}^{n} (\alpha_{\lambda\varkappa} + \beta_{\lambda\varkappa}) v_\lambda^{(1)} + \sum_{\lambda=1}^{n} \beta_{\lambda\varkappa} u_\lambda^{(1)} \tag{15}$$

ergibt, und zwar konstituiert $v_\varkappa^{(1)}, \ldots, v_\varkappa^{(n)}$ offenbar das zu $x = x_0$ gehörige Hauptsystem von (15). Das so begonnene Verfahren setzen wir nun fort. Es sei

$$u_1^{(\nu)}, \ldots, u_n^{(\nu)}$$

das zu $x = x_0$ gehörige Hauptsystem des Differentialsystems

$$\frac{d u_\varkappa^{(\nu)}}{dx} = \sum_{\lambda=1}^{n} \alpha_{\lambda\varkappa} u_\lambda^{(\nu)} + \sum_{\lambda=1}^{n} \beta_{\lambda\varkappa} u_\lambda^{(\nu-1)}, \qquad (\varkappa = 1, 2, \ldots, n) \tag{16}$$

und ferner

$$v_1^{(\nu)}, \ldots, v_n^{(\nu)}$$

das zu $x = x_0$ gehörige Hauptsystem des Systems

$$\frac{d v_\varkappa^{(\nu)}}{dx} = \sum_{\lambda=1}^{n} (\alpha_{\lambda\varkappa} + \beta_{\lambda\varkappa}) v_\lambda^{(\nu)} + \sum_{\lambda=1}^{n} \beta_{\lambda\varkappa} u_\lambda^{(\nu)}, \qquad (\varkappa = 1, 2, \ldots, n) \tag{17}$$

dann ist für jeden positiven ganzzahligen Wert von $\nu$

$$y_\varkappa = u_\varkappa^{(0)} + u_\varkappa^{(1)} + \cdots + u_\varkappa^{(\nu)} + v_\varkappa^{(\nu)}. \qquad (\varkappa = 1, 2, \ldots, n) \tag{18}$$

Wir wollen nun $\nu$ ins Unendliche wachsen lassen und zuvörderst die Konvergenz der unendlichen Reihen

$$u_\varkappa^{(0)} + u_\varkappa^{(1)} + \cdots \text{ in inf.}$$

untersuchen. Zu diesem Ende müssen wir die expliziten Ausdrücke für die $u_\varkappa^{(\nu)}$ und $v_\varkappa^{(\nu)}$ herstellen, was mit Hilfe der oben abgeleiteten Formeln für die Hauptsysteme ohne Schwierigkeit geschehen kann.

Wir setzen

$$\sum_{\lambda=1}^{n} \beta_{\lambda\varkappa} u_\lambda^{(\nu-1)} = F_\varkappa^{(\nu-1)}(x). \qquad (\nu = 1, 2, 3, \ldots) \tag{19}$$

Dann bilden also die $u_\varkappa^{(\nu)}$ das zu $x = x_0$ gehörige Hauptsystem des Differentialsystems (16) oder

(16a) $$\frac{d u_\varkappa^{(\nu)}}{dx} = \sum_{\lambda=1}^{n} \alpha_{\lambda\varkappa} u_\lambda^{(\nu)} + F_\varkappa^{(\nu-1)}(x);$$

wir erhalten demnach zufolge der Formel (9a) die Darstellung

$$u_\varkappa^{(\nu)} = \sum_{i=1}^{n} u_{i\varkappa}^{(0)} \int_{x_0}^{x} \sum_{\mu=1}^{n} w_{i\mu}^{(0)} F_\mu^{(\nu-1)}(x)\,dx,$$

wenn wir mit $(u_{i\varkappa}^{(0)})$ eine Integralmatrix des homogenen Differentialsystems (11), mit $(w_{i\varkappa}^{(0)})$ die zu $(u_{i\varkappa}^{(0)})$ adjungierte Matrix bezeichnen. Setzen wir ferner

$$(u_{i\varkappa}^{(0)})^{-1} = (U_{i\varkappa}^{(0)}), \quad U_{i\varkappa}^{(0)} = w_{\varkappa i}^{(0)},$$

so ist

(20) $$u_\varkappa^{(\nu)} = \sum_{i=1}^{n} u_{i\varkappa}^{(0)} \int_{x_0}^{x} \sum_{\mu=1}^{n} U_{\mu i}^{(0)} F_\mu^{(\nu-1)}(x)\,dx.$$

Nun haben wir nach (19)

$$F_\varkappa^{(\nu)}(x) = \sum_{\lambda=1}^{n} \beta_{\lambda\varkappa} u_\lambda^{(\nu)},$$

also mit Rücksicht auf (20)

(21) $$F_\varkappa^{(\nu)}(x) = \sum_\lambda \sum_i \sum_\mu \beta_{\lambda\varkappa} u_{i\lambda}^{(0)} \int_{x_0}^{x} U_{\mu i}^{(0)} F_\mu^{(\nu-1)}(x)\,dx,$$

wo die Summationen in bezug auf $\lambda$, $i$, $\mu$ auf die Zahlwerte $1, \ldots, n$ auszudehnen sind. Die Formeln (21) dienen zur rekursiven Berechnung der $F_\varkappa^{(\nu)}(x)$.

Die $v_\varkappa^{(\nu)}$ bestimmen sich als das zu $x_0$ gehörige Hauptsystem des Differentialsystems (17) beziehungsweise

(17) $$\frac{d v_\varkappa^{(\nu)}}{dx} = \sum_\lambda (\alpha_{\lambda\varkappa} + \beta_{\lambda\varkappa}) v_\lambda^{(\nu)} + F_\varkappa^{(\nu)}(x)$$

durch die Formeln

(22) $$v_\varkappa^{(\nu)} = \sum_i y_{i\varkappa} \int_{x_0}^{x} \sum_\mu Y_{\mu i} F_\mu^{(\nu)}(x)\,dx,$$

wo $(y_{i\varkappa})$ eine Integralmatrix des Differentialsystems (B) bedeutet und

$$(Y_{i\varkappa}) = (y_{i\varkappa})^{-1}$$

ist. Wir stellen die Aufgabe, mit der wir uns beschäftigen, jetzt in der Form, daß es sich nicht um die Herstellung eines Integralsystems $y_1, \ldots, y_n$ von (B), mit den Anfangswerten $\eta_1, \ldots, \eta_n$, sondern gleich um die Herstellung derjenigen Integralmatrix

$$(y_{i\varkappa}) = \overset{x}{\underset{x_0}{\widehat{\int}}} (a_{i\varkappa} dx + \delta_{i\varkappa})$$

handeln soll, die sich für $x = x_0$ auf die Einheitsmatrix $(\delta_{i\varkappa})$ reduziert. — Es bedeute dann $(u_{i\varkappa}^{(0)})$ diejenige Integralmatrix des Systems (11), die sich für $x = x_0$ auf $(\delta_{i\varkappa})$ reduziert, also

$$(u_{i\varkappa}^{(0)}) = \overset{x}{\underset{x_0}{\widehat{\int}}} (\alpha_{i\varkappa} dx + \delta_{i\varkappa})^{*}),$$

dann haben wir nach dem Vorhergehenden den folgenden Algorithmus:

$$(u_{i\varkappa}^{(\nu)}) = \sum_{\varrho=1}^{n} u_{\varrho\varkappa}^{(0)} \int_{x_0}^{x} \sum_{\mu} U_{\mu\varrho}^{(0)} F_{i\mu}^{(\nu-1)}(x)\, dx,$$

$$F_{i\varkappa}^{(\nu-1)}(x) = \sum_{\lambda} u_{i\lambda}^{(\nu-1)} \beta_{\lambda\varkappa},$$

$$F_{i\varkappa}^{(\nu)}(x) = \sum_{\lambda} \sum_{\varrho} \sum_{\mu} \beta_{\lambda\varkappa} u_{\varrho\lambda}^{(0)} \int_{x_0}^{x} U_{\mu\varrho}^{(0)} F_{i\mu}^{(\nu-1)}(x)\, dx,$$

$$v_{i\varkappa}^{(\nu)} = \sum_{\varrho} y_{\varrho\varkappa} \int_{x_0}^{x} \sum_{\mu} Y_{\mu\varrho} F_{i\mu}^{(\nu)}(x)\, dx,$$

$$(y_{i\varkappa}) = (u_{i\varkappa}^{(0)}) + (u_{i\varkappa}^{(1)}) + \cdots + (u_{i\varkappa}^{(\nu)}) + (v_{i\varkappa}^{(\nu)}).$$

Um diesen Algorithmus in eine leichter zu übersehende Form setzen zu können, führen wir die folgende Bezeichnung ein. Wenn $(\varphi_{i\varkappa}(x))$ eine Matrix stetiger Funktionen von $x$ bedeutet, so möge

---

*) Für die spezielle Wahl $\alpha_{i\varkappa} = 0$, ist also einfach

$$u_{i\varkappa}^{(0)} = \delta_{i\varkappa}.$$

$$\left(\int \varphi_{i\varkappa}(x)\,dx\right) = \int (\varphi_{i\varkappa}(x))\,dx$$

gesetzt werden. — Ferner wollen wir in den in unserem Algorithmus auftretenden bestimmten Integralen die Integrationsvariable statt mit $x$ mit $t$ bezeichnen und dann die vor den Integralzeichen stehenden, von $x$ abhängigen Faktoren unter die Integralzeichen bringen. Wir erhalten dann die folgenden übersichtlichen Formeln:

(I) $$(F_{i\varkappa}^{(0)}(x)) = (u_{i\varkappa}^{(0)})(\beta_{i\varkappa}),$$

(II) $$(F_{i\varkappa}^{(\nu)}(x)) = \int_{x_0}^{x} (F_{i\varkappa}^{(\nu-1)}(t))(U_{i\varkappa}^{(0)}(t))(u_{i\varkappa}^{(0)}(x))(\beta_{i\varkappa}(x))\,dt,$$

(III) $$(u_{i\varkappa}^{(\nu)}) = \int_{x_0}^{x} (F_{i\varkappa}^{(\nu-1)}(t))(U_{i\varkappa}^{(0)}(t))(u_{i\varkappa}^{(0)}(x))\,dt,$$

(IV) $$(v_{i\varkappa}^{(\nu)}) = \int_{x_0}^{x} (F_{i\varkappa}^{(\nu)}(t))(Y_{i\varkappa}(t))(y_{i\varkappa}(x))\,dt.$$

Wir führen die Konvergenzuntersuchung zunächst unter der Voraussetzung, daß die $a_{i\varkappa}$, $\alpha_{i\varkappa}$, $\beta_{i\varkappa}$ in dem Intervalle $(p \ldots q)$ eindeutige, endliche und stetige Funktionen der realen Variabeln $x$ sind. — Zwei einfache Hilfssätze über Matrizen müssen wir vorausschicken.

Es seien $(\alpha_{i\varkappa})$, $(\beta_{i\varkappa})$ zwei Matrizen, für die

$$\operatorname{mod} \alpha_{i\varkappa} \leqq M, \quad \operatorname{mod} \beta_{i\varkappa} \leqq N.^{*})$$

Ferner sei die Determinante der Matrix $(\alpha_{i\varkappa})$ so beschaffen, daß

$$\operatorname{mod} |\alpha_{i\varkappa}| > \Delta.$$

Bezeichnen wir dann die Elemente der zu $(\alpha_{i\varkappa})$ inversen Matrix $(\alpha_{i\varkappa})^{-1}$ mit $\alpha_{i\varkappa}'$, so ist

($\alpha$) $$\operatorname{mod} \alpha_{i\varkappa}' < \frac{(n-1)!\,M^{n-1}}{\Delta},$$

und für die Elemente der aus $(\alpha_{i\varkappa})$, $(\beta_{i\varkappa})$ komponierten Matrix bestehen die Ungleichungen

($\beta$) $$\operatorname{mod} \sum_{\lambda} \alpha_{i\lambda}\beta_{\lambda\varkappa} < n\,M\,N.$$

*) Die $\alpha_{i\varkappa}$, $\beta_{i\varkappa}$ können reale oder beliebige komplexe Größen sein; um eine Kollision mit der Determinantenbezeichnung $|\alpha_{i\varkappa}|$ zu vermeiden, schreiben wir hier für den absoluten Betrag einer Größe $a$ in **Cauchy**scher Weise mod $a$.

Es sei nun in dem Intervalle $(p \ldots q)$

$$\operatorname{mod} u_{ix}^{(0)} < M, \quad \operatorname{mod} |u_{ix}^{(0)}| > \Delta,$$

$$\operatorname{mod} \beta_{ix} < N;$$

dann ist nach $(\alpha)$

$$\operatorname{mod} U_{ix}^{(0)} < \frac{(n-1)!\,M^{n-1}}{\Delta}$$

und nach $(\beta)$ (vgl. die Formel (I))

$$\operatorname{mod} F_{ix}^{(0)} < nMN.$$

Die Formel (II) ergibt somit für $\nu = 1$

$$\operatorname{mod} F_{ix}^{(1)} < \int_{x_0}^{x} n^3 \cdot nMN \cdot \frac{(n-1)!\,M^{n-1}}{\Delta}\, M \cdot N \cdot \operatorname{mod} dt,$$

also, wenn wir die Länge des Integrationsintervalles

$$\int_{x_0}^{x} \operatorname{mod} dt = s$$

setzen,

$$\operatorname{mod} F_{ix}^{(1)} < nMN \cdot \frac{n^3(n-1)!}{\Delta}\, M^n N \cdot s.$$

Ebenso folgt aus (II) für $\nu = 2$

$$\operatorname{mod} F_{ix}^{(2)} < nMN \cdot \frac{n^3(n-1)!}{\Delta}\, M^n N \cdot n^3\, \frac{(n-1)!\,M^{n-1}}{\Delta} \cdot MN \cdot \int_{x_0}^{x} s\,ds,$$

also

$$\operatorname{mod} F_{ik}^{(2)} < nM\,N \cdot \left(\frac{n^3(n-1)!\,M^n N}{\Delta}\right)^2 \frac{s^2}{2!},$$

und durch vollständige Induktion finden wir ebenso allgemein

(23) $$\operatorname{mod} F_{ix}^{(\nu)} < nMN \left(\frac{n^3(n-1)!\,M^n N}{\Delta}\right)^{\nu} \frac{s^{\nu}}{\nu!}.$$

Hieraus folgt die unbedingte Konvergenz der Reihen

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} F_{ix}^{(\nu)} \qquad (i, x = 1, 2, \cdots, n)$$

für jeden Punkt $x$ des Stetigkeitsintervalles $(p \dots q)$; jene Reihen sind aber innerhalb dieses Intervalles auch **gleichmäßig** konvergent, da in den für mod $F_{ix}^{(\nu)}$ gefundenen Ungleichungen (23) die von $x$ abhängige Größe $s$ offenbar durch die von $x$ unabhängige Größe

$$\bar{s} = q - p$$

ersetzt werden kann.

Komponieren wir die Matrix

$$\left(\sum_{\nu=1}^{\infty} F_{ix}^{(\nu-1)}(t)\right) = \sum_{\nu=1}^{\infty} (F_{ix}^{(\nu-1)}(t))$$

von rechts her mit $(U_{ix}^{(0)}(t))(u_{ix}^{(0)}(x))$ und integrieren dann die gleichmäßig konvergenten Reihen, die die Elemente der so entstehenden Matrix ausmachen, gliedweise von $x_0$ bis $x$, so erhalten wir nach (III) die Matrix

$$\left(\sum_{\nu=1}^{\infty} u_{ix}^{(\nu)}\right),$$

deren Elemente folglich ebenfalls innerhalb des Stetigkeitsintervalles $(p \dots q)$ gleichmäßig konvergente Reihen sind.

Da

$$\begin{aligned}\left(\frac{du_{ix}^{(\nu)}}{dx}\right) &= \int_{x_0}^{x} (F_{ix}^{(\nu-1)}(t))\,(U_{ix}^{(0)}(t))\left(\frac{du_{ix}^{(0)}(x)}{dx}\right) dt + (F_{ix}^{(\nu-1)}(x)),\\ &= \int_{x_0}^{x} (F_{ix}^{(\nu-1)}(t))(U_{ix}^{(0)}(t))(u_{ix}^{(0)}(x))(\alpha_{ix}(x))\,dt + (F_{ix}^{(\nu-1)}(x))\end{aligned}$$

ist, so sind auch die aus den gleichmäßig konvergenten Reihen

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} u_{ix}^{(\nu)} \tag{24}$$

durch Differentiieren der einzelnen Glieder hervorgehenden Reihen

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{du_{ix}^{(\nu)}}{dx}$$

unbedingt und gleichmäßig konvergent und stellen die Derivierten der durch die Reihen (24) definierten Funktionen von $x$ dar.

Da ferner

$$\left(\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{du_{ix}^{(\nu)}}{dx}\right) - \left(\sum_{\nu=0}^{\infty} u_{ix}^{(\nu)}\right)(a_{ix}) = \left(\frac{du_{ix}^{(0)}}{dx}\right) +$$

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \int_{x_0}^{x} (F_{ix}^{(\nu-1)}(t))(U_{ix}^{(0)}(t))(u_{ix}^{(0)}(x))(\alpha_{ix}(x))\,dt$$

$$+ \sum_{\nu=1}^{\infty} F_{ix}^{(\nu-1)}(x) - (u_{ix}^{(0)})(\alpha_{ix} + \beta_{ix})$$

$$- \sum_{\nu=1}^{\infty} \int_{x_0}^{x} (F_{ix}^{(\nu-1)}(t))(U_{ix}^{(0)}(t))(u_{ix}^{(0)}(x))(\alpha_{ix}(x) + \beta_{ix}(x))\,dt$$

mit Rücksicht auf die Gleichungen (11), (I), (II) identisch gleich Null ist, so haben wir das Resultat:

Die Reihen

$$y_{ix} = \sum_{\nu=0}^{\infty} u_{ix}^{(\nu)}$$

stellen diejenige Integralmatrix des Differentialsystems (B), die sich für $x = x_0$ auf $(\delta_{ix})$ reduziert, in dem ganzen Stetigkeitsintervalle $(p \ldots q)$ der Funktionen $a_{ix}$ und $\alpha_{ix}$ gleichmäßig dar.

Hierdurch ist nicht allein ein neuer Existenzbeweis geliefert, sondern auch eine für viele Zwecke sehr nützliche Darstellung der Integrale gefunden, die, ebenso wie die durch das Interpolationsverfahren gelieferte, in dem ganzen Stetigkeitsbereiche der Koeffizienten $a_{ix}$ und $\alpha_{ix}$ gleichmäßig konvergiert. Man kann auch leicht die Annäherung abschätzen, die erzielt wird, wenn man die Reihen (24) mit dem $(n+1)^{\text{ten}}$ Gliede abbricht. Aus dem Ausdrucke (IV) für die Restglieder $v_{ix}^{(\nu)}$ folgt nämlich, wenn in dem Intervalle $(p \ldots q)$

$$\text{mod } y_{ix} < P$$

$$\text{mod } |y_{ix}| > Q$$

ist, die Ungleichung

$$\text{mod } v_{ix}^{(\nu)} < n^2 \cdot nMN \cdot \left(\frac{n^3(n-1)!\,M^n N}{\Delta}\right)^{\nu} \frac{(n-1)!\,P^{\nu-1}}{Q} P \cdot \frac{s^{\nu+1}}{(\nu+1)!}.$$

Wir spezialisieren unsere allgemeinen Formeln noch für den

bereits erwähnten besonderen Fall, wo alle $\alpha_{i\varkappa}$ gleich Null gewählt werden. In diesem Falle ist einfach

$$(u_{i\varkappa}^{(0)}) = \int_{x_0}^{x} (0\,dx + \delta_{i\varkappa}) = (\delta_{i\varkappa})$$

und folglich:

$$(25) \quad \begin{cases} (F_{i\varkappa}^{(0)}) = (a_{i\varkappa}), \\ (F_{i\varkappa}^{(\nu)}) = \int_{x_0}^{x} (F_{i\varkappa}^{(\nu-1)}(t))(a_{i\varkappa}(x))\,dt, \\ (u_{i\varkappa}^{(\nu)}) = \int_{x_0}^{x} (F_{i\varkappa}^{(\nu-1)}(t))\,dt; \end{cases}$$

die Matrizen $(u_{i\varkappa}^{(1)})$, $(u_{i\varkappa}^{(2)}), \ldots$ ergeben sich demnach in der Form

$$(u_{i\varkappa}^{(1)}) = \int_{x_0}^{x} (a_{i\varkappa})\,dx,$$

$$(u_{i\varkappa}^{(2)}) = \int_{x_0}^{x} \left( \int_{x_0}^{x} a_{i\varkappa}\,dx \right) (a_{i\varkappa})\,dx,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

also, wie wir sagen können, durch iterierte Integration der Matrix der Koeffizienten $(a_{i\varkappa})$.

Man übersieht ohne weiteres, daß die sämtlichen bisher durchgeführten Untersuchungen unverändert bestehen bleiben, wenn die Koeffizienten $a_{i\varkappa}$ des Differentialsystems (B) komplexe Funktionen der realen Variabeln $x$ sind, die den jeweils zu fordernden Stetigkeitsbedingungen genügen. Wir können aber jetzt auch mit Leichtigkeit zu dem Falle übergehen, wo $x$ selbst eine komplexe Veränderliche bedeutet und die Koeffizienten $a_{i\varkappa}$ des Differentialsystems (B) monogene Funktionen dieser komplexen Variabeln sind.

Es sei zunächst $S$ ein einfach zusammenhängender Bereich in der Ebene der komplexen Variabeln $x$, innerhalb dessen die $a_{i\varkappa}$ holomorph sind.*) Wir denken uns die Spaltung der $a_{i\varkappa}$ in $\alpha_{i\varkappa} + \beta_{i\varkappa}$

*) Holomorph (oder regulär) heißt eine monogene (analytische) Funktion der komplexen Variabeln, wenn sie eindeutig, endlich und stetig ist.

so vollzogen, daß auch die $a_{i\varkappa}$ innerhalb $S$ holomorph sind, und daß die Bestimmung der Integralmatrix $(u_{i\varkappa}^{(0)})$ auch im Gebiete der komplexen Variabeln $x$ nicht auf Schwierigkeiten stößt. Wir mögen fürs erste z. B. die Wahl $\alpha_{i\varkappa} = 0$ stets vor Augen haben. Wenn wir dann in den Erörterungen, die sich auf die Methode der sukzessiven Approximationen beziehen, die Punkte $x_0$ und $x$ innerhalb $S$ nehmen und uns die auftretenden Integrationen auf einem ganz innerhalb $S$ verlaufenden Wege ausgeführt denken, so behalten die formalen und qualitativen Teile dieser Erörterungen ihre Bedeutung. In den auf die Konvergenzuntersuchung bezüglichen quantitativen Untersuchungen haben wir nur an Stelle des Intervalles $(p \ldots q)$ den Bereich $S$ zu setzen, unter

$$\int_{x_0}^{x} \operatorname{mod} dt = s$$

die Länge des (als rektifizierbare Kurve zu denkenden) Integrationsweges zu verstehen und an die Stelle von $\bar{s} = q - p$ eine positive Größe treten zu lassen, die so beschaffen ist, daß man von $x_0$ aus zu jedem Punkte von $S$ auf einem ganz innerhalb $S$ verlaufenden Wege gelangen kann, dessen Länge jene positive Größe nicht übertrifft. Dann folgt ohne weiteres, daß die Reihen

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} u_{i\varkappa}^{(\nu)}$$

innerhalb $S$ unbedingt und gleichmäßig konvergieren und diejenige Integralmatrix $(y_{i\varkappa})$ von (B) innerhalb $S$ darstellen, die sich für $x = x_0$ auf $(\delta_{i\varkappa})$ reduziert. Die Elemente $y_{i\varkappa}$ sind natürlich innerhalb $S$ holomorphe, monogene Funktionen der komplexen Variabeln $x$, und es kann auch der ganze in der zweiten Vorlesung (S. 26 ff.) entwickelte Infinitesimalkalkül der Matrizen auf den Fall einer komplexen unabhängigen Variabeln übertragen werden, wenn man sich auf das Innere des einfach zusammenhängenden Bereiches $S$ beschränkt. Auf Grund der bekannten Sätze über die Integrale holomorpher Funktionen in mehrfach zusammenhängenden Bereichen könnten wir jetzt auch alle die Sätze entwickeln, die das Verhalten der Integralmatrizen in einem mehrfach zusammenhängenden Bereiche, in dem die Koeffizienten $a_{i\varkappa}$ holomorph sind, bestimmen. Wir ziehen es aber vor, diese Sätze erst an die Darlegung eines neuen Verfahrens anzuschließen, mit Hilfe dessen wir die Theorie der Integralmatrizen im Falle einer komplexen Variabeln in ganz direkter und viel tiefergehender Weise begründen

wollen, als es durch die Methode der sukzessiven Approximation geschehen konnte. Dieses neue Verfahren soll demjenigen nachgebildet werden, mit Hilfe dessen man nach Riemanns Vorgange die Theorie der bestimmten Integrale zwischen komplexen Grenzen zu entwickeln pflegt; es wird also darin bestehen, daß es diejenigen Paare realer Funktionen zweier realer Variabeln untersuchen lehrt, die die realen Teile und die Koeffizienten von $\sqrt{-1}$ der Elemente einer Integralmatrix des Differentialsystems (B) ausmachen, wenn $x$ als komplexe Variable aufgefaßt wird.

---

# Vierte Vorlesung.

**Einleitendes über Differentialgleichungen, deren Lösungen gewöhnliche Quadraturen bezw. sogenannte Kurvenintegrale sind. Übergang von dem linearen Differentialsystem mit einer komplexen unabhängigen Variabeln zu einem Systeme totaler Differentialgleichungen mit zwei realen unabhängigen Variabeln. Integrabilitätsbedingungen. Rechtecksatz. Unabhängigkeit der Integralmatrix vom Wege. Analogon des Riemannschen Satzes für einen geschlossenen Integrationsweg.**

Wenn man in der Differentialgleichung

$$\text{(I)} \qquad \frac{dy}{dx} = f(x)$$

rein formal

$$x = \xi + \eta\sqrt{-1},\ y = u + v\sqrt{-1},\ f(x) = \varphi(\xi, \eta) + \sqrt{-1}\ \psi(\xi, \eta)$$

setzt, so ergeben sich, indem man in der Gleichung

$$du + \sqrt{-1}\ dv = (d\xi + \sqrt{-1}\ d\eta)(\varphi + \sqrt{-1}\ \psi)$$

Reales und Imaginäres trennt, für $u$, $v$ die beiden Differentialgleichungen

$$\text{(II)} \qquad \begin{cases} du = \varphi d\xi - \psi d\eta, \\ dv = \psi d\xi + \varphi d\eta. \end{cases}$$

Damit erscheint die Theorie der Differentialgleichung (I) im Falle komplexer Variabeln auf die Theorie der Differentialgleichungen von der Form

$$\text{(III)} \qquad du = P d\xi + Q d\eta$$

zurückgeführt, wo jetzt $u$, $\xi$, $\eta$ reale Größen, $P$, $Q$ reale Funktionen von $\xi$, $\eta$ bedeuten. — Es seien $P$, $Q$ eindeutige, endliche und stetige Funktionen von $\xi$, $\eta$, innerhalb eines einfach zusammenhängenden Bereiches $S$ der $(\xi, \eta)$-Ebene. Bedeutet dann

$$(1) \qquad \xi = \varphi(t), \quad \eta = \psi(t)$$

ein Paar Funktionen von $t$, die für $t_0 < t < t_1$ eindeutig sind und stetige Derivierte haben, und für die die dem angegebenen Intervalle von

$t$ entsprechenden Funktionswerte $\xi$, $\eta$ Koordinaten von Punkten des Bereiches $S$ darstellen, so ist die Differentialgleichung (III) stets längs der durch die Gleichungen (1) dargestellten Kurve lösbar, und zwar z. B. in der Weise, daß die Lösung

$$\text{(IV)} \qquad u = \int_{t_0}^{t} [P(\varphi(t), \psi(t))\varphi'(t) + Q(\varphi(t), \psi(t))\psi'(t)]\,dt\,^{*})$$

für den Anfangspunkt

$$\text{(2)} \qquad \xi_0 = \varphi(t_0), \quad \eta_0 = \psi(t_0)$$

der Kurve verschwindet. Wenn $P$, $Q$ innerhalb $S$ differentiierbar sind, und

$$\text{(V)} \qquad \frac{\partial P}{\partial \eta} = \frac{\partial Q}{\partial \xi}$$

ist, so gilt der Satz, daß die durch (IV) dargestellte Lösung von der Wahl der durch die Punkte $(\xi_0, \eta_0)$ und $(\xi, \eta)$ hindurchgelegten Kurve unabhängig, d. h. also nur abhängig ist von den Koordinaten $(\xi_0, \eta_0)$ und $(\xi, \eta)$ selbst. In dem Falle, wo die Integrabilitätsbedingung (V) erfüllt ist, gibt es also eine bestimmte Lösung der Differentialgleichung (III), die von den beiden voneinander unabhängigen Variabeln $\xi$, $\eta$ abhängt, innerhalb $S$ eindeutig ist und für $(\xi_0, \eta_0)$ verschwindet; wir bezeichnen diese Lösung mit

$$\text{(VI)} \qquad u = (S)\int_{(\xi_0, \eta_0)}^{(\xi, \eta)} (P\,d\xi + Q\,d\eta).$$

Wenn nun in (I) $f(x)$ eine monogene Funktion der komplexen Variabeln $x$ ist, so ist zufolge der Relationen

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \xi} = \frac{\partial \psi}{\partial \eta}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} = -\frac{\partial \psi}{\partial \xi}$$

für jede der Differentialgleichungen (II) die Integrabilitätsbedingung erfüllt. Bedeutet also $S$ einen einfach zusammenhängenden Bereich, in dem $f(x)$ holomorph ist, und

$$x_0 = \xi_0 + \sqrt{-1}\,\eta_0$$

einen Punkt dieses Bereiches, so können wir das Aggregat

$$y = (S)\int_{(\xi_0, \eta_0)}^{(\xi, \eta)} (\varphi\,d\xi - \psi\,d\eta) + \sqrt{-1}\,(S)\int_{(\xi_0, \eta_0)}^{(\xi, \eta)} (\psi\,d\xi + \varphi\,d\eta)$$

---

*) $\varphi'(t)$, $\psi'(t)$ bezeichnen die Derivierten der Funktionen $\varphi$, $\psi$.

bilden und erhalten dadurch eine für $x = x_0$ verschwindende Lösung der Differentialgleichung (1), die offenbar eine monogene und innerhalb $S$ holomorphe Funktion der komplexen Variabeln $x$ ist. Wir setzen

$$y = (S)\int_{x_0}^{x} f(x)\,dx.$$

Wir wollen nun die hier angedeutete Definition des Integrals auf komplexem Wege Schritt für Schritt auf den Fall der Integralmatrix zu übertragen suchen, und bemerken, ehe wir dazu übergehen, nur noch das Folgende. Den Beweis des Satzes, daß unter der Bedingung (V), d. h. wenn $P d\xi + Q d\eta$ ein totales Differential ist, ein Integral (VI) existiert, erbringt Riemann mit Zuhilfenahme der Theorie der Doppelintegrale. Nun läßt sich zwar in der Theorie der Integralmatrizen auch ein dem Doppelintegrale der gewöhnlichen Integralrechnung analoges Gebilde aufstellen*); wir haben es aber vorgezogen, die Einführung eines solchen Gebildes zu umgehen, was um so eher gerechtfertigt erscheinen wird, als man gerade in neuerer Zeit bestrebt war, auch bei dem Beweise des gedachten Satzes der gewöhnlichen Integralrechnung die Anwendung der Doppelintegrale zu vermeiden**), indem nämlich die Einführung des Doppelintegrals überflüssige Beschränkungen für die Funktionen $P$, $Q$ erforderlich macht.

* * *

Wenn wir in dem linearen Differentialsysteme

$$\text{(B)} \qquad \frac{dy_\varkappa}{dx} = \sum_{\lambda=1}^{n} y_\lambda a_{\lambda\varkappa} \qquad (\varkappa = 1, 2, \cdots, n)$$

ganz formal

$$y_\varkappa = u_\varkappa + \sqrt{-1}\, v_\varkappa, \quad a_{i\varkappa} = \alpha_{i\varkappa} + \sqrt{-1}\, \beta_{i\varkappa}, \qquad (i, \varkappa = 1, 2, \cdots n)$$

$$x = \xi + \eta\sqrt{-1}$$

setzen, wo $u_\varkappa$, $v_\varkappa$, $\alpha_{i\varkappa}$, $\beta_{i\varkappa}$ reale Funktionen der realen Variabeln $\xi$, $\eta$ bedeuten sollen, so ergibt sich für die $2n$ Größen $u_\varkappa$, $v_\varkappa$ das System von $2n$ Differentialgleichungen

---

*) Volterra hat dies mit dem von ihm sogenannten „integrale doppio di una sostituzione“ getan.

**) Man sehe die Arbeiten von E. Goursat (1884, 1899, 1900), A. Pringsheim (1895, 1901, 1903), L. Heffter (1903, 1904).

$$\text{(R)}\quad \begin{cases} du_\varkappa = d\xi \sum_{\lambda=1}^{n} (u_\lambda \alpha_{\lambda\varkappa} - v_\lambda \beta_{\lambda\varkappa}) - d\eta \sum_{\lambda=1}^{n} (u_\lambda \beta_{\lambda\varkappa} + v_\lambda \alpha_{\lambda\varkappa}), \\ dv_\varkappa = d\xi \sum_{\lambda=1}^{n} (u_\lambda \beta_{\lambda\varkappa} + v_\lambda \alpha_{\lambda\varkappa}) + d\eta \sum_{\lambda=1}^{n} (u_\lambda \alpha_{\lambda\varkappa} - v_\lambda \beta_{\lambda\varkappa}). \end{cases}$$
$$(\varkappa = 1, 2, \cdots, n)$$

Dieses Differentialsystem ist von der folgenden Form:

$$\text{(T)}\quad du_\varkappa = d\xi \sum_{\lambda=1}^{m} u_\lambda \alpha_{\lambda\varkappa}^{(1)}(\xi, \eta) + d\eta \sum_{\lambda=1}^{m} u_\lambda \alpha_{\lambda\varkappa}^{(2)}(\xi, \eta),$$
$$(\varkappa = 1, 2, \cdots, m)$$

wo also jetzt $\xi$, $\eta$ reale Variable und

$$\alpha_{i\varkappa}^{(1)}(\xi, \eta), \quad \alpha_{i\varkappa}^{(2)}(\xi, \eta)$$

zwei Systeme von je $m^2$ realen Funktionen von $\xi$, $\eta$ bedeuten, von denen wir gleich voraussetzen wollen, daß sie innerhalb des einfach zusammenhängenden Bereiches $S$ der $(\xi, \eta)$-Ebene eindeutig, endlich und stetig sind. — Das System (T) gehört in die Klasse der totalen linearen Differentialsysteme; dabei bedeutet das Epitheton linear, im Sinne der gewöhnlich angewandten Terminologie*), daß die Gleichungen in den auftretenden Differentialen vom ersten Grade sind. Unser System (T) ist aber auch in dem engeren Sinne linear, daß die Gleichungen, in denen wir $\xi$, $\eta$ als die unabhängigen, $u_1, \ldots, u_m$ als die abhängigen Variabeln auffassen, in den abhängigen Variabeln und ihren Differentialen selbst linear sind. Die Theorie der Systeme von der Form (T), die wir jetzt entwickeln wollen, ließe sich ohne jede prinzipielle Schwierigkeit in genau derselben Weise auch für Systeme mit beliebig vielen unabhängigen Variabeln

$$\xi_1, \ldots, \xi_r$$

aufstellen, d. h. also für Systeme von der Form

$$du_\varkappa = \sum_{i=1}^{r} d\xi_i \sum_{\lambda=1}^{n} u_\lambda \alpha_{\lambda\varkappa}^{(i)}(\xi_1, \ldots, \xi_r); \qquad (\varkappa = 1, 2, \cdots, m)$$

wir beschränken uns der Einfachheit wegen und mit Rücksicht auf das Ziel, das wir im Auge haben, auf den Fall der Systeme (T) mit zwei unabhängigen Variabeln.

Wenn wir zunächst (wie oben für die einfache Differentialgleichung

*) Vgl. etwa den Enzyklopädieartikel II A 5 (E. v. Weber) Nr. 58.

(III)) eine ganz in dem Bereiche $S$ verlaufende Kurve $C$ betrachten, die durch Gleichungen von der Art wie (1) (S. 48) gegeben wird, so verwandelt sich, wenn wir auf dieser Kurve verbleiben, das Differentialsystem (T), in ein homogenes lineares Differentialsystem mit der einen unabhängigen Variabeln $t$, dessen Koeffizienten

$$\alpha_{i\varkappa}^{(1)}(\varphi(t),\ \psi(t))\varphi'(t) + \alpha_{i\varkappa}^{(2)}(\varphi(t),\ \psi(t))\psi'(t) \atop (i, \varkappa = 1, 2, \cdots, m)$$

in dem Intervalle $(t_0 \dots t_1)$ eindeutige, endliche und stetige Funktionen von $t$ sind. Wir haben also eine Integralmatrix

$$(3) \qquad \overset{\frown}{\int_{t_0}^{t}} [(\alpha_{i\varkappa}^{(1)}(\varphi(t),\ \psi(t))\varphi'(t) + \alpha_{i\varkappa}^{(2)}(\varphi(t),\ \psi(t))\psi'(t))dt + \delta_{i\varkappa}],$$

die dem Systeme (T) Genüge leistet, wenn $\xi$, $\eta$ Koordinaten der Punkte unserer Kurve $C$ sind, und die sich für $t = t_0$ auf die Einheitsmatrix $(\delta_{i\varkappa})$ reduziert. Wir können die Integralmatrix (3) in der Form

$$(3\text{a}) \qquad C\overset{\frown}{\int_{(\xi_0,\ \eta_0)}^{(\xi,\ \eta)}} (\alpha_{i\varkappa}^{(1)} d\xi + \alpha_{i\varkappa}^{(2)} d\eta + \delta_{i\varkappa})$$

schreiben und als die „längs der Kurve $C$ von $(\xi_0,\ \eta_0)$ bis $(\xi,\ \eta)$ hin erstreckte Integralmatrix" bezeichnen. Natürlich gelten für die längs einer Kurve erstreckten Integralmatrizen die den Regeln (VII) und (IX) der zweiten Vorlesung analogen Rechnungsregeln ohne weiteres solange wir uns auf derselben Kurve $C$ bewegen. Sind also $(\xi_1,\ \eta_1)$, $(\xi_2,\ \eta_2)$ zwei Punkte auf $C$, so ist

$$(\text{VIIa}) \qquad C\overset{\frown}{\int_{(\xi_0,\ \eta_0)}^{(\xi_2,\ \eta_2)}} = C\overset{\frown}{\int_{(\xi_0,\ \eta_0)}^{(\xi_1,\ \eta_1)}} \cdot C\overset{\frown}{\int_{(\xi_1,\ \eta_1)}^{(\xi_2,\ \eta_2)}},$$

und

$$(\text{IXa}) \qquad C\overset{\frown}{\int_{(\xi_1,\ \eta_1)}^{(\xi_2,\ \eta_2)}} = \left( C\overset{\frown}{\int_{(\xi_2,\ \eta_2)}^{(\xi_1,\ \eta_1)}} \right)^{-1},$$

wo der unter den Integralmatrixzeichen stehende Ausdruck der Kürze wegen unterdrückt worden ist.

Wir fragen nun, wann die durch die Formel (3) erklärte Integralmatrix von der Wahl der Kurve $C$ unabhängig sein wird, d. h. unter welchen Bedingungen es für die Werte, die die Elemente der Integralmatrix (3) in dem Punkte $(\xi,\ \eta)$ annehmen, gleichgültig ist, ob w



von $(\xi_0, \eta_0)$ nach $(\xi, \eta)$ längs der durch die Gleichungen (1) dargestellten Kurve $C$ oder längs einer anderen ebenfalls ganz innerhalb $S$ verlaufenden und durch Gleichungen

(1a) $$\xi = \bar{\varphi}(t), \ \eta = \bar{\psi}(t),$$

wo $\bar{\varphi}(t)$, $\bar{\psi}(t)$ Funktionen von derselben Beschaffenheit wie $\varphi(t)$, $\psi(t)$ bedeuten, dargestellten Kurve $\bar{C}$ gehen?

Wenn dies der Fall ist, so sind die Elemente der Integralmatrix (3) innerhalb $S$ eindeutig definierte Funktionen der Koordinaten des Endpunktes der Integration, d. h. der voneinander unabhängigen Veränderlichen $\xi$, $\eta$. Es ist folglich, wenn wir die Integralmatrix (3) mit $u_{ix}(\xi, \eta)$ bezeichnen,

$$du_{ix} = d\xi \sum_{\lambda=1}^{m} u_{i\lambda}\alpha_{\lambda x}^{(1)} + d\eta \sum_{\lambda=1}^{m} u_{i\lambda}\alpha_{\lambda x}^{(2)},$$

d. h. aber nichts anderes als:

(4) $$\begin{cases} \dfrac{\partial u_{ix}}{\partial \xi} = \sum\limits_{\lambda=1}^{m} u_{i\lambda}\alpha_{\lambda x}^{(1)}, \\ \dfrac{\partial u_{ix}}{\partial \eta} = \sum\limits_{\lambda=1}^{m} u_{i\lambda}\alpha_{\lambda x}^{(2)}. \end{cases} \qquad (i, x = 1, 2, \cdots, m)$$

Da wir hauptsächlich die Anwendung der hier zu führenden Untersuchung auf den Fall im Auge haben, wo die Funktionen $\alpha_{ix}^{(1)}$, $\alpha_{ix}^{(2)}$ die realen Bestandteile und die Koeffizienten von $\sqrt{-1}$ monogener Funktionen von $\xi + \eta\sqrt{-1}$ sind, also als Funktionen von $\xi$, $\eta$ auch den Charakter analytischer Funktionen (im Sinne von Lagrange und Weierstraß) besitzen, so wollen wir für die $\alpha_{ix}^{(1)}$, $\alpha_{ix}^{(2)}$ gleich voraussetzen, daß sie innerhalb $S$ nach $\xi$, $\eta$ differentiierbar, und daß ihre Derivierten nach $\xi$, $\eta$ in $S$ auch stetig sind.

Schreiben wir die Gleichungen (4) in der Form

(4a) $$\begin{cases} \left(\dfrac{\partial u_{ix}}{\partial \xi}\right) = (u_{ix})(\alpha_{ix}^{(1)}), \\ \left(\dfrac{\partial u_{ix}}{\partial \eta}\right) = (u_{ix})(\alpha_{ix}^{(2)}), \end{cases}$$

so folgt, indem wir die erste dieser Gleichungen nach $\eta$, die zweite nach $\xi$ differentiieren,

(5) $$\begin{cases} \left(\dfrac{\partial^2 u_{ix}}{\partial \eta \partial \xi}\right) = (u_{ix})\left(\dfrac{\partial \alpha_{ix}^{(1)}}{\partial \eta}\right) + \left(\dfrac{\partial u_{ix}}{\partial \eta}\right)(\alpha_{ix}^{(1)}), \\ \left(\dfrac{\partial^2 u_{ix}}{\partial \xi \partial \eta}\right) = (u_{ix})\left(\dfrac{\partial \alpha_{ix}^{(2)}}{\partial \xi}\right) + \left(\dfrac{\partial u_{ix}}{\partial \xi}\right)(\alpha_{ix}^{(2)}), \end{cases}$$

also, indem wir hierin für $\left(\frac{\partial u_{i\varkappa}}{\partial \eta}\right)$, $\left(\frac{\partial u_{i\varkappa}}{\partial \xi}\right)$ die Ausdrücke (4a) einsetzen und die rechten Seiten der Gleichungen (5) miteinander vergleichen,

$$\text{(C)} \qquad \left(\frac{\partial \alpha_{i\varkappa}^{(1)}}{\partial \eta}\right) + (\alpha_{i\varkappa}^{(2)})(\alpha_{i\varkappa}^{(1)}) = \left(\frac{\partial \alpha_{i\varkappa}^{(2)}}{\partial \xi}\right) + (\alpha_{i\varkappa}^{(1)})(\alpha_{i\varkappa}^{(2)}).$$

Diese Gleichung, die natürlich $m^2$ Relationen symbolisch zusammenfaßt, soll als Bedingung der Integrabilität für das totale Differentialsystem (T) bezeichnet werden; sie erweist sich zunächst als notwendig dafür, daß — unter den für die $\alpha_{i\varkappa}^{(1)}$, $\alpha_{i\varkappa}^{(2)}$ festgelegten Bedingungen — eine dem Differentialsystem (T) genügende Integralmatrix existiert, deren Elemente innerhalb $S$ eindeutige Funktionen der beiden voneinander unabhängig veränderlichen Größen $\xi$, $\eta$ sind.

Wir wollen nun nachweisen, daß die Integrabilitätsbedingungen für die Existenz einer solchen Integralmatrix auch hinreichend sind.*)

Es seien $(\xi_0, \eta_0)$, $(\xi, \eta)$ innerhalb des Bereiches $S$ so gelegen, daß das Rechteck mit den Ecken

$$\text{(6)} \qquad (\xi_0, \eta_0), \quad (\xi, \eta_0), \quad (\xi, \eta), \quad (\xi_0, \eta)$$

ganz in $S$ enthalten ist. — Wir bilden dann die beiden folgenden Integralmatrizen:**)

$$\text{(7)} \qquad \begin{cases} (v_{i\varkappa}) = \overbrace{\int_{\eta_0}^{\eta}}(\alpha_{i\varkappa}^{(2)}(\xi_0, \eta)d\eta + \delta_{i\varkappa}) \cdot \overbrace{\int_{\xi_0}^{\xi}}(\alpha_{i\varkappa}^{(1)}(\xi, \eta)d\xi + \delta_{i\varkappa}), \\ (\bar{v}_{i\varkappa}) = \overbrace{\int_{\xi_0}^{\xi}}(\alpha_{i\varkappa}^{(1)}(\xi, \eta_0)d\xi + \delta_{i\varkappa}) \cdot \overbrace{\int_{\eta_0}^{\eta}}(\alpha_{i\varkappa}^{(2)}(\xi, \eta)d\eta + \delta_{i\varkappa}) \end{cases}$$

und wollen für diese zuvörderst drei Sätze beweisen, nämlich***):

---

*) Um die Übersicht über den zu liefernden Beweis zu erleichtern, setzen wir bei jedem Schritte den analogen Schritt für die Differentialgleichung (III) (S. 48) in einer Fußnote hierher.

**) Für die Differentialgleichung (III) sind die Ausdrücke zu bilden:

$$\text{(VII)} \qquad \begin{cases} v = \int_{\eta_0}^{\eta} Q(\xi_0, \eta)d\eta + \int_{\xi_0}^{\xi} P(\xi, \eta)d\xi, \\ \bar{v} = \int_{\xi_0}^{\xi} P(\xi, \eta_0)d\xi + \int_{\eta_0}^{\eta} Q(\xi, \eta)d\eta. \end{cases}$$

***) Für die Integrale (VII) lauten die zu beweisenden drei Sätze:

a) $(v_{i\varkappa})$, $(\bar{v}_{i\varkappa})$ sind Integralmatrizen des Differentialsystems (T), d. h. es bestehen die Gleichungen:

(8) $$D_\xi(v_{i\varkappa}) = (\alpha_{i\varkappa}^{(1)}), \quad D_\eta(\bar{v}_{i\varkappa}) = (\alpha_{i\varkappa}^{(2)}),$$

(9) $$D_\eta(v_{i\varkappa}) = (\alpha_{i\varkappa}^{(2)}), \quad D_\xi(\bar{v}_{i\varkappa}) = (\alpha_{i\varkappa}^{(1)});$$

b) $(v_{i\varkappa})$ und $(\bar{v}_{i\varkappa})$ reduzieren sich für $\xi = \xi_0$, $\eta = \eta_0$ auf die Einheitsmatrix $(\delta_{i\varkappa})$, d. h.

$$\lim_{\substack{\xi=\xi_0\\ \eta=\eta_0}} (v_{i\varkappa}) = \lim_{\substack{\xi=\xi_0\\ \eta=\eta_0}} (\bar{v}_{i\varkappa}) = (\delta_{i\varkappa});$$

c) $(v_{i\varkappa})$ und $(\bar{v}_{i\varkappa})$ sind identisch, d. h. es ist

$$(\bar{v}_{i\varkappa})(v_{i\varkappa})^{-1} = (\delta_{i\varkappa}).$$

Die in den Gleichungen (8) enthaltenen Aussagen des Satzes a) sind leicht zu verifizieren; wenn wir nämlich beachten, daß die linksseitigen Faktoren von $(v_{i\varkappa})$ bezw. $(\bar{v}_{i\varkappa})$ von $\xi$ bezw. $\eta$ unabhängige Matrizen sind, so folgen aus der Definition des Integrationssymbols und mit Rücksicht auf die Derivationsformel (II) (S. 26) ohne weiteres die Gleichungen (8). — Wir wollen nun die Gleichungen (9) verifizieren, und zwar wird es genügen, etwa die erste derselben:

$$D_\eta(v_{i\varkappa}) = (\alpha_{i\varkappa}^{(2)})$$

zu beweisen.*)

Wir schicken zwei einfache Hilfsformeln voraus, die auch beim Beweise des Satzes c) angewandt werden sollen.**)

Bedeutet

$$A = (a_{i\varkappa})$$

eine Matrix differentiierbarer Funktionen der Variabeln $x$, so setzen wir der kürzeren Schreibweise wegen

$$\left(\frac{\partial a_{i\varkappa}}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}(a_{i\varkappa}) = \frac{\partial A}{\partial x}.$$

---

α) $$\begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial \xi} = P, & \dfrac{\partial \bar{v}}{\partial \eta} = Q, \\ \dfrac{\partial v}{\partial \eta} = Q, & \dfrac{\partial \bar{v}}{\partial \xi} = P; \end{cases}$$

β) $$\lim_{\substack{\xi=\xi_0\\ \eta=\eta_0}} v = \lim_{\substack{\xi=\xi_0\\ \eta=\eta_0}} \bar{v} = 0;$$

γ) $$\bar{v} - v = 0;$$

*) Die Richtigkeit der in der ersten Zeile des Satzes α) stehenden Gleichungen leuchtet unmittelbar ein; wir beweisen jetzt, daß

VIII) $$\frac{\partial v}{\partial \eta} = Q.$$

**) Die analogen Hilfsformeln für die gewöhnlichen Integrale sind trivial.

Wenn die Elemente der Matrizen $(w_{i\varkappa})$ und $(b_{i\varkappa})$ differentiierbare Funktionen von $x$ und die Determinanten dieser Matrizen von Null verschieden sind, so folgt durch Anwendung der Derivationsformeln (IV) (S. 26) und (VI.) (S. 28) die Gleichung:

$$D_x[(w_{i\varkappa})(b_{i\varkappa})(w_{i\varkappa})^{-1}] = (w_{i\varkappa})(b_{i\varkappa})^{-1}\cdot D_x(w_{i\varkappa})\cdot(b_{i\varkappa})(w_{i\varkappa})^{-1}$$
$$+ (w_{i\varkappa})\cdot D_x(b_{i\varkappa})\cdot(w_{i\varkappa})^{-1} - (w_{i\varkappa})\cdot D_x(w_{i\varkappa})\cdot(w_{i\varkappa})^{-1};$$

mit Rücksicht auf die Definition des Derivationssymbols

$$D_x A = A^{-1}\frac{\partial A}{\partial x}$$

haben wir also:

$$(10)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial x}[(w_{i\varkappa})(b_{i\varkappa})(w_{i\varkappa})^{-1}] = \\ = (w_{i\varkappa})\Big(D_x(w_{i\varkappa})\cdot(b_{i\varkappa}) + \Big(\dfrac{\partial b_{i\varkappa}}{\partial x}\Big) - (b_{i\varkappa})D_x(w_{i\varkappa})\Big)(w_{i\varkappa})^{-1}. \end{cases}$$

Es mögen nun $(w_{i\varkappa})$, $(b_{i\varkappa})$ Matrizen bedeuten, deren Elemente differentiierbare Funktionen der beiden Variabeln $\xi$, $\eta$ sind, und deren Determinante nicht identisch verschwindet; dann folgt durch Anwendung der Formel (10):

$$\frac{\partial}{\partial\xi}\Big[(w_{i\varkappa})\Big((b_{i\varkappa}) - D_\eta(w_{i\varkappa})\Big)(w_{i\varkappa})^{-1}\Big] = (w_{i\varkappa})\Big(D_\xi(w_{i\varkappa})\cdot(b_{i\varkappa}) - D_\xi(w_{i\varkappa})D_\eta(w_{i\varkappa})$$
$$+ \Big(\frac{\partial b_{i\varkappa}}{\partial\xi}\Big) - \frac{\partial}{\partial\xi}D_\eta(w_{i\varkappa}) - (b_{i\varkappa})D_\xi(w_{i\varkappa}) + D_\eta(w_{i\varkappa})D_\xi(w_{i\varkappa})\Big)(w_{i\varkappa})^{-1}.$$

Nun erfüllen die Matrizen $D_\xi(w_{i\varkappa})$ und $D_\eta(w_{i\varkappa})$ offenbar die Integrabilitätsbedingung (C); es ist also

$$\frac{\partial}{\partial\xi}D_\eta(w_{i\varkappa}) + D_\xi(w_{i\varkappa})D_\eta(w_{i\varkappa}) = \frac{\partial}{\partial\eta}D_\xi(w_{i\varkappa}) + D_\eta(w_{i\varkappa})D_\xi(w_{i\varkappa});$$

wir erhalten demnach die zweite unserer beiden Hilfsformeln:

$$(11)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial\xi}[(w_{i\varkappa})((b_{i\varkappa}) - D_\eta(w_{i\varkappa}))(w_{i\varkappa})^{-1}] \\ = (w_{i\varkappa})\Big(D_\xi(w_{i\varkappa})\cdot(b_{i\varkappa}) + \Big(\dfrac{\partial b_{i\varkappa}}{\partial\xi}\Big) - (b_{i\varkappa})D_\xi(w_{i\varkappa}) - \dfrac{\partial}{\partial\eta}D_\xi(w_{i\varkappa})\Big)(w_{i\varkappa})^{-1}. \end{cases}$$

Der Beweis der ersten der beiden Gleichungen (9) gestaltet sich nun wie folgt. — Setzen wir für einen Augenblick

$$(U_{i\varkappa}) = (v_{i\varkappa})((\alpha_{i\varkappa}^{(2)}) - D_\eta(v_{i\varkappa}))(v_{i\varkappa})^{-1},$$

so folgt aus (11), wenn wir darin $(v_{i\varkappa})$ an die Stelle von $(w_{i\varkappa})$ und $(\alpha_{i\varkappa}^{(2)})$ an die Stelle von $(b_{i\varkappa})$ setzen:

$$\Big(\frac{\partial U_{i\varkappa}}{\partial\xi}\Big) = (v_{i\varkappa})\Big((\alpha_{i\varkappa}^{(1)})(\alpha_{i\varkappa}^{(2)}) + \Big(\frac{\partial\alpha_{i\varkappa}^{(2)}}{\partial\xi}\Big) - (\alpha_{i\varkappa}^{(2)})(\alpha_{i\varkappa}^{(1)}) - \Big(\frac{\partial\alpha_{i\varkappa}^{(1)}}{\partial\eta}\Big)\Big)(v_{i\varkappa})^{-1}.$$

Zufolge der Integrabilitätsbedingung (C) ist daher die Matrix

$$\left(\frac{\partial U_{i\varkappa}}{\partial \xi}\right) = (0),$$

d. h. die $U_{i\varkappa}$ sind von $\xi$ unabhängig. Wir können folglich um die Werte dieser Größen zu bestimmen, für $\xi$ einen speziellen Wert, etwa $\xi_0$, einsetzen. Für $\xi = \xi_0$ ist aber, da $\xi$, $\eta$ voneinander unabhängig sind,

$$\lim_{\xi=\xi_0} D_\eta(v_{i\varkappa}) = D_\eta(\lim_{\xi=\xi_0} v_{i\varkappa}) = D_\eta \int_{\eta_0}^{\eta} (\alpha_{i\varkappa}^{(2)}(\xi_0, \eta) d\eta + \delta_{i\varkappa}) = (\alpha_{i\varkappa}^{(2)}(\xi_0, \eta));$$

wir finden also

$$(\lim_{\xi=\xi_0} U_{i\varkappa}) = (\lim_{\xi=\xi_0} v_{i\varkappa})(\alpha_{i\varkappa}^{(2)}(\xi_0, \eta) - \lim_{\xi=\xi_0} D_\eta(v_{i\varkappa}))(\lim_{\xi=\xi_0} v_{i\varkappa})^{-1} = (0)$$

und folglich

$$U_{i\varkappa} = 0$$

für jedes Wertepaar $\xi$, $\eta$. Daraus folgt aber ohne weiteres, daß

$$(\alpha_{i\varkappa}^{(2)}) - D_\eta(v_{i\varkappa}) = (0)$$

ist, was zu beweisen war.*)

---

*) Zum Beweise der Gleichung (VIII) setzen wir

$$w = \int_{\xi_0}^{\xi} P(\xi, \eta) d\xi,$$

dann ist

(IX) $$\frac{\partial v}{\partial \eta} = Q(\xi_0, \eta) + \frac{\partial w}{\partial \eta}.$$

Aber

(X) $$\frac{\partial}{\partial \xi}\left(Q(\xi, \eta) - \frac{\partial w}{\partial \eta}\right) = \frac{\partial Q}{\partial \xi} - \frac{\partial}{\partial \eta}\left(\frac{\partial w}{\partial \xi}\right) = \frac{\partial Q}{\partial \xi} - \frac{\partial P}{\partial \eta}$$

ist zufolge der Integrabilitätsbedingung (V) (S. 49) gleich Null, d. h. es ist

$$Q(\xi, \eta) - \frac{\partial w}{\partial \eta} = F(\eta)$$

von $\xi$ unabhängig. Da

$$\lim_{\xi=\xi_0} w = 0, \quad \lim_{\xi=\xi_0} \frac{\partial w}{\partial \eta} = 0,$$

also $F(\eta) = Q(\xi_0, \eta)$ ist, so haben wir

$$\frac{\partial w}{\partial \eta} = Q(\xi, \eta) - Q(\xi_0, \eta),$$

wodurch aus (IX) unmittelbar die zu beweisende Gleichung (VIII) hervorgeht. Damit die im Laufe der Rechnung vorgenommenen Vertauschungen von Grenzübergängen usw. gestattet sind, hat man natürlich den Funktionen $P$, $Q$ noch gewisse engere Stetigkeitsbedingungen aufzuerlegen.

Der Satz b) folgt direkt aus der Definition der Matrizen $(v_{i\varkappa})$, $(\bar{v}_{i\varkappa})$; wir haben also nur noch den Satz c) zu erhärten.

Der Bequemlichkeit wegen ändern wir die Bezeichnungen in der Weise ab, daß wir in den Definitionsgleichungen (7) der Matrizen $(v_{i\varkappa})$, $(\bar{v}_{i\varkappa})$ die oberen Grenzen der Integralmatrizen statt mit $\xi$, $\eta$ mit $\xi_1$, $\eta_1$ bezeichnen. Die Ecken unseres Rechtecks haben dann die Koordinaten $(\xi_0, \eta_0)$, $(\xi_1, \eta_0)$, $(\xi_1, \eta_1)$, $(\xi_0, \eta_1)$, und der zu beweisende Satz c) wird durch die Gleichung

$$(\mathrm{D})\left\{\begin{aligned} &\overbrace{\int_{\xi_0}^{\xi_1}}(\alpha_{i\varkappa}^{(1)}(\xi, \eta_0)d\xi + \delta_{i\varkappa})\overbrace{\int_{\eta_0}^{\eta_1}}(\alpha_{i\varkappa}^{(2)}(\xi_1, \eta)d\eta + \delta_{i\varkappa})\cdot\\ &\overbrace{\int_{\xi_1}^{\xi_0}}(\alpha_{i\varkappa}^{(1)}(\xi, \eta_1)d\xi + \delta_{i\varkappa})\overbrace{\int_{\eta_1}^{\eta_0}}(\alpha_{i\varkappa}^{(2)}(\xi_0, \eta)d\eta + \delta_{i\varkappa}) = (\delta_{i\varkappa})^{*)} \end{aligned}\right.$$

ausgedrückt.

Es sei nun $(\xi, \eta)$ ein beliebiger Punkt im Innern unseres Rechtecks (Fig. 1), und

$$T = \overbrace{\int_{\eta_0}^{\eta}}(\alpha_{i\varkappa}^{(2)}(\xi_0, \eta)d\eta + \delta_{i\varkappa})\cdot\overbrace{\int_{\xi_0}^{\xi}}(\alpha_{i\varkappa}^{(1)}(\xi, \eta)d\xi + \delta_{i\varkappa}).$$

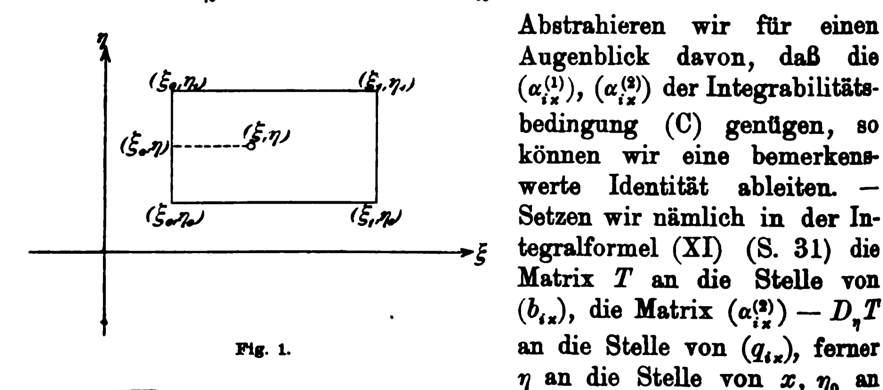



Fig. 1.

Abstrahieren wir für einen Augenblick davon, daß die $(\alpha_{i\varkappa}^{(1)})$, $(\alpha_{i\varkappa}^{(2)})$ der Integrabilitätsbedingung (C) genügen, so können wir eine bemerkenswerte Identität ableiten. — Setzen wir nämlich in der Integralformel (XI) (S. 31) die Matrix $T$ an die Stelle von $(b_{i\varkappa})$, die Matrix $(\alpha_{i\varkappa}^{(2)}) - D_\eta T$ an die Stelle von $(q_{i\varkappa})$, ferner $\eta$ an die Stelle von $x$, $\eta_0$ an

*) Mit der im Texte angegebenen Änderung der Bezeichnung lautet die Gleichung, die den zu beweisenden Satz $\gamma$) ausdrückt:

$$(\delta)\qquad \int_{\xi_0}^{\xi_1} P(\xi, \eta_0)\,d\xi + \int_{\eta_0}^{\eta_1} Q(\xi_1, \eta)\,d\eta + \int_{\xi_1}^{\xi_0} P(\xi, \eta_1)\,d\xi + \int_{\eta_1}^{\eta_0} Q(\xi_0, \eta)\,d\eta = 0.$$

**an** die Stelle von $p$ und $\eta_1$ an die Stelle von $r$, so erhalten wir, wenn wir noch für $\xi$ den Wert $\xi_1$ einsetzen, die Identität:

$$(16)\quad \left\{\begin{aligned} \int_{\eta_0}^{\eta_1}(\gamma_{i\varkappa}(\xi_1, \eta)\,d\eta + \delta_{i\varkappa}) &= T_{\substack{\xi=\xi_1\\ \eta=\eta_0}} \cdot \int_{\eta_0}^{\eta_1}(\alpha_{i\varkappa}^{(2)}(\xi_1, \eta)\,d\eta + \delta_{i\varkappa}) \cdot T^{-1}_{\substack{\xi=\xi_1\\ \eta=\eta_1}} \\ &= \int_{\xi_0}^{\xi_1}(\alpha_{i\varkappa}^{(1)}(\xi, \eta_0)\,d\xi + \delta_{i\varkappa})\int_{\eta_0}^{\eta_1}(\alpha_{i\varkappa}^{(2)}(\xi_1, \eta)\,d\eta + \delta_{i\varkappa}) \\ &\quad \int_{\xi_1}^{\xi_0}(\alpha_{i\varkappa}^{(1)}(\xi, \eta_1)\,d\xi + \delta_{i\varkappa})\int_{\eta_1}^{\eta_0}(\alpha_{i\varkappa}^{(2)}(\xi_0, \eta)\,d\eta + \delta_{i\varkappa}), \end{aligned}\right.$$

wo zur Abkürzung

$$(\gamma_{i\varkappa}(\xi, \eta)) = T((\alpha_{i\varkappa}^{(2)}) - D_\eta T)T^{-1}$$

gesetzt worden ist.

Wenn die Matrizen $(\alpha_{i\varkappa}^{(1)})$, $(\alpha_{i\varkappa}^{(2)})$ die Integrabilitätsbedingungen erfüllen, so ist nach dem vorhin bewiesenen Satze a) (erste der Gleichungen (9))

$$D_\eta T = \alpha_{i\varkappa}^{(2)},$$

die Elemente der Matrix $(\gamma_{i\varkappa}(\xi, \eta))$ sind folglich identisch gleich Null, und die Identität (16) liefert, da

$$\int_{\eta_0}^{\eta_1}(0\,d\eta + \delta_{i\varkappa}) = (\delta_{i\varkappa})$$

ist, unmittelbar die zu beweisende Gleichung (D)*).

Um den eben bewiesenen Satz in einfacher Form aussprechen zu

*) Um die Gleichung ($\delta$) zu beweisen, bezeichnen wir mit $\xi$, $\eta$ die Koordinaten eines beliebigen im Innern unseres Rechtecks gelegenen Punktes und setzen

$$t(\xi, \eta) = \int_{\xi_0}^{\xi} P(\xi, \eta)\,d\xi + \int_{\eta_0}^{\eta} Q(\xi_0, \eta)\,d\eta\,;$$

dann ist nach dem Satze ($\alpha$)

$$(\mathrm{XI})\qquad \frac{\partial t}{\partial \eta} = Q(\xi, \eta),$$

und die linke Seite der Gleichung ($\delta$) kann in der Form

$$\int_{\eta_0}^{\eta_1} Q(\xi_1, \eta)\,d\eta - t(\xi_1, \eta_1) + t(\xi_1, \eta_0)$$

können, greifen wir auf die oben gegebene Definition „einer längs einer Kurve $C$ erstreckten Integralmatrix" (Formeln (3) und (3a), S. 52) zurück. Im Sinne dieser Definition können wir nämlich die auf der linken Seite der Gleichung (D) auftretenden Integralmatrizen in der Reihenfolge, wie sie von links nach rechts gelesen aufeinander folgen, in der nachstehenden Form schreiben:

$$\overset{\frown}{\int\limits_{(\xi_0,\eta_0)}^{(\xi_1,\eta_0)}}(\alpha_{i\varkappa}^{(1)}d\xi + \alpha_{i\varkappa}^{(2)}d\eta + \delta_{i\varkappa}), \quad \overset{\frown}{\int\limits_{(\xi_1,\eta_0)}^{(\xi_1,\eta_1)}}(\alpha_{i\varkappa}^{(1)}d\xi + \alpha_{i\varkappa}^{(2)}d\eta + \delta_{i\varkappa}),$$

$$\overset{\frown}{\int\limits_{(\xi_1,\eta_1)}^{(\xi_0,\eta_1)}}(\alpha_{i\varkappa}^{(1)}d\xi + \alpha_{i\varkappa}^{(2)}d\eta + \delta_{i\varkappa}), \quad \overset{\frown}{\int\limits_{(\xi_0,\eta_1)}^{(\xi_0,\eta_0)}}(\alpha_{i\varkappa}^{(1)}d\xi + \alpha_{i\varkappa}^{(2)}d\eta + \delta_{i\varkappa}),$$

jede dieser Integralmatrizen erstreckt längs der betreffenden Seite des Rechtecks $(\xi_0, \eta_0)$, $(\xi_1, \eta_0)$, $(\xi_1, \eta_1)$, $(\xi_0, \eta_1)$. Der Satz c) kann demnach so ausgesprochen werden*):

**Wenn die Matrizen $(\alpha_{i\varkappa}^{(1)})$, $(\alpha_{i\varkappa}^{(2)})$ innerhalb des Bereiches $S$ die Integrabilitätsbedingung (C) erfüllen, so ist die Integralmatrix**

$$\overset{\frown}{\int}(\alpha_{i\varkappa}^{(1)}d\xi + \alpha_{i\varkappa}^{(2)}d\eta + \delta_{i\varkappa}),$$

**erstreckt längs der Begrenzung eines ganz innerhalb $S$ gelegenen, den Koordinatenachsen parallel gestellten Rechtecks, gleich der Einheitsmatrix $(\delta_{i\varkappa})$.**

Wir bezeichnen diesen Satz als den **Rechtecksatz.**

---

oder in der Form

$$\int\limits_{\eta_0}^{\eta}\left[Q(\xi_1, \eta)\,d\eta - \frac{\partial t(\xi_1, \eta)}{\partial \eta}d\eta\right]$$

geschrieben werden. Der letztere Ausdruck ist aber nach (XI) offenbar identisch gleich Null, womit der Beweis geliefert ist.

*) Der Satz $\gamma$) kann so gefaßt werden: **Wenn $P$, $Q$ innerhalb $S$ die Integrabilitätsbedingung $\frac{\partial P}{\partial \eta} = \frac{\partial Q}{\partial \xi}$ erfüllen, so ist das Integral**

$$\int(P\,dx + Q\,dy),$$

**erstreckt längs der Peripherie eines ganz im Innern von $S$ gelegenen, den Koordinatenachsen parallel gestellten Rechtecks, gleich Null.** (Rechtecksatz.)

Wenn $\xi, \eta$ die Koordinaten eines Punktes bedeuten, für den das Rechteck

$$(\xi_0, \eta_0), \quad (\xi, \eta_0), \quad (\xi, \eta), \quad (\xi_0, \eta)$$

ganz im Innern von $S$ gelegen ist, so haben wir in den beiden Matrizen $(v_{i\varkappa})$, $(\bar{v}_{i\varkappa})$ eine das Differentialsystem (T) befriedigende Integralmatrix gefunden, die sich für $(\xi_0, \eta_0)$ auf die Einheitsmatrix $(\delta_{i\varkappa})$ reduziert. Wir sagen von $(v_{i\varkappa})$, daß diese Integralmatrix längs der die Punkte $(\xi_0, \eta_0)$ und $(\xi, \eta)$ verbundenen oberen Stufe erstreckt sei, und analog von $(\bar{v}_{i\varkappa})$, daß diese Matrix der unteren Stufe zwischen $(\xi_0, \eta_0)$ und $(\xi, \eta)$ entspricht. Im Sinne des Rechtecksatzes haben die längs der oberen und unteren Stufe erstreckten Integralmatrizen denselben Wert. — Liegt der Punkt $(\xi, \eta)$ so, daß nur die obere oder nur die untere Stufe, die ihn mit $(\xi_0, \eta_0)$ verbindet, ganz in das Gebiet $S$ hineinfällt, so haben wir in dem Punkte $(\xi, \eta)$ immer noch eine dem Systeme (T) genügende Integralmatrix. Wenn nun aber weder die obere noch die untere Stufe, die von $(\xi_0, \eta_0)$ nach $(\xi, \eta)$ führt, ganz innerhalb $S$ liegt, so verfahren wir wie folgt:

Wie immer auch der Punkt $(\xi, \eta)$ innerhalb $S$ gelegen sein mag, so lassen sich zwischen $(\xi_0, \eta_0)$ und $(\xi, \eta)$ Punkte

$$(\xi_1, \eta_1), \ldots, (\xi_m, \eta_m)$$

in endlicher Anzahl so einschalten, daß entweder die obere Stufe

$$(\xi_{\lambda-1}, \eta_{\lambda-1}) \ldots (\xi_{\lambda-1}, \eta_\lambda) \quad \text{und} \quad (\xi_{\lambda-1}, \eta_\lambda) \ldots (\xi_\lambda, \eta_\lambda)$$

oder die untere Stufe

$$(\xi_{\lambda-1}, \eta_{\lambda-1}) \ldots (\xi_\lambda, \eta_{\lambda-1}) \quad \text{und} \quad (\xi_\lambda, \eta_{\lambda-1}) \ldots (\xi_\lambda, \eta_\lambda)$$

oder beide Stufen für irgend zwei aufeinander folgende der $(m + 2)$ Punkte

$$\text{(a)} \qquad (\xi_\lambda, \eta_\lambda) \quad (\lambda = 0, 1, \ldots, m+1;\ \xi_{m+1} = \xi,\ \eta_{m+1} = \eta)$$

ganz innerhalb $S$ verlaufen. Und zwar ist dies Einschalten noch auf unendlich viele Weisen möglich. Bilden wir für die innerhalb $S$ verlaufenden Stufen der durch die Punkte (a) bestimmten „Treppenlinie" die Matrizen

$$\text{(o)} \qquad \widehat{\int_{\eta_{\lambda-1}}^{\eta_\lambda}}(\alpha_{i\varkappa}^{(2)}(\xi_{\lambda-1}, \eta)\, d\eta + \delta_{i\varkappa}) \quad \widehat{\int_{\xi_{\lambda-1}}^{\xi_\lambda}}(\alpha_{i\varkappa}^{(1)}(\xi, \eta_\lambda)\, d\xi + \delta_{i\varkappa})$$

beziehungsweise

$$\text{(u)} \qquad \int\limits_{\xi_{\lambda-1}}^{\xi_\lambda}(\alpha_{i\varkappa}^{(1)}(\xi, \eta_{\lambda-1})d\xi + \delta_{i\varkappa}) \int\limits_{\eta_{\lambda-1}}^{\eta_\lambda}(\alpha_{i\varkappa}^{(2)}(\xi_\lambda, \eta)d\eta + \delta_{i\varkappa}),$$

die wir durch $(v_{i\varkappa}^{(\lambda)})$ bezeichnen*), so genügt die Matrix

$$(17) \qquad (v_{i\varkappa}) = (v_{i\varkappa}^{(1)})(v_{i\varkappa}^{(2)}) \cdots (v_{i\varkappa}^{(m+1)})$$

offenbar dem Differentialsysteme (T) und reduziert sich für $\xi = \xi_0$, $\eta = \eta_0$ auf $(\delta_{i\varkappa})$.

Wir behaupten nun, daß diese Matrix innerhalb $S$ auch eindeutig bestimmt ist, d. h. daß ihre Elemente $v_{i\varkappa}$ innerhalb $S$ eindeutige Funktionen von $\xi$, $\eta$ sind. Um dies zu beweisen, haben wir nur zu zeigen, daß der Wert der Funktionen $v_{i\varkappa}$ im Punkte $\xi$, $\eta$ unabhängig ist von der Wahl der eingeschalteten Punkte $(\xi_1, \eta_1), \ldots, (\xi_m, \eta_m)$. Denken wir uns also die Punkte $(\xi_0, \eta_0)$, $(\xi, \eta)$ unter Einschaltung neuer Zwischenpunkte durch eine von der vorhin betrachteten verschiedene Treppenlinie verbunden, und bezeichnen wir die mit Benutzung dieser neuen Treppenlinie gebildete Matrix (17) mit $(\bar{v}_{i\varkappa})$, dann kann offenbar das zwischen den beiden Treppenlinien gelegene Gebiet von $S$ in eine endliche Anzahl von Rechtecken zerlegt werden, deren Seiten parallel zu den Koordinatenachsen stehen. Man kann dann die beiden Matrizen $(v_{i\varkappa})$, $(\bar{v}_{i\varkappa})$ offenbar in der folgenden Form schreiben:

$$(v_{i\varkappa}) = (v_{i\varkappa}^{(1)}) \cdots (v_{i\varkappa}^{(r)}),$$
$$(\bar{v}_{i\varkappa}) = (\bar{v}_{i\varkappa}^{(1)}) \cdots (\bar{v}_{i\varkappa}^{(r)}),$$

wo sich die nicht überstrichenen Buchstaben auf die Stufen der einen, die überstrichenen auf die Stufen der anderen Treppe beziehen. Im Sinne des Rechtecksatzes ist aber die Integralmatrix, erstreckt über die Begrenzung einer jeden der rechteckigen Parzellen, in die das zwischen den beiden Treppenlinien befindliche Gebiet von $S$ zerlegt wurde, gleich $(\delta_{i\varkappa})$; beachtet man ferner, daß die auf die „Zwischenwände" dieser Parzellen bezüglichen Integralmatrizen, wenn über die Peripherie der einzelnen Parzellen im positiven Sinne hin integriert wird, zweimal und zwar beide Male im entgegengesetzten Sinne durchlaufen werden, so erkennt man, daß

$$(v_{i\varkappa})(\bar{v}_{i\varkappa})^{-1} = (\delta_{i\varkappa}),$$

*) Liegen für ein Paar konsekutiver Punkte **beide** Stufen innerhalb $S$, so sind die beiden Matrizen (o), (u) nach dem Rechtecksatze identisch.

also $(v_{i\varkappa})$ mit $(\bar{v}_{i\varkappa})$ identisch ist.*) — Wir bezeichnen die auf diese Weise für jeden Punkt des Bereiches $S$ eindeutig definierte Matrix $(v_{i\varkappa})$ mit

$$(18) \qquad (S)\int_{(\xi_0,\eta_0)}^{\widehat{(\xi,\eta)}} (\alpha_{i\varkappa}^{(1)}\,d\xi + \alpha_{i\varkappa}^{(2)}\,d\eta + \delta_{i\varkappa})$$

und können nun sagen, daß für das Differentialsystem (T), dessen Koeffizienten $(\alpha_{i\varkappa}^{(1)})$, $(\alpha_{i\varkappa}^{(2)})$ die Integrabilitätsbedingungen (C) erfüllen, die Existenz einer im Bereiche $S$ eindeutigen In-

---

*) Zur Erläuterung diene das in der Figur 2 veranschaulichte Beispiel. Wir

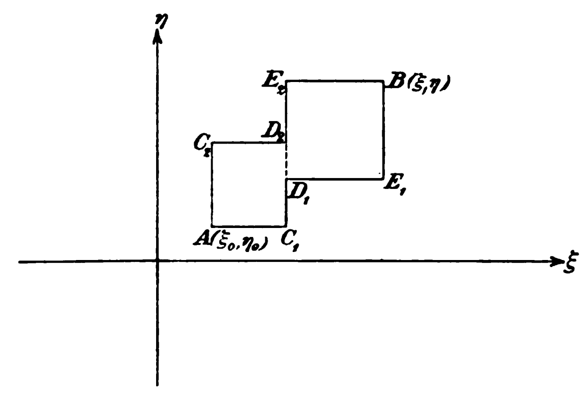



Fig. 2.

bezeichnen die Integralmatrix, erstreckt längs der die beiden Punkte $A$, $C_1$ verbindenden geraden Linie, kurz durch $(AC_1)$ usw. Dann ist

$$(v_{i\varkappa}) = (AC_1)(C_1D_1)(D_1E_1)(E_1B),$$
$$(\bar{v}_{i\varkappa}) = (AC_2)(C_2D_2)(D_2E_2)(E_2B);$$

ferner haben wir nach dem Rechtecksatze

$$(AC_1)(C_1D_1)(D_1D_2)(D_2C_2)(C_2A) = (\delta_{i\varkappa}),$$
$$(D_1E_1)(E_1B)(BE_2)(E_2D_2)(D_2D_1) = (\delta_{i\varkappa}),$$

also mit Rücksicht auf die Integrationsformel (IX), S. 30

$$(D_2C_2)(C_2A) = (D_2D_1)(D_1C_1)(C_1A),$$
$$(BE_2)(E_2D_2) = (BE_1)(E_1D_1)(D_1D_2)$$

und somit in der Tat

$$(v_{i\varkappa})(\bar{v}_{i\varkappa})^{-1} = (AC_1)(C_1D_1)(D_1E_1)(E_1B)(BE_2)(E_2D_2)(D_2C_2)(C_2A) = (\delta_{i\varkappa}).$$

tegralmatrix erwiesen ist, die sich in dem Punkte $(\xi_0, \eta_0)$ auf die Einheitsmatrix $(\delta_{i\varkappa})$ reduziert.*)

Die Übertragung der für die Integralmatrizen mit einer unabhängigen Variabeln geltenden Regeln auf die Integralmatrix (18) vollzieht sich nun ohne Schwierigkeit; wir merken nur die folgenden Formeln an:

$$\text{(IXb)}\quad (S)\int\limits_{(\xi_0,\eta_0)}^{\widehat{(\xi_1,\eta_1)}} (\alpha_{i\varkappa}^{(1)} d\xi + \alpha_{i\varkappa}^{(2)} d\eta + \delta_{i\varkappa}) = \left( (S)\int\limits_{(\xi_1,\eta_1)}^{\widehat{(\xi_0,\eta_0)}} (\alpha_{i\varkappa}^{(1)} d\xi + \alpha_{i\varkappa}^{(2)} d\eta + \delta_{i\varkappa}) \right)^{-1};$$

$$\text{(VIIb)}\quad (S)\int\limits_{(\xi_0,\eta_0)}^{\widehat{(\xi_1,\eta_1)}} (\alpha_{i\varkappa}^{(1)} d\xi + \alpha_{i\varkappa}^{(2)} d\eta + \delta_{i\varkappa}) = (S)\int\limits_{(\xi_0,\eta_0)}^{\widehat{(\xi_2,\eta_2)}} (\alpha_{i\varkappa}^{(1)} d\xi + \alpha_{i\varkappa}^{(2)} d\eta + \delta_{i\varkappa}) \cdot (S)\int\limits_{(\xi_2,\eta_2)}^{\widehat{(\xi_1,\eta_1)}} (\alpha_{i\varkappa}^{(1)} d\xi + \alpha_{i\varkappa}^{(2)} d\eta + \delta_{i\varkappa}).$$

Bedeutet ferner $(u_{i\varkappa}^{(0)})$ eine konstante Matrix mit nicht verschwindender Determinante, so stellt

$$(19)\qquad (u_{i\varkappa}) = (u_{i\varkappa}^{(0)}) \cdot (S)\int\limits_{(\xi_0,\eta_0)}^{\widehat{(\xi,\eta)}} (\alpha_{i\varkappa}^{(1)} d\xi + \alpha_{i\varkappa}^{(2)} d\eta + \delta_{i\varkappa})$$

diejenige Integralmatrix des Systems (T) dar, die sich für $(\xi_0, \eta_0)$ auf $(u_{i\varkappa}^{(0)})$ reduziert. Eine Integralmatrix von (T) ist also innerhalb $S$ durch Angabe der Matrix ihrer Anfangswerte im Punkte $(\xi_0, \eta_0)$ eindeutig bestimmt, und die Matrix (19) stellt, wenn die $u_{i\varkappa}^{(0)}$ als willkürliche Konstanten angesehen werden, die allgemeinste Integralmatrix des Differentialsystems (T) in dem Bereiche $S$ dar. Hieraus folgt ohne weiteres die Formel:

$$\text{(Xa)}\quad (S)\int\limits_{(\xi_1,\eta_1)}^{\widehat{(\xi_2,\eta_2)}} (\alpha_{i\varkappa}^{(1)} d\xi + \alpha_{i\varkappa}^{(2)} d\eta + \delta_{i\varkappa}) = (u_{i\varkappa}(\xi_1, \eta_1))^{-1} (u_{i\varkappa}(\xi_2, \eta_2)).$$

Wir können jetzt auch die Beziehung, die zwischen unserer

*) Für die Differentialgleichung (III) folgt auf ähnliche Weise die Existenz des innerhalb $S$ eindeutig definierten Integrals

$$u(\xi, \eta) = (S)\int\limits_{(\xi_0,\eta_0)}^{(\xi,\eta)} (P\,d\xi + Q\,d\eta).$$

Integralmatrix (18) und der zu Beginn dieser Vorlesung allgemein definierten, längs einer Kurve $C$ erstreckten Integralmatrix (3a)

$$C\int\limits_{(\xi_0,\eta_0)}^{(\xi,\eta)}(\alpha_{i\varkappa}^{(1)}\,d\xi+\alpha_{i\varkappa}^{(2)}\,d\eta+\delta_{i\varkappa})$$

besteht, angeben.

Bedeutet nämlich $(w_{i\varkappa}(\xi,\eta))$ eine Matrix, deren Elemente innerhalb $S$ eindeutige, endliche und differentiierbare Funktionen von $\xi$, $\eta$ sind, und deren Determinante nicht verschwindet, so ist für die ganz innerhalb $S$ verlaufende, durch die Gleichungen (1) (S. 48)

$$\xi=\varphi(t),\qquad \eta=\psi(t)$$

definierte Kurve $C$

$$(20)\quad \int\limits_{t_0}^{t_1}(D_t w_{i\varkappa}(\varphi(t),\,\psi(t))dt+\delta_{i\varkappa})=(w_{i\varkappa}(\varphi(t_0),\,\psi(t_0)))^{-1}(w_{i\varkappa}(\varphi(t_1),\,\psi(t_1))),$$

also da, wenn

$$\xi_0=\varphi(t_0),\qquad \eta_0=\psi(t_0),$$
$$\xi_1=\varphi(t_1),\qquad \eta_1=\psi(t_1)$$

gesetzt wird, $w_{i\varkappa}(\xi_0,\eta_0)$, $w_{i\varkappa}(\xi_1,\eta_1)$ eindeutig bestimmte Werte sind,

$$\int\limits_{t_0}^{t_1}(D_t w_{i\varkappa}(\varphi(t),\,\psi(t))\,dt+\delta_{i\varkappa})=(w_{i\varkappa}(\xi_0,\eta_0))^{-1}(w_{i\varkappa}(\xi_1,\eta_1)),$$

d. h. die Integralmatrix (20) ist unabhängig von der Wahl der die Punkte $(\xi_0,\eta_0)$, $(\xi_1,\eta_1)$ verbindenden Kurve $C$.

Wenn die Kurve $C$ insbesondere eine geschlossene, d. h. wenn $t_1=t_0$, also $\xi_1=\xi_0$, $\eta_1=\eta_0$ ist, so haben wir

$$\int\limits_{t_0}^{t_0}(D_t w_{i\varkappa}(\varphi(t),\,\psi(t))\,dt+\delta_{i\varkappa})=(\delta_{i\varkappa}).$$

Da nach der Definition des Derivationssymbols

$$D_t w_{i\varkappa}(\varphi(t),\,\psi(t))\,dt=\left(D_\xi(w_{i\varkappa})\frac{d\xi}{dt}+D_\eta(w_{i\varkappa})\frac{d\eta}{dt}\right)dt$$

ist, so können wir die Integralmatrix (20) in der Form

$$(S)\int\limits_{(\xi_0,\eta_0)}^{(\xi_1,\eta_1)}(D_\xi(w_{i\varkappa})d\xi+D_\eta(w_{i\varkappa})d\eta+\delta_{i\varkappa})$$

schreiben und erhalten, indem wir diese einfachen Bemerkungen auf die innerhalb $S$ eindeutig definierte Matrix (18) bezw. (19) anwenden, die folgenden wichtigen Sätze:

Wenn die Koeffizienten $(\alpha_{i\varkappa}^{(1)})$, $(\alpha_{i\varkappa}^{(2)})$ des Differentialsystems (T) die Integrabilitätsbedingungen (C) innerhalb des Bereiches $S$ erfüllen, so ist die längs einer die Punkte $(\xi_0, \eta_0)$, $(\xi_1, \eta_1)$ verbindenden, ganz in $S$ verlaufenden Kurve $C$ erstreckte Integralmatrix

$$C\overset{\frown}{\int_{(\xi_0,\eta_0)}^{(\xi_1,\eta_1)}}(\alpha_{i\varkappa}^{(1)}(\xi,\eta)d\xi + \alpha_{i\varkappa}^{(2)}(\xi,\eta)d\eta + \delta_{i\varkappa}) = (u_{i\varkappa}(\xi_0,\eta_0))^{-1}(u_{i\varkappa}(\xi_1,\eta_1)),$$

also vom Integrationswege $C$ unabhängig und mit

$$(S)\overset{\frown}{\int_{(\xi_0,\eta_0)}^{(\xi_1,\eta_1)}}(\alpha_{i\varkappa}^{(1)}(\xi,\eta)d\xi + \alpha_{i\varkappa}^{(2)}(\xi,\eta)d\eta + \delta_{i\varkappa})$$

identisch. Es ist ferner die längs einer geschlossenen Kurve $\Gamma$ erstreckte Integralmatrix

$$\Gamma\overset{\frown}{\int}(\alpha_{i\varkappa}^{(1)}d\xi + \alpha_{i\varkappa}^{(2)}d\eta + \delta_{i\varkappa}) = (\delta_{i\varkappa})^{*}),$$

wenn $\Gamma$ ganz innerhalb $S$ liegt, d. h. wenn die $\alpha_{i\varkappa}^{(1)}$, $\alpha_{i\varkappa}^{(2)}$ in dem von $\Gamma$ eingeschlossenen Bereiche und auf $\Gamma$ selbst stetige Derivierte besitzen und die Integrabilitätsbedingungen (C) erfüllen.

---

*) Der diesem Satze entsprechende Satz für die Differentialgleichung (III) ist der sogenannte Riemannsche Integralsatz

$$\Gamma\int(P d\xi + Q d\eta) = 0.$$

Siehe Riemanns Inauguraldissertation (Werke 1892, S. 15) Nr. 9.

# Fünfte Vorlesung.

**Integralmatrizen totaler Differentialsysteme in mehrfach zusammenhängenden Bereichen. Lineare Substitution. Fundamentalsubstitutionen. Geschlossene Wege. Ähnliche Matrizen. Anwendung auf gewöhnliche lineare Differentialsysteme mit komplexen Variabeln. Existenz monogener Integralmatrizen im Holomorphiebereich der Koeffizienten. Gespaltene Matrizen. Allgemeine Integralmatrix des komplexen Systemes. Verhalten in mehrfach zusammenhängenden Bereichen. Änderungen des Querschnittsystems.**

Die Ergebnisse der vorigen Vorlesung können wir kurz dahin zusammenfassen, daß wir sagen: Wenn für die Koeffizienten des totalen Differentialsystems (T) (S. 51) die Integrabilitätsbedingungen (C) (S. 54) erfüllt sind, so gelten für einen einfach zusammenhängenden Bereich $S$ der $(\xi, \eta)$-Ebene, innerhalb dessen die Koeffizienten eindeutig, endlich und stetig differentiierbar sind, analoge Existenzsätze für die von den beiden unabhängigen Variablen $\xi$, $\eta$ abhängenden Lösungen, wie sie für den Fall des gewöhnlichen linearen Differentialsystems (B) (S. 50) für einen einfach zusammenhängenden Bereich der einen realen Variabeln $x$ gelten, innerhalb dessen die Koeffizienten von (B) eindeutig, endlich und stetig sind.

Wenn wir uns jetzt der Untersuchung der Lösungen des vollständig oder komplett integrablen totalen Differentialsystems (T) in einem Bereiche $T$ der $(\xi, \eta)$-Ebene zuwenden, wo die Koeffizienten dieselben Bedingungen erfüllen, wie vorhin für den Bereich $S$, der aber nicht einfach sondern m e h r f a c h  z u s a m m e n h ä n g e n d ist, so werden wir zu ganz neuartigen Resultaten gelangen, die in der Theorie der linearen Differentialsysteme mit einer realen unabhängigen Variabeln kein Analogon besitzen, da für das Gebiet einer realen Variabeln etwas Analoges wie ein mehrfach zusammenhängender Bereich von zwei Dimensionen nicht existiert. Dagegen werden die zu erzielenden Resultate die größte Ähnlichkeit mit denjenigen darbieten, die man erhält, wenn man das Integral eines totalen Differentials

$$\int (P d\xi + Q d\eta)$$

in einem mehrfach zusammenhängenden Bereiche studiert, innerhalb dessen die Funktionen $P$, $Q$ eindeutig und stetig differentiierbar sind; genauer, sie werden sich als Verallgemeinerungen der Eigenschaften des Ausdrucks

$$e^{\int(P\,d\xi + Q\,d\eta)}$$

darstellen.

Wir könnten, wenn wir einige einfache Sätze der Analysis situs heranziehen wollten, unsere Betrachtungen auf allgemeine mehrfach zusammenhängende Bereiche (z. B. Riemannsche Flächen) beziehen; wir ziehen es aber vor, unsere Untersuchung auf den Fall zu beschränken, wo ein in der schlichten $(\xi, \eta)$-Ebene gelegener Bereich gegeben ist, der die folgende Beschaffenheit hat.

Es sei eine geschlossene Kurve $a_{\sigma+1}$ in der $(\xi, \eta)$-Ebene gezeichnet und in dem von dieser eingeschlossenen endlichen Teile der Ebene seien noch $\sigma$ geschlossene Kurven $a_1, \ldots, a_\sigma$ vorhanden, die sich gegenseitig ausschließen. Der Bereich $T$, der von diesen $\sigma + 1$ Kurven begrenzt wird, ist dann $(\sigma + 1)$-fach zusammenhängend und kann durch ein System von $\sigma$ Querschnitten $l_1, \ldots, l_\sigma$ in einen einfach zusammenhängenden Bereich $\overline{T}$ verwandelt werden. Um die Vorstellung zu fixieren, denken wir uns diese Querschnitte längs einfacher Kurven gelegt, die weder sich selbst noch einander durchsetzen mögen, und zwar möge $l_\lambda$ einen Punkt von $a_\lambda$ mit einem Punkte von $a_{\sigma+1}$ verbinden. Wenn wir $a_{\sigma+1}$ so durchlaufen, daß der unendlich ferne Punkt der $(\xi, \eta)$-Ebene zur Linken bleibt (also im negativen Sinne), so mögen die Mündungspunkte der Querschnitte in der Reihenfolge $l_1$, $l_2, \ldots, l_\sigma$ aufeinanderfolgen. Ferner bezeichnen wir dasjenige Ufer des Querschnittes $l_\lambda$ als das positive, das bei einem positiven Umlauf um die Kurve $a_\lambda$*) zuerst getroffen wird, das gegenüberliegende Ufer ist dann das negative (siehe die Fig. 3).

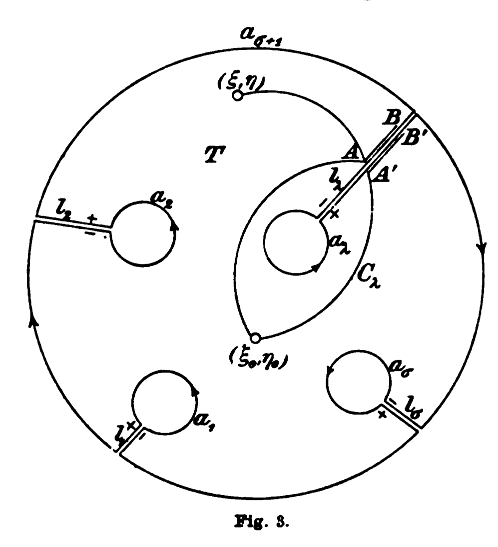


Fig. 3.

*) Ein positiver Umlauf um $a_\lambda$ wird in dem Sinne vollzogen, der dem Drehungssinne eines im Innern von $a_\lambda$ befestigt gedachten Uhrzeigers entgegengesetzt ist.

Im Innern des Bereiches $T$ seien nunmehr die Koeffizienten $\alpha_{i\varkappa}^{(1)}$, $\alpha_{i\varkappa}^{(2)}$ eindeutig, stetig differentiierbar und so beschaffen, daß zwischen ihnen und ihren partiellen Derivierten die Integrabilitätsbedingungen (C) erfüllt sind. Es sei $(\xi_0, \eta_0)$ ein fester, $(\xi, \eta)$ ein veränderlicher Punkt im Innern von $T$, dann ist, nach den Ergebnissen der vorigen Vorlesung, innerhalb des einfach zusammenhängenden Bereiches $\overline{T}$ die Integralmatrix

$$(1) \qquad (\overline{T})\widehat{\int_{(\xi_0, \eta_0)}^{(\xi, \eta)}}(\alpha_{i\varkappa}^{(1)} d\xi + \alpha_{i\varkappa}^{(2)} d\eta + \delta_{i\varkappa}) = (\bar{u}_{i\varkappa})$$

eindeutig determiniert, d. h. ihre Elemente $\bar{u}_{i\varkappa}$ sind eindeutige Funktionen der oberen Grenze $(\xi, \eta)$. Wenn wir dagegen den Integrationsweg nicht auf das Innere des einfach zusammenhängenden Bereiches $\overline{T}$ beschränken, sondern innerhalb $T$ willkürlich lassen, so wird die Integralmatrix im allgemeinen unendlich vieldeutig sein. Um den Zusammenhang dieser unendlich vielen Determinationen mit $(\bar{u}_{i\varkappa})$ herzustellen, betrachten wir an den beiden Ufern des Querschnitts $l_\lambda$ die Paare einander gegenüberliegender Punkte. Ein solches Punktepaar besteht aus zwei Punkten, die zwar topologisch wohl voneinander unterschieden sind, die aber dieselben Koordinaten $(\xi, \eta)$ haben. Es sei $A$ ein Punkt auf dem negativen Ufer, $A'$ der gegenüberliegende, $B$ ein anderer Punkt auf dem negativen Ufer, $B'$ der gegenüberliegende; wenn wir die Werte der eindeutig bestimmten Funktionen $\bar{u}_{i\varkappa}$ in den Punkten $A$, $A'$, $B$, $B'$ durch $u_{i\varkappa}(A)$ usw. bezeichnen, so folgt nach den Ergebnissen der vorigen Vorlesung:

$$(\bar{u}_{i\varkappa}(B)) = (\bar{u}_{i\varkappa}(A)) \cdot (\overline{T})\widehat{\int_A^B}(\alpha_{i\varkappa}^{(1)} d\xi + \alpha_{i\varkappa}^{(2)} d\eta + \delta_{i\varkappa}),$$

$$(\bar{u}_{i\varkappa}(B')) = (\bar{u}_{i\varkappa}(A')) \cdot (\overline{T})\widehat{\int_{A'}^{B'}}(\alpha_{i\varkappa}^{(1)} d\xi + \alpha_{i\varkappa}^{(2)} d\eta + \delta_{i\varkappa}).$$

Die innerhalb $\overline{T}$ von $A$ bis $B$ bezw. von $A'$ bis $B'$ zu erstreckenden Integralmatrizen, können z. B. längs zweier Kurven genommen werden, die dem negativen bezw. dem positiven Ufer des Querschnitts $l_\lambda$ unendlich benachbart sind, so daß also beidemal Punkte mit denselben Koordinaten $(\xi, \eta)$ durchlaufen werden. Diese beiden Integralmatrizen sind folglich identisch; d. h. wir erhalten:

$$(\bar{u}_{i\varkappa}(A))^{-1}(\bar{u}_{i\varkappa}(B)) = (\bar{u}_{i\varkappa}(A'))^{-1}(\bar{u}_{i\varkappa}(B'));$$

es ist folglich

$$(\bar{u}_{i\varkappa}(B'))(\bar{u}_{i\varkappa}(B))^{-1} = (\bar{u}_{i\varkappa}(A'))(\bar{u}_{i\varkappa}(A))^{-1} = (c_{i\varkappa}^{(\lambda)})$$

eine Matrix, die von der Wahl des auf den beiden Ufern von $l_\lambda$ gelegenen Punktepaares $A, A'$ bezw. $B, B'$ unabhängig ist. D. h. wenn $A, A'$ irgendein solches Punktepaar bedeutet, so ist stets:

$$(\bar{u}_{i\varkappa}(A')) = (c_{i\varkappa}^{(\lambda)})(\bar{u}_{i\varkappa}(A)). \tag{2}$$

Bedeutet nun $C_\lambda$ einen von $(\xi_0, \eta_0)$ nach $(\xi, \eta)$ hinführenden, ganz innerhalb $T$ verlaufenden Weg, der den Querschnitt $l_\lambda$ und nur diesen vom positiven nach dem negativen Ufer hin überschreitet, so ist

$$\begin{aligned} C_\lambda\overset{\frown}{\int_{(\xi_0,\eta_0)}^{(\xi,\eta)}} &= C_\lambda\overset{\frown}{\int_{(\xi_0,\eta_0)}^{A'}} \cdot C_\lambda\overset{\frown}{\int_{A}^{(\xi,\eta)}}, \\ &= (\bar{u}_{i\varkappa}(A')) \cdot C_\lambda\overset{\frown}{\int_{A}^{(\xi,\eta)}}, \end{aligned}$$

dagegen

$$\begin{aligned} (\bar{u}_{i\varkappa}) = (\bar{T})\overset{\frown}{\int_{(\xi_0,\eta_0)}^{(\xi,\eta)}} &= (\bar{T})\overset{\frown}{\int_{(\xi_0,\eta_0)}^{A}} \cdot C_\lambda\overset{\frown}{\int_{A}^{(\xi,\eta)}}, \\ &= (\bar{u}_{i\varkappa}(A)) \cdot C_\lambda\overset{\frown}{\int_{A}^{(\xi,\eta)}}, \end{aligned}$$

wo wir der Kürze wegen den unter den Integralmatrixzeichen stehenden Ausdruck weggelassen haben. Wir erhalten folglich mit Rücksicht auf (2)

$$C_\lambda\overset{\frown}{\int_{(\xi_0,\eta_0)}^{(\xi,\eta)}} = (c_{i\varkappa}^{(\lambda)})(\bar{u}_{i\varkappa}). \tag{3}$$

Überschritte der Integrationsweg den Querschnitt $l_\lambda$ in der Richtung vom negativen Ufer nach dem positiven hin, so wäre der Wert der längs diesem Wege erstreckten Integralmatrix $(c_{i\varkappa}^{(\lambda)})^{-1}(\bar{u}_{i\varkappa})$; allgemein ergibt sich, daß die von $(\xi_0, \eta_0)$ nach $(\xi, \eta)$ auf einem beliebigen, innerhalb $T$ verlaufenden Wege erstreckte Integralmatrix aus $(\bar{u}_{i\varkappa})$ hervorgeht, indem man $(\bar{u}_{i\varkappa})$ von links her mit einer konstanten Matrix komponiert, die ihrerseits aus den $\sigma$ Matrizen

$$(c_{i\varkappa}^{(1)}), \ldots, (c_{i\varkappa}^{(\sigma)}) \tag{4}$$

und deren Inversen zusammengesetzt ist und nur davon abhängt, wie

oft, in welcher Reihenfolge und in welcher Richtung der Integrationsweg die Schnitte $l_1, \ldots, l_\sigma$ überschreitet.

Wenn die Funktionalmatrix $(\bar{u}_{i\varkappa})$ von links her mit der konstanten Matrix $(c_{i\varkappa})$ komponiert wird, so sagen wir von der Matrix

$$(c_{i\varkappa})(\bar{u}_{i\varkappa}) = \left(\sum_{\nu=1}^{m} c_{i\nu}\,\bar{u}_{\nu\varkappa}\right),$$

daß sie aus $(\bar{u}_{i\varkappa})$ durch Anwendung der linearen Substitution $(c_{i\varkappa})$ hervorgehe. Die Gesamtheit aller linearen Substitutionen, die auf $(\bar{u}_{i\varkappa})$ anzuwenden sind, um alle Determinationen zu erhalten, deren die Integralmatrix

$$\int\limits_{(\xi_0,\,\eta_0)}^{\widehat{(\xi,\,\eta)}} (\alpha^{(1)}_{i\varkappa} d\xi + \alpha^{(2)}_{i\varkappa} d\eta + \delta_{i\varkappa})$$

fähig ist, wenn der Integrationsweg innerhalb $T$ beliebig angenommen wird, bildet offenbar eine Gruppe $G$. Diese Gruppe enthält die Gesamtheit aller Substitutionen, die aus den $\sigma$ Substitutionen (4) und ihren inversen in irgendeiner Reihenfolge komponiert sind; man nennt darum die Substitutionen (4) ein System von Fundamentalsubstitutionen dieser Gruppe $G$.

Wenn für den Integrationsweg $L$

$$L\int\limits_{(\xi_0,\,\eta_0)}^{\widehat{(\xi,\,\eta)}} = (c_{i\varkappa})(\bar{u}_{i\varkappa})$$

ist, so erhalten wir, indem wir $L$ mit einem Wege $C$ zusammensetzen, der von $(\xi, \eta)$ nach $(\xi_0, \eta_0)$ hinführt und ganz innerhalb $\bar{T}$ verläuft, einen geschlossenen Weg innerhalb des $(\sigma + 1)$fach zusammenhängenden Bereiches $T$, der von $(\xi_0, \eta_0)$ ausgeht und zu diesem Punkte zurückkehrt. Offenbar ist dann $(c_{i\varkappa})$ nichts anderes als der Wert der auf diesem geschlossenen Wege genommenen Integralmatrix. Hiernach hängt der Wert einer auf einem geschlossenen Wege genommenen Integralmatrix wesentlich von der Reihenfolge und der Richtung ab, in der jener Weg die Querschnitte überschreitet. Es verdient aber besonders betont zu werden, daß in unserer Theorie auch der Ausgangspunkt $(\xi_0, \eta_0)$ einen wesentlichen Einfluß auf die Wertbestimmung der längs einer geschlossenen Kurve hin erstreckten Integralmatrix ausübt.*)

*) Für das gewöhnliche Integral eines totalen Differentials $\int(P d\xi + Q d\eta)$, wo $P$, $Q$ innerhalb $T$ eindeutig und endlich sind, ist der Wert des über eine geschlossene Kurve genommenen Integrals bekanntlich unabhängig von der Wahl des Ausgangspunktes.

bedeutet nämlich $\Gamma$ irgendeinen von $(\xi_0, \eta_0)$ ausgehenden geschlossenen Weg innerhalb $T$ und $(\xi_1, \eta_1)$ einen von $(\xi_0, \eta_0)$ verschiedenen Punkt auf $\Gamma$, so ist, wenn wir

$$\Gamma \int\limits_{(\xi_0,\eta_0)}^{\overset{(\xi_0,\eta_0)}{\frown}} = (\gamma_{i\varkappa})$$

setzen, die von $(\xi_1, \eta_1)$ als Anfangspunkt längs $\Gamma$ genommene Integralmatrix

$$\Gamma \int\limits_{(\xi_1,\eta_1)}^{\overset{(\xi_1,\eta_1)}{\frown}} = \int\limits_{(\xi_1,\eta_1)}^{\overset{(\xi_0,\eta_0)}{\frown}} \cdot \int\limits_{(\xi_0,\eta_0)}^{\overset{(\xi_1,\eta_1)}{\frown}},$$

und folglich, da

$$\Gamma \int\limits_{(\xi_0,\eta_0)}^{\overset{(\xi_0,\eta_0)}{\frown}} = \int\limits_{(\xi_0,\eta_0)}^{\overset{(\xi_1,\eta_1)}{\frown}} \cdot \int\limits_{(\xi_1,\eta_1)}^{\overset{(\xi_0,\eta_0)}{\frown}}$$

ist,

$$\Gamma \int\limits_{(\xi_1,\eta_1)}^{\overset{(\xi_1,\eta_1)}{\frown}} = \int\limits_{(\xi_1,\eta_1)}^{\overset{(\xi_0,\eta_0)}{\frown}} \cdot \Gamma \int\limits_{(\xi_0,\eta_0)}^{\overset{(\xi_0,\eta_0)}{\frown}} \cdot \Big( \int\limits_{(\xi_1,\eta_1)}^{\overset{(\xi_0,\eta_0)}{\frown}} \Big)^{-1},$$

wo alle Integralmatrizen längs Stücken von $\Gamma$ und zwar natürlich immer in einer und derselben von vornherein festgesetzten Richtung zu erstrecken sind. Wir haben also, wenn wir

$$\int\limits_{(\xi_1,\eta_1)}^{\overset{(\xi_0,\eta_0)}{\frown}} = (\tau_{i\varkappa})$$

setzen,

$$\Gamma \int\limits_{(\xi_1,\eta_1)}^{\overset{(\xi_1,\eta_1)}{\frown}} = (\tau_{i\varkappa})(\gamma_{i\varkappa})(\tau_{i\varkappa})^{-1}. \tag{5}$$

Man sagt von der Matrix $(\tau_{i\varkappa})(\gamma_{i\varkappa})(\tau_{i\varkappa})^{-1}$, daß sie aus $(\gamma_{i\varkappa})$ durch Transformation mit der Matrix $(\tau_{i\varkappa})$ hervorgeht. Natürlich muß die Determinante der transformierenden Matrix von Null verschieden sein. Matrizen, die auseinander durch Transformation hervorgehen, nennt man wohl auch ähnlich. Offenbar haben ähnliche Matrizen dieselbe Determinante; die notwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür, daß zwei Matrizen ähnlich seien, werden wir später aufzustellen haben; diese Bedingungen sind für unsere Theorie von der größten Wichtigkeit. — Wir sehen, daß durch Änderung des Ausgangspunktes,

allgemein zu reden, der Wert der längs einer geschlossenen Kurve erstreckten Integralmatrix sich ebenfalls ändert; alle diese verschiedenen Matrizen sind jedoch untereinander ähnlich.

Wenden wir die in bezug auf die geschlossenen Integralmatrizen (so sagen wir kurz statt Integralmatrix auf geschlossenem Wege) gemachten Bemerkungen auf die Gleichung (3) an, so erkennen wir, daß die zu dem Schnitte $l_\lambda$ gehörige Fundamentalsubstitution $(c_{i\varkappa}^{(\lambda)})$ auch in folgender Weise definiert werden kann.

Bedeutet $s_\lambda$ einen von $(\xi_0, \eta_0)$ ausgehenden geschlossenen Weg, der den Querschnitt $l_\lambda$, und nur diesen, einmal in der Richtung vom positiven nach dem negativen Ufer hin überschreitet, so ist

$$s_\lambda \int\limits_{(\xi_0,\, \eta_0)}^{\overbrace{(\xi_0,\, \eta_0)}} (\alpha_{i\varkappa}^{(1)} d\xi + \alpha_{i\varkappa}^{(2)} d\eta + \delta_{i\varkappa}) = (c_{i\varkappa}^{(\lambda)}).$$

* * *

Wir verlassen jetzt die allgemeine Theorie der komplet integrablen totalen Differentialsysteme (T) und wenden uns zu dem speziellen Systeme (R) zurück, das wir in der vorigen Vorlesung aus dem gewöhnlichen Differentialsyteme (B) (siehe S. 50) durch rein formale Trennung der realen und imaginären Teile gewonnen haben.

Bezeichnen wir die $2n$ Größen

$$u_1, \dots, u_n, \quad v_1, \dots, v_n$$

in dieser Reihenfolge mit

$$w_1, \dots, w_{2n},$$

so können wir das System (R) in der Form

$$\text{(R')} \qquad dw_\varkappa = d\xi \sum_{\lambda=1}^{2n} w_\lambda \alpha_{\lambda\varkappa}^{(1)} + d\eta \sum_{\lambda=1}^{2n} w_\lambda \alpha_{\lambda\varkappa}^{(2)}$$

schreiben, wo dann die Koeffizientenmatrizen $(\alpha_{i\varkappa}^{(1)})$, $(\alpha_{i\varkappa}^{(2)})$ in leicht verständlicher Weise durch die folgenden Schemata dargestellt sind:

$$\underset{(i,\, \varkappa = 1, 2, \dots, 2n)}{(\alpha_{i\varkappa}^{(1)})} = \begin{pmatrix} \underset{(i,\, \varkappa = 1, 2, \dots, n)}{\alpha_{i\varkappa}} & \underset{\left(\substack{i = n+1, \dots, 2n \\ \varkappa = 1, 2, \dots, n}\right)}{\beta_{i-n,\, \varkappa}} \\ \underset{\left(\substack{i = 1, 2, \dots, n \\ \varkappa = n+1, \dots, 2n}\right)}{-\beta_{i,\, \varkappa-n}} & \underset{(i,\, \varkappa = n+1, \dots, 2n)}{\alpha_{i-n,\, \varkappa-n}} \end{pmatrix},$$

$$(\alpha_{ix}^{(2)})_{(i,x=1,2,\cdots,2n)} = \begin{pmatrix} -\beta_{ix} & \alpha_{i-n,x} \\ {\scriptstyle (i,x=1,2,\cdots,n)} & {\scriptstyle \left(\begin{smallmatrix} i=n+1,\cdots,2n \\ x=1,2,\cdots,n \end{smallmatrix}\right)} \\ -\alpha_{i,x-n} & -\beta_{i-n,x-n} \\ {\scriptstyle \left(\begin{smallmatrix} i=1,2,\cdots,n \\ x=n+1,\cdots,2n \end{smallmatrix}\right)} & {\scriptstyle (i,x=n+1,\cdots,2n)} \end{pmatrix}.$$

Überdies hat das System (R') noch die besondere Eigenschaft, in sich selbst überzugehen, wenn man

$$u_1, \ldots, u_n, \quad v_1, \ldots, v_n$$

durch

$$-v_1, \ldots, -v_n, \quad u_1, \ldots, u_n$$

ersetzt; d. h., wenn $w_1, \ldots, w_{2n}$ ein Lösungssystem von (R') bedeutet, so stellt

$$-w_{n+1}, \ldots, -w_{2n}, w_1, \ldots w_n$$

ein zweites Lösungssystem dar. Wir können diese Eigenschaft als die involutorische bezeichnen, da die zweimalige Ausnützung derselben auf die Identität führt.

Es mögen nun die Koeffizienten $a_{ix}$ des Systems (B) in dem einfach zusammenhängenden Bereiche $S$ der komplexen $x$-Ebene monogene und holomorphe Funktionen der komplexen Variabeln $x$ sein. Dann sind die $\alpha_{ix}$, $\beta_{ix}$ innerhalb $S$ eindeutige und beliebig oft differentiierbare Funktionen der beiden realen Variabeln $\xi$, $\eta$, und es ist, vermöge der Monogeneität der $a_{ix}$:

$$\frac{\partial \alpha_{ix}}{\partial \xi} = \frac{\partial \beta_{ix}}{\partial \eta}, \quad \frac{\partial \alpha_{ix}}{\partial \eta} = -\frac{\partial \beta_{ix}}{\partial \xi}. \quad (i, x = 1, 2, \ldots, n)$$

Man übersieht nun sofort, daß vermöge dieser Beziehungen die durch die obigen Schemata gegebenen $\alpha_{ix}^{(1)}$, $\alpha_{ix}^{(2)}$ $(i, x = 1, 2, \ldots, 2n)$, wenn man $2n = m$ setzt, die als Integrabilitätsbedingungen bezeichneten Relationen (C) (S. 54) befriedigen. Unser System (R') ist also komplett integrabel, und wir können demnach alle für das allgemeine System (T) gefundenen Ergebnisse auf (R') anwenden.

Ehe wir dies tun, machen wir nur noch eine formale Bemerkung, die nicht ohne Interesse ist.

Wir denken uns ein System von der Form (R') gegeben, dessen Koeffizienten $\alpha_{ix}^{(1)}$, $\alpha_{ix}^{(2)}$ $(i, x = 1, 2, \ldots, 2n)$ durch gewisse $2n^2$ reale Funktionen $\alpha_{ix}$, $\beta_{ix}$ $(i, x = 1, 2, \ldots, n)$ in der durch die obigen Schemata bestimmten Weise dargestellt werden können. Wenn dann dieses System (R') komplett integrabel ist, d. h. wenn seine Koeffizienten die Bedingungen (C) erfüllen, so ist z. B. für $i \leqq n$, $x \leqq n$

$$\frac{\partial \alpha_{i\varkappa}}{\partial \eta} + \sum_{\nu=1}^{n} (-\beta_{i\nu} \cdot \alpha_{\nu\varkappa} + (-\alpha_{i\nu})\beta_{\nu\varkappa})$$

$$= \frac{\partial(-\beta_{i\varkappa})}{\partial \xi} + \sum_{\nu=1}^{n} (\alpha_{i\nu}(-\beta_{\nu\varkappa}) + (-\beta_{i\nu})\alpha_{\nu\varkappa}),$$

d. h. es ist

$$\frac{\partial \alpha_{i\varkappa}}{\partial \eta} = -\frac{\partial \beta_{i\varkappa}}{\partial \xi},$$

und ebenso folgt aus den übrigen der Bedingungen (C)

$$\frac{\partial \alpha_{i\varkappa}}{\partial \xi} = \frac{\partial \beta_{i\varkappa}}{\partial \eta}.$$

Es sind also die $\alpha_{i\varkappa} + \sqrt{-1}\,\beta_{i\varkappa}$ $(i, \varkappa = 1, 2, \ldots, n)$ monogene Funktionen der komplexen Variabeln $\xi + \eta\sqrt{-1}$, d. h. wir haben den Satz:

Die aus den gewöhnlichen Differentialsystemen (B) mit komplexer unabhängiger Variabeln und monogenen Koeffizienten durch Trennung der realen und imaginären Teile hervorgehenden totalen Differentialsysteme (R) sind die allgemeinsten komplett integrablen Differentialsysteme von der Form (R'), deren Koeffizienten in der Form der obigen Schemata darstellbar sind.

Wir bilden uns nunmehr für das System (R') die innerhalb des einfach zusammenhängenden Bereiches $S$ eindeutig determinierte Integralmatrix

$$(6) \qquad (w_{i\varkappa}) = (S)\int_{(\xi_0,\,\eta_0)}^{(\xi,\,\eta)} (\alpha_{i\varkappa}^{(1)} d\xi + \alpha_{i\varkappa}^{(2)} d\eta + \delta_{i\varkappa}), \qquad (i, \varkappa = 1, 2, \cdots, 2n)$$

die sich in dem innerhalb $S$ gelegenen Punkte $(\xi_0, \eta_0)$ auf $(\delta_{i\varkappa})$ reduziert.

Betrachten wir die durch die $n$ ersten Horizontalreihen dieser Matrix dargestellten Integralsysteme

$$(7) \qquad w_{i1},\ w_{i2}, \ldots,\ w_{i,2n}, \qquad (i = 1, 2, \cdots, n)$$

dann stellen nach einer oben gemachten Bemerkung auch

$$(8) \qquad -w_{i,\,n+1},\ -w_{i,\,n+2}, \cdots, -w_{i,\,2n},\ w_{i1},\ w_{i2}, \ldots,\ w_{in} \quad (i = 1, 2, \cdots, n)$$

$n$ Integralsysteme von (R') dar. Die $2n$ Integralsysteme (7) und (8) konstituieren aber zusammengenommen eine Integralmatrix von (R'), die sich offenbar im Punkte $(\xi_0, \eta_0)$ auf $(\delta_{i\varkappa})$ reduziert, und die folglich mit der Integralmatrix $(w_{i\varkappa})$, wie sie durch (6) gegeben ist, identisch sein muß. Setzen wir also:

$$\left.\begin{aligned} w_{i\varkappa} &= u_{i\varkappa}, \\ w_{i,\lambda+n} &= v_{i\lambda} \end{aligned}\right\} \qquad (i, \varkappa, \lambda = 1, 2, \cdots, n)$$

so können wir die Integralmatrix (6) durch das Schema

$$(9) \qquad \underset{(i,\,\varkappa=1,2,\cdots,2n)}{(w_{i\varkappa})} = \begin{pmatrix} u_{i\varkappa} & v_{i-n,\,\varkappa} \\ -v_{i,\,\varkappa-n} & u_{i-n,\,\varkappa-n} \end{pmatrix}$$

darstellen. Da ferner

$$D_\xi(w_{i\varkappa}) = (\alpha_{i\varkappa}^{(1)}), \quad D_\eta(w_{i\varkappa}) = (\alpha_{i\varkappa}^{(2)}),$$

so folgt, wenn wir die Art und Weise beachten, wie sich die $\alpha_{i\varkappa}^{(1)}$, $\alpha_{i\varkappa}^{(2)}$ durch die $\alpha_{i\varkappa}$, $\beta_{i\varkappa}$ ausdrücken, daß

$$(10) \qquad \frac{\partial u_{i\varkappa}}{\partial \xi} = \frac{\partial v_{i\varkappa}}{\partial \eta}, \quad \frac{\partial u_{i\varkappa}}{\partial \eta} = -\frac{\partial v_{i\varkappa}}{\partial \xi}. \qquad (i, \varkappa = 1, 2, \cdots, n)$$

Die Elemente der Matrix

$$(11) \qquad (y_{i\varkappa}) = (u_{i\varkappa} + \sqrt{-1}\, v_{i\varkappa}) \qquad (i, \varkappa = 1, \cdots, n)$$

sind folglich monogene Funktionen der komplexen Variabeln

$$x = \xi + \sqrt{-1}\,\eta,$$

die sich für den Punkt

$$x_0 = \xi_0 + \sqrt{-1}\,\eta_0$$

auf die Einheitsmatrix $(\delta_{i\varkappa})$ reduzieren, und die Horizontalreihen der Matrix (11) stellen offenbar Lösungssysteme des Differentialsystems (B) dar. Wir schreiben die Matrix (11) in der Form

$$(12) \qquad (y_{i\varkappa}) = (S)\int\limits_{x_0}^{\frown x}(\alpha_{i\varkappa}dx + \delta_{i\varkappa})$$

und nennen sie eine Integralmatrix des Systems (B). Die monogenen Funktionen $y_{i\varkappa}$ sind natürlich innerhalb $S$ holomorph, und wir haben somit die Existenz der dem Differentialsysteme (B) genügenden monogenen und innerhalb $S$ holomorphen Integralmatrix, die sich im Punkte $x_0$ auf $(\delta_{i\varkappa})$ reduziert, in der Weise bewiesen, daß die Zusammensetzung der Elemente dieser Matrix aus ihren realen und imaginären Teilen zur Evidenz gebracht ist.

* * *

Von einer realen Matrix mit $(2n)^2$ Elementen $w_{i\varkappa}$, die aus den $2n^2$ realen Elementen

$$u_{i\varkappa}, \quad v_{i\varkappa} \qquad (i, \varkappa = 1, \cdots, n)$$

nach dem Schema (vgl. (9))

$$(w_{i\varkappa})_{(i,\varkappa=1,2,\cdots,2n)} = \begin{pmatrix} u_{i\varkappa} & v_{i-n,\varkappa} \\ {\scriptstyle (i,\varkappa=1,2,\cdots,n)} & {\scriptstyle \left(\begin{smallmatrix} i=n+1,\cdots,2n \\ \varkappa=1,2,\cdots,n \end{smallmatrix}\right)} \\ -v_{i,\varkappa-n} & u_{i-n,\varkappa-n} \\ {\scriptstyle \left(\begin{smallmatrix} i=1,2,\cdots,n \\ \varkappa=n+1,\cdots,2n \end{smallmatrix}\right)} & {\scriptstyle (i,\varkappa=n+1,\cdots,2n)} \end{pmatrix}$$

zusammengesetzt ist, wollen wir sagen, daß sie eine **gespaltene Matrix** sei, und daß sie aus der komplexen Matrix

$$(u_{i\varkappa} + \sqrt{-1}\, v_{i\varkappa}) \qquad (i,\varkappa=1,2,\cdots,n)$$

durch **Spaltung** hervorgeht. — Für diese gespaltenen Matrizen gilt eine Anzahl interessanter algebraischer Sätze. Wir wollen hier nur einige Eigenschaften dieser Matrizen erwähnen, deren wir im folgenden bedürfen.

I. Es seien

$$\left.\begin{aligned} (c_{i\varkappa}) &= (\gamma_{i\varkappa} + \varepsilon_{i\varkappa}\sqrt{-1}) \\ (y_{i\varkappa}) &= (u_{i\varkappa} + v_{i\varkappa}\sqrt{-1}) \end{aligned}\right\} \qquad (i,\varkappa=1,2,\cdots,n)$$

zwei komplexe Matrizen; dann ist die aus der komponierten Matrix $(c_{i\varkappa})(y_{i\varkappa})$ durch Spaltung hervorgehende Matrix aus den beiden Matrizen, die aus $(c_{i\varkappa})$, $(y_{i\varkappa})$ durch Spaltung hervorgehen, in derselben Reihenfolge komponiert. — Eine Matrix, die aus gespaltenen Matrizen komponiert ist, ist selbst wieder gespalten. Der Beweis ist evident.

II. Da die Einheitsmatrix $(\delta_{i\varkappa})$ $(i, \varkappa = 1, 2, \ldots, 2n)$ gespalten ist, folgt nach I, daß die aus $(c_{i\varkappa})^{-1}$ durch Spaltung hervorgehende Matrix die inverse der aus $(c_{i\varkappa})$ durch Spaltung hervorgegangenen Matrix ist. Die inverse einer gespaltenen Matrix ist selbst gespalten.

III. Es sei

$$(y_{i\varkappa}) = (u_{i\varkappa} + \sqrt{-1}\, v_{i\varkappa}) \qquad (i,\varkappa,=1,2,\cdots,n)$$

eine monogene Matrix, d. h. ihre Elemente seien monogene Funktionen der komplexen Variabeln $x = \xi + \sqrt{-1}\,\eta$. Wenn dann die Determinante von $(y_{i\varkappa})$ nicht identisch verschwindet, so setzen wir, wie für reale Variable,

$$D_x(y_{i\varkappa}) = (y_{i\varkappa})^{-1}\left(\frac{dy_{i\varkappa}}{dx}\right).$$

Bezeichnen wir dann mit $(w_{i\varkappa})$ $(i, \varkappa = 1, 2, \ldots, 2n)$ die Matrix, die aus $(y_{i\varkappa})$ durch Spaltung entsteht, so geht

$$D_\xi(w_{i\varkappa}) \quad \text{aus} \quad D_x(y_{i\varkappa}),$$
$$D_\eta(w_{i\varkappa}) \quad \text{aus} \quad \sqrt{-1}\, D_x(y_{i\varkappa})$$

durch Spaltung hervor.

* * *

Nicht jede Integralmatrix des totalen Differentialsystems (B') ist eine gespaltene Matrix; von der Integralmatrix $(\varkappa_{i\varkappa})$, die für $(\xi_0, \eta_0)$ in die Einheitsmatrix übergeht, haben wir nachgewiesen, daß sie gespalten ist, und im Sinne des Satzes I werden wir stets gespaltene Integralmatrizen erhalten, wenn wir $(\varkappa_{i\varkappa})$ von links her mit einer beliebigen konstanten und gespaltenen Matrix nichtverschwindender Determinante komponieren. D. h. mit anderen Worten:

Eine Integralmatrix von (B'), die sich für irgendeinen bestimmten Punkt $(\xi_0, \eta_0)$ auf eine gespaltene Matrix reduziert, ist für jeden Punkt des Bereiches $S$ gespalten.

Bedeutet also $(c_{i\varkappa})$ eine beliebige konstante, komplexe Matrix mit nichtverschwindender Determinante, so ist die aus

$$(c_{i\varkappa})(y_{i\varkappa}) \qquad (i, \varkappa = 1, 2, \cdots, n) \tag{13}$$

durch Spaltung hervorgehende Matrix die allgemeinste gespaltene Integralmatrix von (B'), und folglich ist (13) selbst die allgemeinste Integralmatrix des komplexen Differentialsystems

$$\frac{dy_\varkappa}{dx} = \sum_{i=1}^{n} y_i a_{i\varkappa}. \qquad (\varkappa = 1, 2, \cdots, n) \tag{B}$$

Mit Rücksicht auf den Satz III folgt nunmehr, daß die in der zweiten Vorlesung für reale Variable abgeleiteten Regeln (I) — (XI) ohne weiteres auch für komplexe Variable gültig bleiben, wenn wir uns auf das einfach zusammenhängende Gebiet $S$ beschränken, innerhalb dessen die Koeffizienten $a_{i\varkappa}$ des Systems (B) holomorph sind.

Ferner folgt aus den für die komplett integrablen totalen Differentialsysteme bewiesenen Sätzen in Verbindung mit den Sätzen I, II, daß für die Integralmatrizen des komplexen Systems (B) die folgenden Sätze gelten:

1) Wenn die Koeffizienten $a_{i\varkappa}$ von (B) in dem mehrfach zusammenhängenden Bereiche $T$ holomorph sind,*) und wenn wir unter der längs einer die Punkte $x_0$ und $x$ verbindenden Kurve $C$ genommenen komplexen Integralmatrix

*) Darunter ist das Folgende zu verstehen. Die $a_{i\varkappa}$ sind erstens in der Umgebung jeder einzelnen Stelle von $T$ holomorph und zweitens in $T$ selbst eindeutig, d. h. sie erleiden keine Wertänderung, wenn die unabhängige Variable $x$ einen beliebigen geschlossenen Weg innerhalb $T$ beschreibt. — Aus der Holomorphie in der Umgebung jeder Stelle von $T$ folgt — wenn $T$ mehrfach zusammenhängend ist — noch nicht die Holomorphie in $T$. —

$$C\int_{x_0}^{x}(a_{i\varkappa}\,dx + \delta_{i\varkappa})$$

diejenige komplexe Matrix verstehen, aus der die Matrix

$$C\int_{(\xi_0,\,\eta_0)}^{(\xi,\,\eta)}(\alpha_{i\varkappa}^{(1)}d\xi + \alpha_{i\varkappa}^{(2)}d\eta + \delta_{i\varkappa}),$$

die zu dem Systeme (R′) gehört, durch Spaltung hervorgeht, so ist

$$(14)\qquad \Gamma\int_{x_0}^{x_0}(a_{i\varkappa}\,dx + \delta_{i\varkappa}) = (\delta_{i\varkappa}),$$

wenn die geschlossene Kurve $\Gamma$ die vollständige Begrenzung eines einfach zusammenhängenden Teilbereiches von $T$ ausmacht.

2) Bedeutet $C$ eine die Punkte $x_0$, $x$ verbindende ganz innerhalb der einfach zusammenhängenden Fläche $\overline{T}$ genommene Kurve, so ist

$$(\overline{y}_{i\varkappa}) = C\int_{x_0}^{x}(a_{i\varkappa}dx + \delta_{i\varkappa}) = (\overline{T})\int_{x_0}^{x}(a_{i\varkappa}dx + \delta_{i\varkappa})$$

von der besonderen Wahl der Kurve $C$ unabhängig, die $\overline{y}_{i\varkappa}$ sind also innerhalb $\overline{T}$ eindeutig determinierte Funktionen der oberen Grenze $x$. In gegenüberliegenden Punkten $A$, $A'$ des negativen bezw. positiven Ufers von $l_\lambda$ unterscheiden sich die Werte von $(\overline{y}_{i\varkappa})$ durch eine längs des ganzen Querschnitts $l_\lambda$ unveränderliche, links komponierende konstante Matrix $(c_{i\varkappa}^{(\lambda)})$, so zwar, daß:

$$(15)\qquad (\overline{y}_{i\varkappa}(A')) = (c_{i\varkappa}^{(\lambda)})(\overline{y}_{i\varkappa}(A))$$

ist.

3) Bedeutet $C_\lambda$ einen von $x_0$ nach $x$ hinführenden, ganz innerhalb $T$ verlaufenden Weg, der den Querschnitt $l_\lambda$ und nur diesen einmal in der Richtung vom positiven nach dem negativen Ufer hin überschreitet, so ist

$$(16)\qquad C_\lambda\int_{x_0}^{x}(a_{i\varkappa}dx + \delta_{i\varkappa}) = (c_{i\varkappa}^{(\lambda)})(\overline{y}_{i\varkappa}).$$

Überschreitet der Integrationsweg den Schnitt $l_\lambda$ in der entgegengesetzten Richtung, so tritt an die Stelle von $(c_{i\varkappa}^{(\lambda)})$ die inverse Matrix

$(c_{i\varkappa}^{(\lambda)})^{-1}$. Allgemein geht die längs eines beliebigen innerhalb $T$ verlaufenden, die Punkte $x_0$, $x$ verbindenden Weges erstreckte Integralmatrix

$$(17)\qquad (T)\overbrace{\int_{x_0}^{x}}(a_{i\varkappa}dx + \delta_{i\varkappa}) = (y_{i\varkappa})$$

aus $(\bar{y}_{i\varkappa})$ durch Anwendung einer linearen Substitution hervor*), die nur von der Reihenfolge und der Richtung abhängt, in der jener Weg die Schnitte $l_1, \ldots, l_\sigma$ überschreitet, und die aus den $\sigma$ Matrizen oder Substitutionen

$$(18)\qquad (c_{i\varkappa}^{(1)}), \ldots, (c_{i\varkappa}^{(\sigma)})$$

und deren inversen komponiert ist. Die Gesamtheit aller Substitutionen, die auf diese Weise zum Vorschein kommen, ist offenbar mit der Gesamtheit derjenigen Substitutionen identisch, die aus den $\sigma$ Fundamentalsubstitutionen (18) und deren inversen auf irgendeine Weise komponiert sind; diese Gesamtheit bildet eine Gruppe $G$, wir nennen sie die zu dem Bereiche $T$ gehörige Monodromiegruppe der Integralmatrix

$$(T)\overbrace{\int_{x_0}^{x}}(a_{i\varkappa}dx + \delta_{i\varkappa}) = (y_{i\varkappa}).$$

Die Elemente dieser Integralmatrix sind also, allgemein zu reden, unendlich vieldeutige Funktionen von $x$, die verschiedenen Determinationen von $y_{i\varkappa}$ sind in der Form

$$\sum_{\nu=1}^{n} c_{i\nu}\bar{y}_{\nu\varkappa}$$

darstellbar, wo $(c_{i\varkappa})$ irgendeine Substitution der Gruppe $G$ bedeutet, und wir können sagen, daß diese Determinationen den verschiedenen Integrationswegen entsprechen, längs denen die Integralmatrix (17) erstreckt werden kann. Dabei sind zwei von $x_0$ nach $x$ führende Integrationswege dann als nicht voneinander verschieden oder äquivalent zu betrachten, wenn sie durch stetige Deformation innerhalb $T$ ineinander übergeführt werden können, oder mit anderen Worten, wenn sie die Querschnitte $l_1, \ldots, l_\sigma$ in derselben Reihenfolge und in derselben Richtung überschreiten.

*) Vgl. S. 71.

4) Die Fundamentalsubstitutionen $(c_{i\varkappa}^{(\lambda)})$ sind nichts anderes als die Werte der längs der von $x_0$ ausgehenden geschlossenen Kurven $s_\lambda$ erstreckten Integralmatrix,

$$(19) \qquad (s_\lambda)\overbrace{\int_{x_0}^{x_0}}(a_{i\varkappa}dx + \delta_{i\varkappa}) = (c_{i\varkappa}^{(\lambda)}), \qquad (\lambda = 1, 2, \cdots, \sigma)$$

wo $s_\lambda$ den Querschnitt $l_\lambda$ und nur diesen in der Richtung vom positiven Ufer nach dem negativen hin überschreitet. Bedeutet $\Gamma$ irgend eine von $x_0$ ausgehende und innerhalb $T$ verlaufende Kurve, so ist

$$(20) \qquad \Gamma\overbrace{\int_{x_0}^{x_0}}(a_{i\varkappa}dx + \delta_{i\varkappa}) = (c_{i\varkappa})$$

eine Substitution der Gruppe $G$, und umgekehrt kann jede Substitution von $G$ durch eine solche geschlossene Integralmatrix dargestellt werden. Hiernach ist klar, daß die Substitutionen von $G$ nichts anderes sind, als die Gesamtheit der Wertmatrizen, deren die unendlich vieldeutige Matrix (17) im Punkte $x_0$ fähig ist.

Da der Wert der längs $\Gamma$ erstreckten Integralmatrix, nach einer für die Integralmatrizen totaler Differentialsysteme gemachten Bemerkung (siehe oben S. 71), noch wesentlich von der Wahl des Ausgangspunktes $x_0$ abhängt, so ist ohne weiteres klar, daß auch die Gruppe $G$ selbst von dem Punkte $x_0$ abhängig sein wird. Um die Art dieser Abhängigkeit festzustellen, verfahren wir, wie folgt:

Es sei $x_1$ ein von $x_0$ verschiedener Punkt innerhalb $T$; wir bilden uns dann die innerhalb des einfach zusammenhängenden Bereiches $\overline{T}$ eindeutig determinierte Integralmatrix

$$(\overline{T})\overbrace{\int_{x_1}^{x}}(a_{i\varkappa}dx + \delta_{i\varkappa}) = (\overline{\eta}_{i\varkappa}).$$

Durch Anwendung der Regel (VII) (S. 28) folgt

$$(21) \qquad (\overline{\eta}_{i\varkappa}) = (\overline{T})\overbrace{\int_{x_1}^{x_0}}(a_{i\varkappa}dx + \delta_{i\varkappa}) \cdot (\overline{y}_{i\varkappa});$$

setzen wir also

$$(22) \qquad (\overline{T})\overbrace{\int_{x_1}^{x_0}}(a_{i\varkappa}dx + \delta_{i\varkappa}) = (\varepsilon_{i\varkappa}),$$

so geht die Integralmatrix $(\overline{\eta}_{i\varkappa})$ aus $(\overline{y}_{i\varkappa})$ durch Anwendung der linearen Substitution $(\varepsilon_{i\varkappa})$ hervor. — Es bedeute nun $\Gamma'$ eine von $x_1$ aus-

gehende geschlossene Kurve, die die Querschnitte $l_1, \ldots, l_\sigma$ im gleichen Sinne und in derselben Reihenfolge überschreitet, wie die von $x_0$ ausgehende geschlossene Kurve $\Gamma$; dann können die Kurven $\Gamma$, $\Gamma'$ durch stetige Deformation innerhalb $T$ ineinander übergeführt werden. Verbinden wir dann $x_0$ mit $x_1$ durch eine ganz in $\bar{T}$ verlaufende Kurve, so ist

$$\Gamma' \overbrace{\int_{x_1}^{x_1}} = (\bar{T}) \overbrace{\int_{x_1}^{x_0}} \cdot \Gamma \overbrace{\int_{x_0}^{x_0}} \cdot (\bar{T}) \overbrace{\int_{x_0}^{x_1}},$$

also mit Rücksicht auf (22) und auf die Regel (IX) (S. 30)

$$\Gamma' \overbrace{\int_{x_1}^{x_1}} = (\varepsilon_{i\varkappa}) \cdot \Gamma \overbrace{\int_{x_0}^{x_0}} \cdot (\varepsilon_{i\varkappa})^{-1}.$$

Nun stellen die längs der verschiedenen von $x_1$ ausgehenden Kurven $\Gamma'$ erstreckten Integralmatrizen die Substitutionen der Monodromiegruppe $G'$ der Integralmatrix

$$(\eta_{i\varkappa}) = (T) \overbrace{\int_{x_1}^{x}} (a_{i\varkappa} dx + \delta_{i\varkappa})$$

ebenso dar, wie die längs aller möglichen Kurven $\Gamma$ erstreckten Integralmatrizen die Substitutionen der Monodromiegruppe $G$ von $(y_{i\varkappa})$. Wir können also sagen, daß die Substitutionen von $G'$ aus den entsprechenden Substitutionen von $G$ durch Transformation mit der Matrix $(\varepsilon_{i\varkappa})$ hervorgehen. D. h. mit anderen Worten:

Wenn der Anfangspunkt $x_0$ innerhalb der einfach zusammenhängenden Fläche $\bar{T}$ in eine neue Lage $x_1$ verschoben wird, so verwandelt sich die Monodromiegruppe $G$ in eine Gruppe $G'$, die aus $G$ durch Transformation mit der Substitution (22) hervorgeht.*)

Wir wollen nun weiter untersuchen, ob die Gruppe $G$ von der Wahl des unseren Betrachtungen zugrunde liegenden Querschnittsystems $l_1, \ldots, l_\sigma$ abhängt. Durch die Art und Weise, wie wir dieses Schnittsystem (S. 68) eingeführt haben, ist dasselbe nämlich noch keineswegs eindeutig bestimmt. Allerdings werden wir zwei Schnittsysteme $l_1, \ldots, l_\sigma$ und $l_1', \ldots, l_\sigma'$ als nicht wesentlich voneinander verschieden anzusehen haben, für die jedes $l_\lambda'$ aus dem entsprechenden

*) D. h. deren Substitutionen aus den Substitutionen von $G$ auf die angegebene Weise hervorgehen.

$l_1$ durch stetige Deformation innerhalb $T$ hervorgeht, da in diesem Falle ein Weg, der die Schnitte $l_1, \ldots l_\sigma$ in einer bestimmten Reihenfolge und in bestimmtem Sinne überschreitet, die Schnitte $l_1', \ldots, l_\sigma'$ in derselben Reihenfolge und in demselben Sinne überschreiten wird. Aber auch der wesentlich voneinander verschiedenen Schnittsysteme gibt es dann noch eine unendliche Mannigfaltigkeit, zumal wenn wir für das Schnittsystem jetzt keine weitere Voraussetzung machen als die, daß es aus $\sigma$ Schnitten bestehen und $T$ in eine einfach zusammenhängende Fläche zerschneiden soll. Es sei denn $\lambda_1, \ldots, \lambda_\sigma$ ein solches von $l_1, \ldots, l_\sigma$ verschiedenes Schnittsystem, und es möge $\sigma_\nu$ eine von $x_0$ ausgehende geschlossene Kurve bedeuten, die den Schnitt $\lambda_\nu$ und keinen anderen der Schnitte $\lambda_1, \ldots, \lambda_\sigma$ einmal vom positiven nach dem negativen Ufer hin überschreitet. Dann ist

$$(23) \qquad \sigma_\nu \overset{\frown}{\int_{x_0}^{x_0}} (a_{i\varkappa} dx + \delta_{i\varkappa}) = (\gamma_{i\varkappa}^{(\nu)}) \qquad (\nu = 1, 2, \cdots, \sigma)$$

eine Substitution der Gruppe $G$, und wir erhalten die Darstellung dieser Substitution durch die $(c_{i\varkappa}^{(1)}), \ldots, (c_{i\varkappa}^{(\sigma)})$, indem wir verfolgen, in welcher Reihenfolge und in welchem Sinne der Weg $\sigma_\nu$ die Schnitte $l_1, \ldots, l_\sigma$ überschreitet. Hiernach sehen wir zuvörderst, daß die aus den Substitutionen (23) als Fundamentalsubstitutionen komponierte Gruppe $\Gamma$ in der Gruppe $G$ enthalten ist. Umgekehrt können wir aber auch die $(c_{i\varkappa}^{(\nu)})$ durch die Substitutionen (23) darstellen, indem wir zusehen, in welcher Reihenfolge und in welchem Sinne die geschlossenen Wege $s_\nu$ die Schnitte $\lambda_1, \ldots, \lambda_\sigma$ überschreiten. Daraus folgt, daß $\Gamma$ mit $G$ identisch ist, und daß die Substitutionen (23) nur ein anderes System von Fundamentalsubstitutionen derselben Gruppe $G$ bilden.

Die Gruppe $G$ ist demnach von der Wahl des Schnittsystems unabhängig; dagegen entsprechen verschiedenen Schnittsystemen verschiedene Systeme von Fundamentalsubstitutionen dieser Gruppe.

Wenn z. B. das neue Schnittsystem $\lambda_1, \ldots, \lambda_\sigma$ auch so beschaffen ist, daß $\lambda_\nu$ einen Punkt von $a_\nu$ mit einem Punkte von $a_{\sigma+1}$ verbindet, wobei aber die Aufeinanderfolge der Treffpunkte der $\lambda_1, \ldots \lambda_\sigma$ mit $a_{\sigma+1}$ nicht gerade dieselbe sein muß, wie für das Schnittsystem $l_1, \ldots l_\sigma$, so kann der Übergang von $l_1, \ldots, l_\sigma$ zu einem beliebigen Systeme $\lambda_1, \ldots, \lambda_\sigma$ von dieser Art in folgender Weise bewirkt werden.

Wir betrachten zwei aufeinander folgende der Schnitte $l_1, \ldots, l_\sigma$, etwa $l_\nu$, $l_{\nu+1}$. Dann denken wir uns einmal den Schnitt $l_{\nu+1}$ nach links hin über $l_\nu$ hinübergeschlagen, so daß er in die Lage $l_{\nu+1}'$ (siehe die Figur 4a) kommt, und betrachten das System

(L) $$l_1, \ldots, l_{\nu-1}, l'_{\nu+1}, l_\nu, \ldots, l_\sigma$$

als das neue Schnittsystem. Das andere Mal denken wir uns $l_\nu$ über $l_{\nu+1}$ hin, also nach rechts, hinübergeschlagen, so daß $l_\nu$ in die Lage $l''_\nu$ (siehe die Figur 4b) kommt und betrachten jetzt

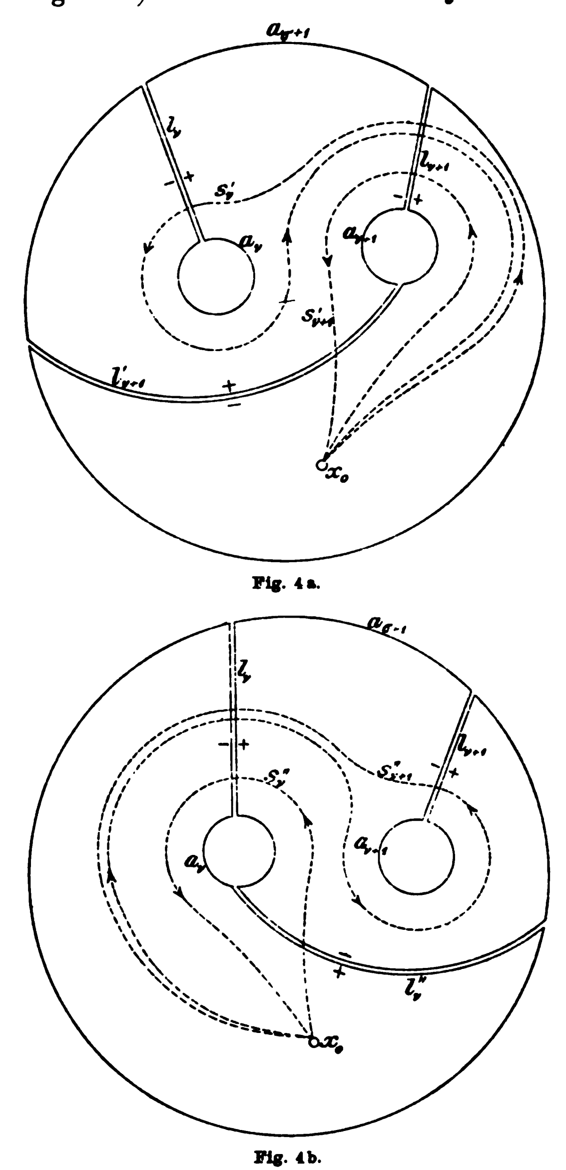



Fig. 4a.

Fig. 4b.

(R) $$l_1, \ldots, l_{\nu-1}, l_{\nu+1}, l_\nu'', \ldots, l_\sigma$$

als das neue Schnittsystem. Es treten dann an die Stelle der einfachen Wege $s_\nu$, $s_{\nu+1}$ die neuen Wege $s_\nu'$, $s'_{\nu+1}$ beziehungsweise $s_\nu''$, $s''_{\nu+1}$ (siehe die Figur), während alles andere ungeändert bleibt. Nun ist (vgl. die Figur)*)

$$s_\nu' \int_{x_0}^{\widehat{x_0}} = (c_{ix}^{(\nu+1)})(c_{ix}^{(\nu)})(c_{ix}^{(\nu+1)})^{-1},$$

$$s'_{\nu+1} \int_{x_0}^{\widehat{x_0}} = (c_{ix}^{(\nu+1)});$$

$$s_\nu'' \int_{x_0}^{\widehat{x_0}} = (c_{ix}^{(\nu)}),$$

$$s''_{\nu+1} \int_{x_0}^{\widehat{x_0}} = (c_{ix}^{(\nu)})^{-1}(c_{ix}^{(\nu+1)})(c_{ix}^{(\nu)}).$$

Durch diese Änderungen des Schnittsystems tritt also an die Stelle der Fundamentalsubstitutionen $(c_{ix}^{(\nu)})$, $(c_{ix}^{(\nu+1)})$

im Falle (L): $(c_{ix}^{(\nu+1)})$, $(c_{ix}^{(\nu+1)})(c_{ix}^{(\nu)})(c_{ix}^{(\nu+1)})^{-1}$,

im Falle (R): $(c_{ix}^{(\nu)})^{-1}(c_{ix}^{(\nu+1)})(c_{ix}^{(\nu)})$, $(c_{ix}^{(\nu)})$,

während alles übrige ungeändert bleibt. — Es ist nun leicht einzusehen, daß sich durch wiederholte Anwendung der Änderungen (L) und (R) der Übergang von $l_1, \ldots, l_\sigma$ zu jedem Schnittsysteme $\lambda_1, \ldots, \lambda_\sigma$ von der in Rede stehenden Art bewirken läßt. Die Gesamtheit dieser Übergänge bildet also eine Gruppe, die aus den beiden Übergängen (L) und (R) als Fundamentaloperationen komponiert ist. — Eine Untergruppe dieser Gruppe wird erhalten, wenn wir nur die Übergänge zu solchen Schnittsystemen in Betracht ziehen, für die die Aufeinanderfolge der Mündungspunkte auf $a_{\sigma+1}$ dieselbe ist, wie für das System $l_1, \ldots, l_\sigma$; auf diese Untergruppe kommen wir bei späteren Untersuchungen zurück.

*) In der Figur ist der Anfangspunkt $x_0$ so gewählt, daß die Überschlagungen nicht über ihn hinweg erfolgen; dies ist in Übereinstimmung mit der auch oben getroffenen Festsetzung, wonach bei einer Änderung von $x_0$ diese Änderung stets innerhalb der zerschnittenen Fläche erfolgen soll.

# Sechste Vorlesung.

**Taylorsche Reihenentwicklung der Integrale. Historisches. Konvergenzbeweis. Außerwesentlich singuläre Punkte der Integralmatrix. Isolierte singuläre Punkte, in deren Umgebung die Koeffizienten eindeutig sind. Cauchysche Systeme. Systeme mit konstanten Koeffizienten. Erledigung des Falles ungleicher Wurzeln der charakteristischen Gleichung. Anwendung. Fundamentalgleichung. Kanonische Integralmatrix.**

Es bedeute wieder $S$ einen einfach zusammenhängenden Bereich, innerhalb dessen die Koeffizienten des Differentialsystems

$$\text{(B)} \qquad \frac{dy_\varkappa}{dx} = \sum_{\lambda=1}^{n} y_\lambda a_{\lambda\varkappa} \qquad (\varkappa = 1, 2, \cdots, n)$$

monogene und holomorphe Funktionen der komplexen Variabeln sind. Dann haben wir gezeigt, daß die Elemente der Integralmatrix

$$(y_{i\varkappa}) = S\int\limits_{x_0}^{x}(a_{i\varkappa}dx + \delta_{i\varkappa}),$$

die sich für $x = x_0$ auf die Einheitsmatrix $(\delta_{i\varkappa})$ reduziert, innerhalb $S$ ebenfalls holomorph sind. Nach den in der zweiten Vorlesung bewiesenen Sätzen, die sich direkt auf die totalen Systeme und dadurch auf das komplexe System (B) übertragen lassen, ist nun jedes Integralsystem $y_1, \ldots, y_n$ von (B) in der Form

$$\text{(1)} \qquad y_\varkappa = c_1 y_{1\varkappa} + \cdots + c_n y_{n\varkappa}$$

darstellbar, wo $c_1, \ldots, c_n$ Konstanten bedeuten. Handelt es sich also z. B. darum, ein Integralsystem $y_1, \ldots, y_n$ von (B) zu finden, das im Punkte $x_0$ die vorgeschriebenen Anfangswerte

$$y_\varkappa(x_0) = \eta_\varkappa \qquad (\varkappa = 1, 2, \cdots, n)$$

annimmt, so ergibt sich, wenn wir in (1) für $x$ den Wert $x_0$ einsetzen, einfach

$$c_1 = \eta_1, \cdots, c_n = \eta_n,$$

also das gesuchte Integralsystem in der Form

(2) $$y_{\varkappa} = \eta_1 y_{1\varkappa} + \cdots + \eta_n y_{n\varkappa}.$$

Denken wir uns um $x_0$ einen Kreis beschrieben, der ganz innerhalb $S$ liegt, also, wie wir sagen können, bis zum nächsten singulären Punkte der Funktionen $a_{i\varkappa}$ reicht, und sei $r$ der Radius dieses Kreises, so sind zunächst die $a_{i\varkappa}$ nach dem Taylorschen Satze in der Form

(3) $$a_{i\varkappa} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \alpha_{i\varkappa}^{(\nu)} (x - x_0)^{\nu}$$

in Reihen entwickelbar, die innerhalb jenes Kreises, d. h. für

$$|x - x_0| < r$$

konvergieren. Innerhalb desselben Kreises sind aber auch die $y_{i\varkappa}$ nach positiven ganzen Potenzen von $x - x_0$ entwickelbar, da die $y_{i\varkappa}$ dort, wo die $a_{i\varkappa}$ holomorph sind, ebenfalls holomorph sein müssen; es sei

(4) $$y_{i\varkappa} = \varepsilon_{i\varkappa}^{(0)} + \varepsilon_{i\varkappa}^{(1)} (x - x_0) + \varepsilon_{i\varkappa}^{(2)} (x - x_0)^2 + \cdots \text{ in inf.}$$

Dann können wir die Koeffizienten dieser Integralreihen in sehr einfacher Weise berechnen, indem wir die Reihen (3) und (4) in die identische Gleichung

$$\left(\frac{d y_{i\varkappa}}{dx}\right) = (y_{i\varkappa})(a_{i\varkappa})$$

einsetzen und beiderseits die Koeffizienten gleich hoher Potenzen von $x - x_0$ miteinander vergleichen. Es ergibt sich zunächst

$$\left(\sum_{\nu=0}^{\infty} (\nu + 1)\, \varepsilon_{i\varkappa}^{(\nu+1)} (x - x_0)^{\nu}\right) = \left(\sum_{\nu=0}^{\infty} \varepsilon_{i\varkappa}^{(\nu)} (x - x_0)^{\nu}\right) \left(\sum_{\nu=0}^{\infty} \alpha_{i\varkappa}^{(\nu)} (x - x_0)^{\nu}\right)$$

und folglich durch Gleichsetzen der Koeffizienten von $(x - x_0)^{\nu}$ auf beiden Seiten

(5) $$(\nu + 1)(\varepsilon_{i\varkappa}^{(\nu+1)}) = (\varepsilon_{i\varkappa}^{(0)})(\alpha_{i\varkappa}^{(\nu)}) + (\varepsilon_{i\varkappa}^{(1)})(\alpha_{i\varkappa}^{(\nu-1)}) + \cdots + (\varepsilon_{i\varkappa}^{(\nu)})(\alpha_{i\varkappa}^{(0)}).$$
$$(\nu = 0, 1, 2, \cdots)$$

Da die Matrix der Werte der $y_{i\varkappa}$ im Punkte $x = x_0$ die Einheitsmatrix ist, so haben wir

(6) $$(\varepsilon_{i\varkappa}^{(0)}) = (\delta_{i\varkappa}^{(0)}),$$

und hiernach liefert die Rekursionsformel (5) für $\nu = 0, 1, \cdots$ der Reihe nach die folgenden Koeffizientenmatrizen $(\varepsilon_{i\varkappa}^{(1)})$, $(\varepsilon_{i\varkappa}^{(2)})$, ..., und zwar in der Form

(7) $$\nu(\varepsilon_{i\varkappa}^{(\nu)}) = (\varepsilon_{i\varkappa}^{(0)})\left\{(\alpha_{i\varkappa}^{(\nu-1)}) + (\alpha_{i\varkappa}^{(0)})(\alpha_{i\varkappa}^{(\nu-2)}) + \cdots + \frac{1}{(\nu-1)!}(\alpha_{i\varkappa}^{(0)})^{\nu}\right\}.$$

Die $\varepsilon_{i\varkappa}^{(\nu)}$ erscheinen also in der Form von Ausdrücken, die sich aus den

$$\alpha_{i\varkappa}^{(0)},\ \alpha_{i\varkappa}^{(1)},\ \ldots,\ \alpha_{i\varkappa}^{(\nu-1)}$$

durch bloße Addition und Multiplikation mit positiven numerischen Koeffizienten zusammensetzen.

In der historischen Entwicklung der Theorie der linearen Differentialgleichung haben diese Rekursionsformeln insofern eine bedeutsame Rolle gespielt, als der Beweis für die Existenz der Lösungen wesentlich auf diese Formeln gegründet wurde. Nach dem Vorgange, wie Cauchy für ein beliebiges System von Differentialgleichungen erster Ordnung, dessen Koeffizienten in der Umgebung von $x = x_0$ holomorph sind, die Existenz der in einer gewissen Umgebung von $x = x_0$ holomorphen Integrale nachgewiesen hatte, verfuhr nämlich Fuchs in seiner für unsere Theorie grundlegenden Arbeit*) wie folgt. — Setzt man für $y_1, \ldots, y_n$ ganz formal die Reihen an

$$(8) \qquad y_\varkappa = \eta_\varkappa + \varepsilon_\varkappa^{(1)}(x - x_0) + \varepsilon_\varkappa^{(2)}(x - x_0)^2 + \cdots \text{ in inf.}$$

und führt diese, indem man gliedweise differentiiert, in das System (B) ein, so erhält man, wenn man die Anfangswerte $\eta_1, \ldots, \eta_n$ als gegeben ansieht, für die $\varepsilon_\varkappa^{(1)}, \varepsilon_\varkappa^{(2)}, \ldots$ Rekursionsformeln, indem nämlich

$$(9) \qquad \varepsilon_\varkappa^{(\nu)} = \eta_1\,\varepsilon_{1\varkappa}^{(\nu)} + \eta_2\,\varepsilon_{2\varkappa}^{(\nu)} + \cdots + \eta_n\,\varepsilon_{n\varkappa}^{(\nu)}$$

gefunden wird. Es gelingt nun nachzuweisen, daß die mit diesen Größen als Koeffizienten gebildeten Reihen (8) jedenfalls in demselben um $x_0$ beschriebenen Kreise mit dem Radius $r$ konvergieren, wie die Entwicklungen (3) der Koeffizienten $a_{i\varkappa}$, daß also die Reihen (8) innerhalb dieses Kreises holomorphe Lösungen des Systems (B) darstellen. Den Konvergenzbeweis liefert Fuchs, indem er den von Cauchy für den analogen Beweis im Falle eines beliebigen Differentialsystems aufgestellten calcul des limites in eigenartiger Weise dem Falle des linearen Systems anpaßt.**) Während nämlich durch das Cauchysche Verfahren für ein beliebiges Differentialsystem nur gezeigt werden kann, daß die formal aufgestellten und das System befriedigenden Potenzreihen in einer gewissen endlichen Umgebung des Punktes $x_0$

*) Programm der Berliner Gewerbeschule 1865, Crelles Journal Bd. 66, S. 121, Werke Bd. I (1904), S. 159. Fuchs betrachtet eine lineare Differentialgleichung $n^{\text{ter}}$ Ordnung, was aber, wie wir sehen werden, im wesentlichen auf dasselbe hinaus kommt wie ein System von $n$ Gleichungen erster Ordnung. Auf solche Systeme haben dann Sauvage u. A. das Fuchssche Verfahren übertragen.

**) Später haben andere Mathematiker (siehe z. B. Frobenius, Crelles Journal Bd. 76, S. 214) Konvergenzbeweise geliefert, die sich unmittelbar auf das durch die Rekursionsformel dargestellte Koeffizientengesetz stützen.

konvergieren, besteht eben die von Fuchs angegebene Modifikation darin, daß durch dieselbe für das lineare System, als Konvergenzbereich jener Reihen (8), gleich derjenige Kreis festgestellt wird, innerhalb dessen die Konvergenz der Koeffizientenreihen (3) stattfindet. Daraus folgt nun mit Hilfe des Prinzips der analytischen Fortsetzung, daß die Lösungen linearer Differentialgleichungen in einem einfach zusammenhängenden Holomorphiebereiche der Koeffizienten ebenfalls holomorph sind, oder mit anderen Worten, daß die Lösungen des linearen Differentialsystems (B) nur an jenen Stellen Singularitäten besitzen können, wo mindestens einer der Koeffizienten $a_{i\varkappa}$ selbst singulär ist. Für nichtlineare Differentialgleichungen gilt ein analoger Satz im allgemeinen nicht, indem sich nämlich zeigt, daß die Lösungen auch an solchen Stellen singulär werden können, wo die Koeffizienten holomorph sind, wo aber entweder einzelne der Lösungen unendlich oder unbestimmt werden, oder wo dies für die Derivierten jener Lösungen der Fall ist. Diese Singularitäten hängen wesentlich von der Wahl der Anfangswerte ab; man nennt sie darum nach Fuchs verschiebbare singuläre Stellen. Für lineare Differentialsysteme ist also das Auftreten solcher verschiebbaren Singularitäten ausgeschlossen.

Wir haben, und zwar einmal durch das Verfahren der sukzessiven Approximation, dann aber durch die Betrachtungen der fünften Vorlesung die Existenz der Lösungen unseres Differentialsystems (B) und zugleich den eben erwähnten Fuchsschen Satz ganz direkt bewiesen; gleichwohl halten wir es nicht für überflüssig, hier einen von diesen Prinzipien unabhängigen Konvergenzbeweis für die Reihen (8) bezw. (4) anzugeben, der sich zwar auch, wie der Fuchssche, auf das dem calcul des limites zugrundeliegende Prinzip der Reihenvergleichung stützt, jedoch durch die Benutzung einer von L. Fejér*) angegebenen, von der Cauchyschen verschiedenen Vergleichsfunktion (fonction majorante) in äußerst einfacher Weise zum Ziele führt.

Es sei $\alpha^{(\nu)}$ eine positive Größe, die gleich ist dem $n$fachen des größten unter den absoluten Beträgen der $n^2$ Elemente $\alpha^{(\nu)}_{i\varkappa}$, dann ist zufolge der Ungleichung $(\beta)$ der dritten Vorlesung (S. 41)

$$\varepsilon^{(1)} = \varepsilon^{(0)} \cdot \alpha^{(0)},$$

wo $\varepsilon^{(0)} = 1$, keinesfalls kleiner als der größte unter den absoluten Beträgen der Elemente der Matrix

$$(\varepsilon^{(1)}_{i\varkappa}) = (\varepsilon^{(0)}_{i\varkappa})\,(\alpha^{(0)}_{i\varkappa}), \qquad (\varepsilon^{(0)}_{i\varkappa} = \delta_{i\varkappa}).$$

*) Comptes Rendus, 1906, t. 143, S. 957.

Definieren wir allgemein durch die Rekursionsformeln

(10) $$(\nu+1)\,\varepsilon^{(\nu+1)} = \varepsilon^{(0)}\alpha^{(\nu)} + \varepsilon^{(1)}\alpha^{(\nu-1)} + \cdots + \varepsilon^{(\nu)}\alpha^{(0)}$$

positive Größen $\varepsilon^{(\nu)}$, so folgt ebenso durch Vergleichung mit der Rekursionsformel (5), daß $\varepsilon^{(\nu+1)}$ nicht kleiner ist als der größte unter den absoluten Beträgen der $n^2$ Elemente $\varepsilon_{ix}^{(\nu+1)}$. — Nun ist zufolge der elementaren Eigenschaften der Potenzreihen die Reihe

(11) $$\alpha^{(0)} + \alpha^{(1)}(x-x_0) + \alpha^{(2)}(x-x_0)^2 + \cdots \text{ in inf.}$$

in dem Kreise mit Radius $r$, innerhalb dessen die Reihen (3) konvergieren, ebenfalls konvergent. Ferner ist die Reihe

(12) $$1 + \varepsilon^{(1)}(x-x_0) + \varepsilon^{(2)}(x-x_0)^2 + \cdots \text{ in inf.}$$

zufolge der Rekursionsformel (10) nichts anderes als die Entwicklung der Funktion

(13) $$\mathfrak{y} = e^{\int\limits_{x_0}^{x}(\alpha^{(0)} + \alpha^{(1)}(x-x_0) + \cdots \text{ in inf.})\,dx},$$

also ebenfalls für $|x-x_0| < r$ konvergent.*) Aus der Konvergenz von (12) folgt aber die Konvergenz der $n^2$ Reihen (4), da, wie bemerkt wurde,

$$\operatorname{mod} \varepsilon_{ix}^{(\nu)} \leqq \varepsilon^{(\nu)}$$

ist.

* * *

Betrachten wir einen mehrfach zusammenhängenden Bereich $T$, in dem die Koeffizienten $a_{ix}$ holomorph sind, und in diesem den Punkt $x = x_0$, so haben wir in der Umgebung von $x_0$ (d. h. innerhalb des größten um $x_0$ beschriebenen Kreises, der noch ganz in $T$ liegt) diejenige Integralmatrix $(y_{ix})$, die sich für $x = x_0$ auf $(\delta_{ix})$ reduziert, einmal in der Form

(14) $$(y_{ix}) = \widehat{\int_{x_0}^{x}}(a_{ix}\,dx + \delta_{ix}),$$

wo die Integration auf einem beliebigen, ganz in jener Umgebung verlaufenden Wege zu erstrecken ist, und das andere Mal in der Form (4)

$$(y_{ix}) = \left(\sum_{\nu=0}^{\infty} \varepsilon_{ix}^{(\nu)}(x-x_0)^{\nu}\right), \quad (\varepsilon_{ix}^{(0)} = \delta_{ix}),$$

*) Die Funktion (13) genügt der linearen Differentialgleichung erster Ordnung

$$\frac{d\mathfrak{y}}{dx} = [\alpha^{(0)} + \alpha^{(1)}(x-x_0) + \cdots \text{ in inf.}]\,\mathfrak{y}.$$

dargestellt. Denken wir uns nun die Potenzreihen (4) auf einem innerhalb $T$ verlaufenden Wege $C$ analytisch fortgesetzt, so werden die durch diese Fortsetzung erhaltenen Reihen die Entwicklungen der Elemente der auf dem Wege $C$ genommenen Integralmatrix (14) liefern. Es kann sich aber wohl ereignen, daß wir durch analytische Fortsetzung der Reihen (4) zu Punkten $x$ gelangen können, die überhaupt nicht mehr dem Holomorphiebereiche der Funktionen $a_{i\varkappa}$ angehören, obwohl daselbst die aus den Reihen (4) entspringenden Integralfunktionen selbst holomorph sind. Von dieser Erscheinung kann man sich durch die folgende Überlegung Rechenschaft geben. — Für alle Punkte $x$, die innerhalb des Holomorphiebereiches der Funktionen $a_{i\varkappa}$ gelegen sind, ist nach der Jacobischen Gleichung (8) der zweiten Vorlesung (S. 21)

$$(15)\qquad \underset{(i,\varkappa=1,2,\cdots,n)}{|y_{i\varkappa}|} = e^{\int_{x_0}^{x}(a_{11}+\cdots+a_{nn})\,dx},$$

die Determinante $|y_{i\varkappa}|$ hat also für alle Punkte, wo die $a_{i\varkappa}$ holomorph sind, einen von Null verschiedenen Wert. Umgekehrt folgt aus der Darstellung

$$(16)\qquad (a_{i\varkappa}) = D_x(y_{i\varkappa}) = (y_{i\varkappa})^{-1}\left(\frac{dy_{i\varkappa}}{dx}\right)$$

der Koeffizientenmatrix durch die Integralmatrix, daß für diejenigen Punkte, wo die $y_{i\varkappa}$ holomorph sind und die Determinante $|y_{i\varkappa}|$ nicht verschwindet, auch die Koeffizienten $a_{i\varkappa}$ holomorph sein müssen. Dagegen wird ein Punkt, in dessen Umgebung die $y_{i\varkappa}$ holomorph sind, in dem aber die Determinante $|y_{i\varkappa}|$ verschwindet, notwendig ein singulärer Punkt der Koeffizienten $a_{i\varkappa}$ sein. Über die Natur einer solchen Singularität können wir sofort das Folgende feststellen. In der Umgebung der betreffenden Stelle $x=a$ ist die Determinante $|y_{i\varkappa}|$ jedenfalls holomorph, also in der Form

$$|y_{i\varkappa}| = \alpha_g(x-a)^g + \alpha_{g+1}(x-a)^{g+1} + \cdots \text{ in inf.}$$

entwickelbar, wo die ganze positive Zahl $g \geqq 1$ ist. Man kann folglich eine Umgebung von $a$ so abgrenzen, daß innerhalb dieser Umgebung keine andere Nullstelle von $|y_{i\varkappa}|$ liegt. Ferner folgt aus der Darstellung (16), daß die $a_{i\varkappa}$ im Punkte $x=a$ nur von endlicher ganzzahliger Ordnung unendlich werden können, d. h. in der Umgebung von $x=a$ den Charakter rationaler Funktionen haben. Die in Rede stehenden Singularitäten sind also isolierte Pole der Koeffizienten $a_{i\varkappa}$. Wir sagen nach Weierstraß von einem isolierten Pole der Koeffizienten $a_{i\varkappa}$, in dessen Umgebung die Lösungen des Differentialsystems

holomorph sind, daß er ein außerwesentlich singulärer Punkt des Differentialsystems oder der Integralmatrix $(y_{i\varkappa})$ sei.

Allgemein zu reden, wird ein isolierter Pol der Koeffizienten $a_{i\varkappa}$ eine singuläre Stelle der Lösungen sein. Um vorerst nicht überflüssigerweise zu spezialisieren, stellen wir uns jetzt die folgende Aufgabe.

Es sei $x = a$ ein Punkt, um den sich ein Bereich $\mathfrak{A}$ so abgrenzen läßt, daß die Koeffizienten $a_{i\varkappa}$ in der Umgebung jeder von $a$ verschiedenen Stelle dieses Bereiches holomorph und überdies in der Umgebung von $a$ selbst eindeutig sind. Die $a_{i\varkappa}$ sind dann in der Umgebung von $x = a$ nach Laurentschen Reihen, d. h. in der Form

$$(17)\qquad a_{i\varkappa} = \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} c_{i\varkappa}^{(\nu)} (x-a)^{\nu}$$

entwickelbar. Wir suchen das Verhalten der Lösungen unseres Differentialsystems in der Umgebung der singulären Stelle $x = a$ zu ergründen.

Denken wir uns den Punkt $a$ durch eine unendlich kleine Kurve, die wir selbst wieder mit $a$ bezeichnen, ausgeschlossen, und bezeichnen wir die äußere Begrenzung des Bereiches $\mathfrak{A}$ durch $a'$, so haben wir also einen von $a$ und $a'$ begrenzten zweifach zusammenhängenden Bereich $\mathfrak{A}$, innerhalb dessen die Koeffizienten $a_{i\varkappa}$ holomorph sind. Sei $x_0$ ein Punkt von $\mathfrak{A}$ und denken wir uns einen Schnitt $l$ gelegt, der einen Punkt von $a'$ mit $a$ verbindet, also den Bereich $\mathfrak{A}$ in einen einfach zusammenhängenden Bereich $\overline{\mathfrak{A}}$ verwandelt, so ist die Integralmatrix

$$(18)\qquad (y_{i\varkappa}) = (\overline{\mathfrak{A}})\overset{\frown}{\int_{x_0}^{x}} (a_{i\varkappa}\, dx + \delta_{i\varkappa})$$

innerhalb $\overline{\mathfrak{A}}$ eindeutig bestimmt. Bedeutet $s$ einen von $x_0$ ausgehenden geschlossenen Weg, der den Schnitt $l$ einmal in der Richtung vom positiven nach dem negativen Ufer überschreitet, also den Punkt $a$ so umkreist, daß dieser Punkt zur Linken bleibt, so ist

$$(19)\qquad (c_{i\varkappa}) = s\overset{\frown}{\int_{x_0}^{x_0}} (a_{i\varkappa}\, dx + \delta_{i\varkappa})$$

eine wohlbestimmte konstante Matrix, und wenn wir die Integralmatrix

$$\int\limits_{x_0}^{\overset{\frown}{x}} (a_{i\varkappa} dx + \delta_{i\varkappa})$$

auf einem Wege erstrecken, der den Schnitt $l$ einmal in der Richtung vom positiven Ufer nach dem negativen hin überschreitet, so ist diese Integralmatrix gleich $(c_{i\varkappa})\,(\bar{y}_{i\varkappa})$. Mit anderen Worten, es erleidet die Integralmatrix $(\bar{y}_{i\varkappa})$ die Substitution $(c_{i\varkappa})$, wenn $x$ den Punkt $a$ einmal im positiven Sinne umkreist.

In dem speziellen Falle $n = 1$, wo wir es also mit einer Differentialgleichung erster Ordnung

(20) $$\frac{dy_1}{dx} = y_1 \cdot a_{11}$$

zu tun haben, wo also

$$\bar{y}_{11} = e^{\overline{\mathfrak{A}}\int\limits_{x_0}^{x} a_{11}\,dx}$$

ist, multipliziert sich $\bar{y}_{11}$, wenn $x$ einen Umlauf im positiven Sinne um den Punkt $a$ vollzieht, einfach mit der Konstanten

$$c_{11} = e^{s\int\limits_{x_0}^{x_0} a_{11}\,dx}.$$

Der Wert des im Exponenten von $e$ auftretenden geschlossenen Integrals ist aber nach bekannten Sätzen nichts anderes als

$$s\int\limits_{x_0}^{x_0} a_{11} dx = 2\pi\sqrt{-1}\;\mathrm{Res}_a a_{11} = 2\pi\sqrt{-1}\cdot\alpha_{11}^{(-1)}.$$

Bilden wir uns also die Hilfsdifferentialgleichung

(21) $$\frac{d\mathfrak{y}_1}{dx} = \mathfrak{y}_1 \cdot \frac{\alpha_{11}^{(-1)}}{x-a},$$

so wird die Lösung

$$\mathfrak{y}_{11} = (x-a)^{\alpha_{11}^{(-1)}}$$

dieser Gleichung sich mit derselben Konstanten $c_{11}$ multiplizieren wie $\bar{y}_{11}$, wenn $x$ einen Umlauf im positiven Sinne um $a$ vollzieht; es wird folglich der Quotient

$$\frac{\bar{y}_{11}}{\mathfrak{y}_{11}} = \varphi(x)$$

eine in dem Bereiche $\mathfrak{A}$ holomorphe Funktion von $x$ sein, die demnach in der Umgebung von $x = a$ in der Form einer Laurentschen Reihe:

$$\varphi(x) = \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} \varepsilon_{11}^{(\nu)}(x-a)^{\nu}$$

darstellbar ist. — Wir finden also durch diese Überlegung das — natürlich auch direkt zu verifizierende — Resultat, daß das Integral $\bar{y}_{11}$ in der Umgebung des singulären Punktes $x = a$ in der Form

$$\bar{y}_{11} = (x-a)^{\alpha_{11}^{(-1)}} \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} \varepsilon_{11}^{(\nu)}(x-a)^{\nu}$$

analytisch darstellbar ist, wo man den Zweig der Potenz $(x-a)^{\alpha_{11}^{(-1)}}$ geeignet zu wählen hat.

Wir versuchen nun, diesen Gedankengang auf den allgemeinen Fall eines beliebigen $n$ zu übertragen.

Wenn es gelänge, eine explizite angebbare Funktionalmatrix $(\mathfrak{y}_{i\varkappa})$ mit nichtverschwindender Determinante zu finden, die in

$$(c_{i\varkappa})\,(\mathfrak{y}_{i\varkappa})$$

übergeht, wenn $x$ den Punkt $a$ im positiven Sinne umkreist, so würden die Elemente der Matrix

$$(\mathfrak{y}_{i\varkappa})^{-1}(\bar{y}_{i\varkappa}) = (\varphi_{i\varkappa}(x))$$

in der Umgebung von $a$ eindeutig, also, wenn die $\mathfrak{y}_{i\varkappa}$ innerhalb $\mathfrak{A}$ keine singuläre Stelle haben und ihre Determinante $|\mathfrak{y}_{i\varkappa}|$ daselbst stets von Null verschieden ist, innerhalb $\mathfrak{A}$ holomorph, d. h. in der Umgebung von $x = a$ nach Laurentschen Reihen

(22) $$\varphi_{i\varkappa}(x) = \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} \varepsilon_{i\varkappa}^{(\nu)}(x-a)^{\nu}$$

entwickelbar sein. Wir hätten demnach für $(\bar{y}_{i\varkappa})$ die analytische Darstellungsform

(23) $$(\bar{y}_{i\varkappa}) = (\mathfrak{y}_{i\varkappa})\left(\sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} \varepsilon_{i\varkappa}^{(\nu)}(x-a)^{\nu}\right),$$

die der für $n = 1$ gefundenen ganz analog ist.

Wir wollen nun zeigen, daß die Bestimmung einer solchen Matrix $(\mathfrak{y}_{i\varkappa})$ in der Tat stets möglich ist, und zwar werden wir zu dieser Matrix gelangen, indem wir ein lineares Differentialsystem von der Form

(H) $$\frac{d\mathfrak{y}_{\varkappa}}{dx} = \sum_{\lambda} \mathfrak{y}_{\lambda} \frac{A_{\lambda\varkappa}}{x-a},$$

wo die $A_{\lambda\varkappa}$ Konstanten bedeuten, in Betracht ziehen. Wie man sieht,

erscheint dieses Differentialsystem als direkte Verallgemeinerung der für den Fall $n = 1$ benutzten Hilfsdifferentialgleichung (21).

Die Differentialsysteme von der Form (H) spielen für unsere Theorie eine so wichtige Rolle, daß wir ihrem Studium die größte Sorgfalt widmen müssen. Sie sind allgemein zuerst von Cauchy untersucht worden; wir werden sie darum als Cauchysche Systeme bezeichnen. — Indem man durch die Gleichung

$$t = \log(x - a) \tag{24}$$

in dem Systeme (H) die neue unabhängige Variable $t$ einführt, verwandelt sich (H) in ein System von der Form

$$\frac{dy_\varkappa}{dt} = \sum_{\lambda=1}^{n} y_\lambda a_{\lambda\varkappa}, \qquad (\varkappa = 1, 2, \ldots, n) \tag{E}$$

dessen Koeffizienten $a_{i\varkappa}$ Konstanten sind*). Wir beschäftigen uns zunächst mit der Theorie der Systeme (E).

Da die Koeffizienten des Systems (E) im Endlichen keinen singulären Punkt aufweisen, so können wir a priori sagen, daß die Lösungen von (E) ganze transzendente Funktionen von $t$ sein werden.

Es bedeute $(\mathfrak{a}_{i\varkappa})$ eine konstante Matrix von $n^2$ Elementen, deren Determinante von Null verschieden ist. Wenn wir eine Integralmatrix $(y_{i\varkappa})$ von (E) von rechts mit $(\mathfrak{a}_{i\varkappa})$ komponieren, so erhalten wir zufolge der Regel (V) der zweiten Vorlesung in

$$(z_{i\varkappa}) = (y_{i\varkappa})(\mathfrak{a}_{i\varkappa}) \tag{25}$$

eine Integralmatrix des Systems

$$\frac{dz_\varkappa}{dt} = \sum_{\lambda=1} z_\lambda b_{\lambda\varkappa}, \qquad (\varkappa = 1, 2, \ldots, n) \tag{26}$$

wo die konstante Matrix $(b_{i\varkappa})$ durch die Gleichung

$$(b_{i\varkappa}) = (\mathfrak{a}_{i\varkappa})^{-1}(a_{i\varkappa})(\mathfrak{a}_{i\varkappa}) \tag{27}$$

gegeben ist, also aus $(a_{i\varkappa})$ durch Transformation mit $(\mathfrak{a}_{i\varkappa})^{-1}$ hervorgeht. Das Problem der Integration der Systeme (E) und (26) ist im wesentlichen ein und dasselbe, ein Umstand, den wir in der Weise ausbeuten wollen, daß wir durch geeignete Wahl der Matrix $(\mathfrak{a}_{i\varkappa})$ dem Systeme (26) eine so einfache Form zu verschaffen suchen, daß es unmittelbar integrabel wird.

---

*) Die $a_{i\varkappa}$ sind natürlich mit den $A_{i\varkappa}$ in (H) identisch, ebenso haben wir nur die Bezeichnung geändert, indem wir statt der $\mathfrak{y}_\varkappa$ in (H) in (E) $y_\varkappa$ schrieben.

Wir stellen uns die Aufgabe, die Konstanten $u_1, \ldots, u_n$ so zu bestimmen, daß

(28) $$v = u_1 y_1 + \cdots + u_n y_n$$

einer Differentialgleichung von der Form

(29) $$\frac{dv}{dt} = rv$$

genügt, wo $r$ eine Konstante bedeutet. Da mit Rücksicht auf das System (E)

(30) $$\frac{dv}{dt} = \sum_{\varkappa=1}^{n} u_\varkappa \sum_{\lambda=1}^{n} y_\lambda a_{\lambda\varkappa}$$

gefunden wird, so wird die Gleichung (29) erfüllt sein, wenn

(31) $$\sum_{\varkappa=1}^{n} u_\varkappa \sum_{\lambda=1}^{n} y_\lambda a_{\lambda\varkappa} - r \sum_{\varkappa=1}^{n} y_\varkappa u_\varkappa = 0$$

ist. Bestände zwischen den $y_1, \ldots, y_n$ eine homogene lineare Relation mit konstanten Koeffizienten:

$$\alpha_1 y_1 + \cdots + \alpha_n y_n = 0,$$

wo die $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ nicht sämtlich verschwinden, so könnte eines der $y_\varkappa$ aus dieser Relation ausgerechnet und damit das System (E) auf ein System mit $n-1$ Unbekannten von derselben Form reduziert werden. Wir können also annehmen, daß in (31) die Koeffizienten von $y_1, \ldots, y_n$ sämtlich verschwinden, d. h. daß die Gleichungen

(32) $$\sum_{\lambda=1}^{n} (a_{\varkappa\lambda} - \delta_{\varkappa\lambda} r) u_\lambda = 0 \qquad (\varkappa = 1, 2, \ldots, n)$$

bestehen. Sollen sich diesen Gleichungen gemäß die $u_1, \ldots, u_n$ als nicht sämtlich verschwindende Werte bestimmen lassen, so muß die Determinante der Koeffizienten

(F) $$|a_{\varkappa\lambda} - \delta_{\varkappa\lambda} r| = 0 \quad (\varkappa, \lambda = 1, 2, \ldots, n)$$

sein, d. h. die Konstante $r$ muß als Wurzel der algebraischen Gleichung $n$-ten Grades (F) gewählt werden. Diese Gleichung wird die **charakteristische Gleichung** des Differentialsystems (E) oder der Matrix $(a_{i\varkappa})$ genannt.

Bedeutet $r_\alpha$ eine Wurzel von (F), so hängt die Anzahl der linear unabhängigen Lösungssysteme $u_1, \ldots, u_n$ des Gleichungssystems

$$(33) \qquad \sum_{\lambda=1}^{n} (a_{\varkappa\lambda} - \delta_{\varkappa\lambda} r_\alpha) u_\lambda = 0 \qquad (\varkappa = 1, 2, \cdots, n)$$

bekanntlich*) von dem Range der Koeffizientenmatrix

$$(34) \qquad (a_{\varkappa\lambda} - \delta_{\varkappa\lambda} r_\alpha)$$

ab. Ist der Rang dieser Matrix gleich $\nu_0$, d. h. verschwinden sämtliche in der Matrix (34) enthaltene Subdeterminanten $(\nu_0 + 1)^{\text{ter}}$ Ordnung (und folglich auch alle Subdeterminanten höherer Ordnung), während unter den Subdeterminanten $\nu_0{}^{\text{ter}}$ Ordnung wenigstens eine von Null verschieden ist, so ist das Gleichungssystem (33), wie man zu sagen pflegt, $(n - \nu_0)$ fach unbestimmt, und es gibt genau $n - \nu_0$ linear unabhängige Lösungen

$$(35) \qquad \left\{ \begin{array}{lll} u_{1,\nu_0+1}, & \cdots, & u_{n,\nu_0+1}, \\ \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot \\ u_{1n}, & \cdots, & u_{nn}, \end{array} \right.$$

d. h. Lösungen von der Art, daß die von denselben gebildete rechteckige Matrix (35) vom Range $n - \nu_0$, also so beschaffen ist, daß wenigstens eine der aus der Matrix (35) zu bildenden Determinanten $(n - \nu_0)^{\text{ter}}$ Ordnung nicht verschwindet. Die allgemeinste Lösung des Systems (33) ist dann in der Form

$$u_\varkappa = \sum_{\lambda=\nu_0+1}^{n} u_{\varkappa\lambda} c_\lambda \qquad (\varkappa = 1, 2, \cdots, n)$$

darstellbar, wo $c_{\nu_0+1}, \ldots, c_n$ willkürliche Größen bedeuten.

Um zunächst unser analytisches Problem möglichst unbelastet von den ihm im allgemeinsten Falle anhaftenden algebraischen Komplikationen darstellen zu können, behandeln wir hier zuvörderst den Fall, wo die sämtlichen $n$ Wurzeln der charakteristischen Gleichung (F) voneinander verschieden sind. Es ist dann jede der Wurzeln $r_\alpha$ eine einfache, so daß also die Derivierte der linken Seite von (F) nach $r$ für $r = r_\alpha$ nicht verschwindet. Aus der bekannten Darstellung der Derivierten einer Determinante folgt dann sofort, daß nicht alle Subdeterminanten $(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung der Determinante

$$| a_{\varkappa\lambda} - \delta_{\varkappa\lambda} r_\alpha | \atop (\varkappa, \lambda = 1, 2, \cdots, n)$$

*) Für die hier zu benutzenden Sätze aus der Theorie des Systems linearer Gleichungen kann etwa auf die Darstellung dieser Sätze in Kroneckers Vorlesungen über Determinanten I, herausg. von Hensel (1903), pag. 336—345 verwiesen werden.

verschwinden können, daß also die Matrix (34) in diesem Falle vom Range $n-1$ ist. Das Gleichungssystem (33) ist demnach einfach unbestimmt, d. h. es besitzt nur eine linear unabhängige Lösung

(36) $$u_{1\alpha},\ u_{2\alpha},\ \cdots,\ u_{n\alpha},$$

aus der alle anderen Lösungssysteme durch Multiplikation mit einem willkürlichen Proportionalitätsfaktor hervorgehen.

Der mit den Größen (36) gebildete Ausdruck

(37) $$v_\alpha = \sum_{\varkappa=1}^{n} y_\varkappa u_{\varkappa\alpha}$$

befriedigt dann die Differentialgleichung

(38) $$\frac{dv_\alpha}{dt} = r_\alpha v_\alpha$$

und ist durch diese seine Eigenschaft, von einem konstanten Faktor abgesehen, eindeutig bestimmt. — Bedeuten

$$r_1, \ldots, r_n$$

die $n$ verschiedenen Wurzeln der charakteristischen Gleichung (F) und lassen wir in (33), (36), (37), (38) den Index $\alpha$ die Werte $1, \ldots, n$ durchlaufen, so erhalten wir in (37) $n$ lineare Kombinationen der $y_1, \ldots, y_n$, die das Differentialsystem (38) für $\alpha = 1, 2, \ldots, n$ befriedigen. Diese $n$ linearen Kombinationen $v_1, \ldots, v_n$ sind aber auch linear unabhängig. Denn bestünde zwischen den $v_1, \ldots, v_n$ eine lineare homogene Relation mit konstanten Koeffizienten

$$c_1 v_1 + \cdots + c_n v_n = 0,$$

so würde durch $(n-1)$malige Differentiation dieser Gleichung und mit Rücksicht auf (38) folgen, daß auch

$$c_1 r_1^\varkappa v_1 + \cdots + c_n r_n^\varkappa v_n = 0 \qquad (\varkappa = 1, 2, \cdots, n)$$

sein muß, es müßte folglich, da die $r_1, \cdots, r_n$ voneinander verschieden, und somit die Determinante $|r_i^{\varkappa-1}|$ $(i, \varkappa = 1, 2, \cdots, n)$ nicht gleich Null ist,

$$c_1 = 0, \cdots, c_n = 0$$

sein.

Es ist also die Determinante

$$|u_{\varkappa\alpha}| \neq 0; \quad (\varkappa, \alpha = 1, 2, \cdots, n)$$

die $u_{\varkappa\alpha}$ bilden demnach eine Matrix von der Art, wie wir uns vorgesetzt hatten, eine zu bestimmen. Wir haben nämlich nach (27)

$$(39)\qquad \begin{pmatrix} r_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & r_2 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & r_n \end{pmatrix} = (u_{i\varkappa})^{-1}(a_{i\varkappa})(u_{i\varkappa}),$$

und da das Differentialsystem (38) offenbar die Integralmatrix

$$(40)\qquad v_{i\varkappa} = \delta_{i\varkappa} e^{r_\varkappa t} \qquad (i, \varkappa = 1, 2, \cdots, n)$$

besitzt, so erhalten wir für unser Differentialsystem (E) die Integralmatrix

$$(41)\qquad (y_{i\varkappa}) = (v_{i\varkappa})(u_{i\varkappa})^{-1}.$$

Setzen wir also

$$(u_{i\varkappa})^{-1} = (u'_{i\varkappa}),$$

so haben wir für die Integralmatrix $(y_{i\varkappa})$ die explicite Form

$$(42)\qquad y_{i\varkappa} = e^{r_i t} u'_{i\varkappa}.$$

Die Gleichung (39) lehrt, daß eine Matrix $(a_{i\varkappa})$, deren charakteristische Gleichung (F) lauter voneinander verschiedene Wurzeln hat, stets und zwar nur auf eine Weise in eine Matrix transformiert werden kann, die in der Diagonale die Wurzeln von (F) in einer bestimmten Reihenfolge und an allen übrigen Stellen lauter Nullen hat. — Betrachten wir an Stelle von $(a_{i\varkappa})$ die durch die Gleichung (27) dargestellte Matrix $(b_{i\varkappa})$, die aus $(a_{i\varkappa})$ durch Transformation mit der Matrix $(\mathfrak{a}_{i\varkappa})^{-1}$ hervorgeht, oder wie man zu sagen pflegt, mit $(a_{i\varkappa})$ ähnlich ist, so ist

$$(b_{i\varkappa} - \delta_{i\varkappa} r) = (\mathfrak{a}_{i\varkappa})^{-1}(a_{i\varkappa})(\mathfrak{a}_{i\varkappa}) - (\delta_{i\varkappa} r),$$

also, da offenbar

$$(\delta_{i\varkappa} r) = (\mathfrak{a}_{i\varkappa})^{-1}(\delta_{i\varkappa} r)(\mathfrak{a}_{i\varkappa})$$

ist,

$$(43)\qquad (b_{i\varkappa} - \delta_{i\varkappa} r) = (\mathfrak{a}_{i\varkappa})^{-1}(a_{i\varkappa} - \delta_{i\varkappa} r)(\mathfrak{a}_{i\varkappa})$$

und folglich

$$(44)\qquad |b_{i\varkappa} - \delta_{i\varkappa} r| = |a_{i\varkappa} - \delta_{i\varkappa} r|; \qquad (i, \varkappa = 1, 2, \cdots, n)$$

die ähnlichen Matrizen $(a_{i\varkappa})$, $(b_{i\varkappa})$ haben also dieselbe charakteristische Gleichung. Dieser Satz gilt ganz allgemein, d. h. unabhängig von der Voraussetzung, daß die charakteristische Gleichung lauter verschiedene Wurzeln hat.

Wenn wir aber jetzt wieder die Verschiedenheit der Wurzeln der Gleichung (F) postulieren, so ist evident, daß die Matrix $(b_{i\varkappa})$ in dieselbe Form (39) wie $(a_{i\varkappa})$ transformiert werden kann; nennen wir diese

Form die kanonische, so haben wir also den weiteren Satz: ähnliche Matrizen, deren charakteristische Gleichung lauter verschiedene Wurzeln hat, haben dieselbe kanonische Form.

Dieser Satz ist nun umkehrbar. — Bedeutet nämlich jetzt $(b_{i\varkappa})$ eine Matrix, deren charakteristische Gleichung mit der von $(a_{i\varkappa})$ übereinstimmt, und sind die Wurzeln dieser Gleichung alle voneinander verschieden, so gibt es eine Matrix $(\bar{u}_{i\varkappa})$ mit nicht verschwindender Determinante, so daß

$$\begin{pmatrix} r_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & r_2 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & r_n \end{pmatrix} = (\bar{u}_{i\varkappa})^{-1}(b_{i\varkappa})(\bar{u}_{i\varkappa})$$

ist; wir haben folglich

$$(b_{i\varkappa}) = (\bar{u}_{i\varkappa})(u_{i\varkappa})^{-1}(a_{i\varkappa})(u_{i\varkappa})(\bar{u}_{i\varkappa})^{-1},$$

d. h. die Matrizen $(a_{i\varkappa})$, $(b_{i\varkappa})$ sind einander ähnlich.

Damit sind also in dem Falle, wo die charakteristischen Gleichungen zweier Matrizen lauter einfache Wurzeln haben, die notwendigen und hinreichenden Bedingungen für die Ähnlichkeit der beiden Matrizen gefunden (vergl. 5. Vorlesung, S. 72); sie bestehen darin, daß diese Wurzeln für die beiden Matrizen übereinstimmen.

Wir kehren jetzt wieder zu dem Cauchyschen Differentialsystem (H) zurück, das wir, der für (E) angewandten Bezeichnung gemäß, in der Form

$$(\bar{\mathrm{H}}) \qquad \frac{dy_\varkappa}{dx} = \sum_{\lambda=1}^{n} y_\lambda \frac{a_{\lambda\varkappa}}{x-a}$$

schreiben. In ihrer Abhängigkeit von $x$ erscheinen die Elemente der Integralmatrix (42) in der Form

$$(43) \qquad y_{i\varkappa} = (x-a)^{r_i} u'_{i\varkappa},$$

wo wir uns die Werte der Ausdrücke $(x-a)^{r_i}$ in dem einfach zusammenhängenden Bereiche, der entsteht, wenn wir von einer den Punkt ausschließenden, unendlich kleinen Kurve aus einen Schnitt $l$ nach dem Unendlichen legen, irgendwie fixiert denken. Lassen wir nun die Variable $x$ einen Umlauf im positiven Sinne um den Punkt $a$ vollziehen, so multiplizieren sich die $y_{i\varkappa}$ mit den Faktoren

$$\omega_i = e^{2\pi\sqrt{-1}\,r_i}, \qquad (i = 1, 2, \cdots, n)$$

die Integralmatrix $(y_{i\varkappa})$ erfährt also die Substitution

$$\begin{pmatrix} \omega_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \omega_2 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & \omega_n \end{pmatrix} = (\delta_{i\varkappa}\,\omega_i).$$

Unsere Aufgabe (siehe S. 94), eine Funktionalmatrix $(\mathfrak{y}_{i\varkappa})$ zu finden, die eine vorgeschriebene lineare Substitution $(c_{i\varkappa})$ erfährt, wenn $x$ den Punkt $a$ umkreist, läßt sich nunmehr in dem besonderen Falle, wo die zu der Matrix $(c_{i\varkappa})$ gehörige charakteristische Gleichung

$$(44) \qquad | c_{i\varkappa} - \delta_{i\varkappa}\,\omega | = 0 \qquad {\scriptstyle (i,\,\varkappa = 1,\,2,\,\cdots,\,n)}$$

lauter ungleiche Wurzeln besitzt, sofort lösen. Sind nämlich

$$\omega_1, \dots, \omega_n$$

die $n$ ungleichen Wurzeln der Gleichung (44), so kann man, wie wir gesehen haben, die Matrix $(c_{i\varkappa})$ in der Form:

$$(c_{i\varkappa}) = (\gamma_{i\varkappa}) \begin{pmatrix} \omega_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \omega_2 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & \omega_n \end{pmatrix} (\gamma_{i\varkappa})^{-1}$$

darstellen, wo die $(\gamma_{i\varkappa})$ sich (vergl. Gl. (33)) aus den Gleichungen

$$\sum_{\lambda=1}^{n} (c_{\varkappa\lambda} - \delta_{\varkappa\lambda}\,\omega_\alpha)\,\gamma_{\lambda\alpha} = 0 \qquad {\scriptstyle (\varkappa,\,\alpha = 1,\,2,\,\cdots,\,n)}$$

bestimmen lassen. Bilden wir nun mit den Größen

$$r_\alpha = \frac{\log \omega_\alpha}{2\pi\sqrt{-1}}, \qquad {\scriptstyle (\alpha = 1,\,2,\,\cdots,\,n)}$$

die ihrer Definition gemäß natürlich nur abgesehen von additiven ganzen Zahlen bestimmt sind, die Matrix

$$(\mathfrak{y}_{i\varkappa}) = (\gamma_{i\varkappa}(x-a)^{r_\varkappa}),$$

so erfährt diese Matrix, wenn $x$ den Punkt $a$ im positiven Sinne umkreist, in der Tat die Substitution

$$(\gamma_{i\varkappa})(\delta_{i\varkappa}\,\omega_\varkappa)(\gamma_{i\varkappa})^{-1} = (c_{i\varkappa}).$$

Indem wir jetzt wieder auf das Differentialsystem (B)

$$\frac{dy_\varkappa}{dx} = \sum_{\lambda=1}^{n} y_\lambda\, a_{\lambda\varkappa} \qquad {\scriptstyle (\varkappa = 1,\,2,\,\cdots,\,n)}$$

zurückgreifen, worin die Koeffizienten in dem den Punkt $x = a$ um-

gebenden, zweifach zusammenhängenden Bereiche $\mathfrak{A}$ holomorphe, also nach Laurentschen Reihen von der Form (17) entwickelbare Funktionen bedeuten, so ist die Integralmatrix

$$(\bar{y}_{i\varkappa}) = \mathfrak{A}\int\limits_{x_0}^{\overset{\frown}{x}} (a_{i\varkappa}\,dx + \delta_{i\varkappa}),$$

sofern die zu der Matrix

$$(c_{i\varkappa}) = s\int\limits_{\mathfrak{x}_0}^{\overset{\frown}{x_0}} (a_{i\varkappa}\,dx + \delta_{i\varkappa})$$

gehörige charakteristische Gleichung lauter einfache Wurzeln besitzt, nach den Auseinandersetzungen auf S. 94 in der Form:

$$(\bar{y}_{i\varkappa}) = (\gamma_{i\varkappa}(x-a)^{r_\varkappa})\left(\sum_{\nu=+\infty}^{-\infty} \varepsilon_{i\varkappa}^{(\nu)}(x-a)^\nu\right)$$

darstellbar; dabei hat man sich die Ausdrücke $(x-a)^{r_\varkappa}$ in geeigneter Weise fixiert zu denken. Man nennt nach Fuchs die Gleichung (44) die zu dem singulären Punkte $a$ gehörige Fundamentalgleichung. In der Tat ist jene Gleichung von der Wahl der Integralmatrix $(\bar{y}_{i\varkappa})$ unabhängig. Bedeutet nämlich $(\eta_{i\varkappa})$ irgendeine andere Integralmatrix von (B), so ist

$$(\eta_{i\varkappa}) = (\beta_{i\varkappa})(\bar{y}_{i\varkappa}),$$

wo $(\beta_{i\varkappa})$ eine konstante Matrix nicht verschwindender Determinante ist, und die Substitution, die $(\eta_{i\varkappa})$ erfährt, wenn $x$ den Punkt $a$ im positiven Sinne umkreist, lautet

$$(\beta_{i\varkappa})(c_{i\varkappa})(\beta_{i\varkappa})^{-1}.$$

Die charakteristische Gleichung dieser Matrix ist aber, wie wir oben gezeigt haben, mit der charakteristischen Gleichung von $(c_{i\varkappa})$ identisch. **Die Fundamentalgleichung hängt somit nur von dem Charakter des Differentialsystems (B) in der Umgebung des Punktes $x=a$, nicht aber von der Wahl der Integralmatrix ab.**

Wählen wir insbesondere

$$(\beta_{i\varkappa}) = (\gamma_{i\varkappa})^{-1},$$

so hat die Integralmatrix

$$(\eta_{i\varkappa}) = (\gamma_{i\varkappa})^{-1}(\bar{y}_{i\varkappa})$$

in der Umgebung von $x = a$ die einfache Form

$$\eta_{i\varkappa} = (x-a)^{r_i}\sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} \varepsilon_{i\varkappa}^{(\nu)}(x-a)^\nu, \qquad (i\,\varkappa = 1, 2, \cdots, n)$$

und die Substitution, die diese Integralmatrix erfährt, wenn $x$ den Punkt $a$ umkreist, lautet

$$\begin{pmatrix} \omega_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \omega_2 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & \omega_n \end{pmatrix},$$

d. h. die $\eta_{i\varkappa}$ $(\varkappa = 1, 2, \cdots, n)$ multiplizieren sich mit den Konstanten $\omega_i$. Man nennt diese Integralmatrix die zum singulären Punkte $a$ gehörige kanonische Integralmatrix.

Ehe wir nun diese vorläufig nur unter der Voraussetzung lauter einfacher Wurzeln der Fundamentalgleichung abgeleiteten Sätze auf den allgemeinsten Fall übertragen, müssen wir die Integration des Differentialsystems mit konstanten Koeffizienten allgemein absolvieren. Wir lassen dieser Untersuchung einige Erörterungen vorausgehen, die sich auf die Frage der Irreduzibilität und Reduzibilität linearer Differentialsysteme beziehen, und die uns auch später noch von Nutzen sein werden.

# Siebente Vorlesung.

**Rationalitätsbereich. Der Artbegriff. Reduzibilität linearer Differentialsysteme. Zurückführung auf evident reduzible Systeme. Form der Integralmatrix. Sätze über reduzible Systeme und Systeme, die zu derselben Art gehören.**

Unter einem Rationalitätsbereiche von Funktionen verstehen wir*) eine Gesamtheit von Funktionen, von denen eine jede innerhalb eines gewissen einfach zusammenhängenden Bereiches $S$ der $x$-Ebene eindeutig und abgesehen von einer isolierten Menge von Stellen holomorph ist und die die folgende Eigenschaft besitzt: Jeder Ausdruck, der aus Funktionen der betrachteten Gesamtheit durch rationale Rechenoperationen und Differentiationen nach $x$ gebildet werden kann, gehört als Funktion von $x$ betrachtet wieder jener Gesamtheit an. Bei Ausführung der rationalen Rechenoperationen werden wir — was zwar für den Begriff des Rationalitätsbereiches nicht wesentlich, aber für unsere Zwecke bequem und zulässig ist — als Koeffizienten alle Konstanten zulassen. Einen solchen Bereich bilden z. B. alle rationalen Funktionen von $x$ mit beliebigen konstanten Koeffizienten.

Es sei

$$\text{(A)} \qquad \frac{dy_\varkappa}{dx} = \sum_{\lambda=1}^{n} y_\lambda a_{\lambda\varkappa} \qquad (\varkappa = 1, 2, \cdots, n)$$

ein Differentialsystem für $n$ Funktionen, dessen Koeffizienten $a_{i\varkappa}$ einem gewissen Rationalitätsbereiche $R$ angehören. Bedeutet dann $(r_{i\varkappa})$ eine Funktionalmatrix, deren Elemente ebenfalls dem Bereiche $R$ angehören, und deren Determinante

$$|r_{i\varkappa}| \qquad (i, \varkappa = 1, 2, \cdots, n)$$

nicht identisch verschwindet, so befriedigen die Ausdrücke

$$\text{(1)} \qquad z_\varkappa = \sum_{\lambda=1}^{n} y_\lambda r_{\lambda\varkappa} \qquad (\varkappa = 1, 2, \cdots, n)$$

ein lineares Differentialsystem

---

*) Vergl. A. Loewy, Mathem. Annalen Bd. 62, S. 89.

(B) $$\frac{dz_\varkappa}{dx} = \sum_{\lambda=1}^{n} z_\lambda b_{\lambda\varkappa}, \qquad (\varkappa = 1, 2, \cdots, n)$$

dessen Koeffizientenmatrix (vgl. die Regel (IV), S. 26)

(2) $$(b_{i\varkappa}) = (r_{i\varkappa})^{-1}(a_{i\varkappa})(r_{i\varkappa}) + D_x(r_{i\varkappa})$$

ebenfalls dem Bereiche $R$ angehört. Wir sagen dann von dem Differentialsysteme (B), daß es mit (A) zu derselben **Art** gehört, mit Rücksicht auf den Rationalitätsbereich $R$, und übertragen diese Ausdrucksweise auch auf die Funktionssysteme $z_1, \ldots, z_n$ und $y_1, \ldots, y_n$ und auf eine Integralmatrix $(z_{i\varkappa})$ von (B), die mit der Integralmatrix $(y_{i\varkappa})$ von (A) durch die Relation

(3) $$(z_{i\varkappa}) = (y_{i\varkappa})(r_{i\varkappa})$$

verknüpft ist. Da die Gleichungen (1) nach $y_1, \ldots, y_n$ auflösbar sind, ist die Zugehörigkeit zur selben Art eine **gegenseitige** Beziehung zwischen den Differentialsystemen (B) und (A) usw.

Es kann sich nun ereignen, daß sich $n(n-m)$ Funktionen $r_{\lambda\varkappa}$ des Bereiches $R$, wo $m > 0$ ist, so bestimmen lassen, daß die $n-m$ Ausdrücke

(4) $$\sum_{\lambda=1}^{n} y_\lambda r_{\lambda\varkappa} \qquad (\varkappa = m+1, \cdots, n)$$

ein lineares homogenes Differentialsystem für $n-m$ Funktionen mit Koeffizienten des Rationalitätsbereiches erfüllen. Wenn dies für irgend eine der Zahlen $m = 1, 2, \ldots, n-1$ der Fall ist, so nennen wir das Differentialsystem (A) **reduzibel** innerhalb $R$; andernfalls soll das Differentialsystem (A) innerhalb $R$ **irreduzibel** heißen.

Wir können voraussetzen, daß die von den $n(n-m)$ Funktionen

(5) $$r_{i\varkappa} \qquad (i = 1, 2, \cdots, n;\ \varkappa = m+1, \cdots, n)$$

gebildete rechteckige Matrix genau vom Range $n-m$ ist. Wäre sie nämlich von niedrigerem Range, so würde zwischen den $(n-m)$ Ausdrücken (4) mindestens eine homogene lineare Relation mit Koeffizienten aus $R$ bestehen, es würden also schon $n-m-1$ der Ausdrücke (4) einem homogenen linearen Differentialsystem für $n-m-1$ Funktionen mit Koeffizienten aus $R$ genügen. — Nach den Ergebnissen der vorigen Vorlesung ist ein Differentialsystem mit konstanten Koeffizienten und ebenso ein **Cauchysches** Differentialsystem in dem Bereiche aller rationalen Funktionen von $x$ stets reduzibel, und zwar in der Weise, daß $m = n-1$ ist.

Da die Matrix der Funktionen (5) vom Range $n-m$ sein soll,

so können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit voraussetzen, daß die Determinante

$$|r_{i\varkappa}| \qquad (i, \varkappa = m+1, \cdots, n)$$

von Null verschieden ist; sollte dies nämlich nicht von vornherein der Fall sein, so ließe es sich durch Abänderung der Indexbezeichnung für die $y_1, \ldots, y_n$ stets erreichen. Unter dieser Voraussetzung setzen wir

$$(6) \qquad \begin{cases} z_\varkappa = \sum_{\lambda=1}^{n} y_\lambda r_{\lambda\varkappa}, & (\varkappa = m+1, \cdots, n) \\ z_\varkappa = y_\varkappa, & (\varkappa = 1, 2, \cdots, m) \end{cases}$$

dann ist, wenn wir noch

$$(7) \qquad r_{i\varkappa} = \delta_{i\varkappa} \qquad (i = 1, 2, \cdots, n;\ \varkappa = 1, 2, \cdots, m)$$

setzen, die Matrix von $n^2$ Größen $(r_{i\varkappa})$ so beschaffen, daß ihre Determinante

$$\underset{(i, \varkappa = 1, 2, \cdots, n)}{r_{i\varkappa}} = \underset{(i, \varkappa = m+1, \cdots, n)}{|r_{i\varkappa}|}$$

von Null verschieden ist. Das Funktionssystem $z_1, \ldots, z_n$ genügt dann dem Differentialsysteme

$$(\mathrm{B}) \qquad \frac{dz_\varkappa}{dx} = \sum_{\lambda=1}^{n} z_\lambda b_{\lambda\varkappa}, \qquad (\varkappa = 1, 2, \cdots, n)$$

wo vermöge der Gleichungen (2) und (7)

$$(8) \qquad b_{i\varkappa} = 0, \qquad (i = 1, 2, \cdots, m;\ \varkappa = m+1, \cdots, n)$$

und (B) gehört mit (A) zu derselben Art. Die Koeffizientenmatrix des Systems (B) hat jetzt die folgende Form

$$(9) \qquad \begin{pmatrix} b_{11} \ldots\ldots b_{1m} & 0 \ldots 0 \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ b_{m1} \ldots\ldots b_{mm} & 0 \ldots 0 \\ b_{m+1,1} \quad \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & b_{m+1,n} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ b_{n1} \quad \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & b_{nn} \end{pmatrix},$$

was wir in leicht verständlicher Symbolik durch das Schema

$$(9\mathrm{a}) \qquad \left(\begin{array}{c|c} B_{mm} & 0 \\ \hline B_{n-m,m} & B_{n-m,n-m} \end{array}\right)$$

zur Darstellung bringen.

Die Integration des Systems (B) läßt sich nun wie folgt vollziehen.

Es bedeute $(z_{i\varkappa})$ $(i,\varkappa=1,2,\cdots,m)$ eine Integralmatrix des Differentialsystems für $m$ Funktionen

$$\frac{dz_\varkappa}{dx}=\sum_{\lambda=1}^{m} z_\lambda b_{\lambda\varkappa}, \qquad (\varkappa=1,2,\cdots,m) \tag{10}$$

ferner $(z_{i\varkappa})$ $(i,\varkappa=m+1,\cdots,n)$ eine Integralmatrix des Differentialsystems für $n-m$ Funktionen

$$\frac{dz_\varkappa}{dx}=\sum_{\lambda=m+1}^{n} z_\lambda b_{\lambda\varkappa}; \qquad (\varkappa=m+1,\cdots,n) \tag{11}$$

endlich bestimmen wir die $n-m$ Funktionssysteme

$$z_{m+1,\varkappa},\cdots,z_{n\varkappa} \qquad (\varkappa=1,2,\cdots,m)$$

als partikulare Lösungen der inhomogenen linearen Differentialsysteme

$$\frac{dz_{i\varkappa}}{dx}=\sum_{\lambda=1}^{m} z_{i\lambda}b_{\lambda\varkappa}+\sum_{\lambda=m+1}^{n} z_{i\lambda}b_{\lambda\varkappa}, \qquad (\varkappa=1,2,\cdots,m) \atop (i=m+1,\cdots,n) \tag{12}$$

wo die Ausdrücke

$$\sum_{\lambda=m+1}^{n} z_{i\lambda}b_{\lambda\varkappa} \qquad (i=m+1,\cdots,n;\ \varkappa=1,2,\cdots,m) \tag{13}$$

als bekannt anzusehen sind. Dann haben wir in

$$\underset{(i,\varkappa=1,2,\cdots,n)}{(z_{i\varkappa})}=\begin{pmatrix} z_{11} & \cdots & z_{1m} & 0 & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ z_{m1} & \cdots & z_{mm} & 0 & \cdots & 0 \\ z_{m+1,1} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & z_{m+1,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ z_{n1} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & z_{nn} \end{pmatrix}, \tag{14}$$

wo also

$$z_{i\varkappa}=0, \qquad (i=1,2,\cdots,m;\ \varkappa=m+1,\cdots,n) \tag{15}$$

eine Integralmatrix des Differentialsystems (B). Daß (14) wirklich eine Integralmatrix darstellt, folgt daraus, daß

$$\underset{(i,\varkappa=1,2,\cdots,n)}{|z_{i\varkappa}|} = \underset{(i,\varkappa=1,2,\cdots,m)}{|z_{i\varkappa}|} \cdot \underset{(i,\varkappa=m+1,\cdots,n)}{|z_{i\varkappa}|}$$

gefunden wird, wo die Faktoren auf der rechten Seite, als Determinanten von Integralmatrizen der Systeme (10) beziehungsweise (11) sicher von Null verschieden sind.

Wir sehen, daß das Differentialsystem (B) eine Integralmatrix (14) besitzt, die dieselbe Form (9a) hat wie die Koeffizientenmatrix (9) von (B).

Das Differentialsystem (B) ist so beschaffen, daß seine Reduzibilität aus der Form seiner Koeffizientenmatrix direkt ersichtlich wird; wir können es darum evident reduzibel nennen. Aus der Definition der Reduzibilität folgt ohne weiteres, daß Differentialsysteme, die zu derselben Art gehören, immer gleichzeitig reduzibel bezw. irreduzibel sind. Mit Rücksicht auf die vorhergehenden Erörterungen können wir also den Satz aussprechen:

Wenn ein Differentialsystem (A) reduzibel ist, so gilt das gleiche von jedem Differentialsysteme, das mit (A) zu derselben Art gehört, und unter den Differentialsystemen, die mit (A) zu derselben Art gehören, gibt es stets solche, die evident reduzibel sind.

* * *

Ehe wir weiter gehen, mag eine einfache aber wichtige Bemerkung über die Matrizen von der Form (9a) hier eingeschaltet werden.

Es seien $(\alpha_{i\varkappa})$, $(\beta_{i\varkappa})$ zwei Matrizen von der Form (9a), also

$$(\alpha_{i\varkappa}) = \begin{pmatrix} A_{mm} & 0 \\ A_{n-m,\,m} & A_{n-m,\,n-m} \end{pmatrix}, \quad (\beta_{i\varkappa}) = \begin{pmatrix} B_{mm} & 0 \\ B_{n-m,\,m} & B_{n-m,\,n-m} \end{pmatrix}$$
$$(i, \varkappa = 1, 2, \cdots, n)$$

d. h. es sei

$$\alpha_{i\varkappa} = 0, \quad \beta_{i\varkappa} = 0. \qquad (i = 1, 2, \cdots, m;\ \varkappa = m+1, \cdots, n)$$

Bilden wir dann die komponierte Matrix

$$(\gamma_{i\varkappa}) = (\alpha_{i\varkappa})(\beta_{i\varkappa}),$$

so ist offenbar auch $(\gamma_{i\varkappa})$ von derselben Form, also

$$(\gamma_{i\varkappa}) = \begin{pmatrix} \Gamma_{mm} & 0 \\ \Gamma_{n-m,\,m} & \Gamma_{n-m,\,n-m} \end{pmatrix},$$

und zwar ist die Matrix von $m^2$ Elementen $\Gamma_{mm}$ aus den Matrizen $A_{mm}$, $B_{mm}$, die Matrix von $(n-m)^2$ Elementen $\Gamma_{n-m,\,n-m}$ aus den Matrizen $A_{n-m,\,n-m}$, $B_{n-m,\,n-m}$ in derselben Reihenfolge komponiert, also

$$\Gamma_{mm} = A_{mm}\, B_{mm},$$
$$\Gamma_{n-m,\,n-m} = A_{n-m,\,n-m}\, B_{n-m,\,n-m}.$$

Wenn ferner die Determinante von $(\alpha_{i\varkappa})$ von Null verschieden ist, so

ist auch $(\alpha_{i\varkappa})^{-1}$ von derselben Form wie $(\alpha_{i\varkappa})$, und zwar hat man in leicht verständlicher Bezeichnungsweise

$$(\alpha_{i\varkappa})^{-1} = \left(\begin{array}{c|c} A_{mm}^{-1} & 0 \\ \hline A'_{n-m,m} & A_{n-m,n-m}^{-1} \end{array}\right),$$

wo $A'_{n-m,m}$ eine Matrix von $(n-m)m$ Elementen darstellt, die im allgemeinen aus den Elementen aller drei Matrizen $A_{mm}$, $A_{n-m,m}$, $A_{n-m,n-m}$ zusammengesetzt sind.

Aus diesen Bemerkungen folgt z. B., daß wenn für ein Differentialsystem

$$\frac{dz_\varkappa}{dx} = \sum_{\lambda=1}^{n} z_\lambda b_{\lambda\varkappa} \qquad (\varkappa = 1, 2, \cdots, n)$$

bekannt ist, daß eine Integralmatrix $(z_{i\varkappa})$ desselben die Form

$$(z_{i\varkappa}) = \left(\begin{array}{c|c} Z_{mm} & 0 \\ \hline Z_{n-m,m} & Z_{n-m,n-m} \end{array}\right)$$

besitzt, dann auch die Koeffizientenmatrix $(b_{i\varkappa})$ die Form

$$(b_{i\varkappa}) = \left(\begin{array}{c|c} B_{mm} & 0 \\ \hline B_{n-m,m} & B_{n-m,n-m} \end{array}\right)$$

haben muß, und daß

$$D_x(z_{i\varkappa}) = B_{mm} \qquad (i, \varkappa = 1, 2, \cdots, m)$$

$$D_x(z_{i\varkappa}) = B_{n-m,n-m} \qquad (i, \varkappa = m+1, \cdots, n)$$

ist. Sind ferner die $(b_{i\varkappa})$ in der Umgebung eines Punktes $x = a$ eindeutig, ist aber $a$ ein singulärer Punkt der $b_{i\varkappa}$, bei dessen Umkreisung die Integralmatrix $(z_{i\varkappa})$ die Substitution $(c_{i\varkappa})$ erfährt, so hat auch die Substitution $(c_{i\varkappa})$ die Form

$$(c_{i\varkappa}) = \left(\begin{array}{c|c} C_{mm} & 0 \\ \hline C_{n-m,m} & C_{n-m,n-m} \end{array}\right),$$

und es erfährt die Matrix von $m^2$ Elementen $Z_{mm}$ bei derselben Umkreisung die Substitution $C_{mm}$, die Matrix von $(n-m)^2$ Elementen $Z_{n-m,n-m}$ die Substitution $C_{n-m,n-m}$. Zum Beweise dieser Behauptung genügt es, darauf hinzuweisen, daß die Integralmatrix, in die $(z_{i\varkappa})$ nach Umkreisung von $x = a$ übergeht, jedenfalls auch dieselbe Form wie $(z_{i\varkappa})$ selbst haben muß, da ja die verschwindenden Elemente

$$z_{i\varkappa} \qquad (i = 1, 2, \cdots, m;\ \varkappa = m+1, \cdots, n)$$

natürlich wieder in verschwindende Elemente übergehen.

* * *

Von der Integralmatrix $(z_{i\varkappa})$ des Differentialsystems (B) können wir jetzt zu einer Integralmatrix des Systems (A) übergehen, indem wir

$$(16) \qquad (y_{i\varkappa}) = (z_{i\varkappa})(r_{i\varkappa})^{-1} \qquad (i, \varkappa = 1, 2, \cdots, n)$$

setzen, wo

$$(17) \qquad (r_{i\varkappa}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & r_{1,m+1} & \dots & r_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & 1 & r_{m,m+1} & \dots & r_{mn} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & r_{m+1,m+1} & \dots & r_{m+1,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & 0 & r_{n,m+1} & \dots & r_{nn} \end{pmatrix}$$

ist. Bezeichnen wir die Inverse der Matrix $(r_{i\varkappa})$ mit $(s_{i\varkappa})$, so hat $(s_{i\varkappa})$ dieselbe Form wie $(r_{i\varkappa})$ selbst:

$$(18) \qquad (r_{i\varkappa})^{-1} = (s_{i\varkappa}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & s_{1,m+1} & \dots & s_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & 1 & s_{m,m+1} & \dots & s_{mn} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & s_{m+1,m+1} & \dots & s_{m+1,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & 0 & s_{n,m+1} & \dots & s_{nn} \end{pmatrix},$$

und wir finden:

$$(19\,\text{a}) \qquad y_{i\varkappa} = z_{i\varkappa}, \qquad (i, \varkappa = 1, 2, \cdots, m)$$

$$(19\,\text{b}) \qquad y_{i\varkappa} = y_{i1} s_{1\varkappa} + \cdots + y_{im} s_{m\varkappa}, \qquad (i = 1, 2, \cdots, m;\ \varkappa = m+1, \cdots, n)$$

$$(19\,\text{c}) \qquad y_{i\varkappa} = y_{i1} s_{1\varkappa} + \cdots + y_{im} s_{m\varkappa} + z_{i,m+1} s_{m+1,\varkappa} + \cdots + z_{in} s_{n\varkappa}. \qquad (i, \varkappa = m+1, \cdots, n)$$

Die Integration des reduziblen Differentialsystems (A), dessen Reduzibilität von der Art ist, daß die $n - m$ Ausdrücke

$$(\text{P}) \qquad z_\varkappa = \sum_{\lambda=1}^{n} y_\lambda r_{\lambda\varkappa}, \qquad (\varkappa = m+1, \cdots, n)$$

wo

$$|r_{i\varkappa}| \neq 0 \qquad (i, \varkappa = m+1, \cdots, n)$$

ist, ein lineares homogenes Differentialsystem (11) mit Koeffizienten des Rationalitätsbereiches befriedigen, gestaltet sich demnach wie folgt.

Wir bestimmen eine Integralmatrix $(y_{i\varkappa})$ $(i, \varkappa = 1, 2, \cdots, m)$ des Differentialsystems (10) oder

$$(\text{R}) \qquad \frac{dy_\varkappa}{dx} = \sum_{\lambda=1}^{m} y_\lambda \left(a_{\lambda\varkappa} + \sum_{\nu=m+1}^{n} s_{\lambda\nu} a_{\nu\varkappa}\right),$$

die sich dann durch die Ausdrücke (19 b)

$$y_{i\varkappa} = \sum_{\lambda=1}^{m}{}' y_{i\lambda} s_{\lambda\varkappa} \qquad (i = 1, 2, \cdots, m;\ \varkappa = m+1, \cdots, n)$$

zu $m$ Systemen von Lösungen des Differentialsystems (A) ergänzt. Ferner bestimmen wir eine Integralmatrix $(z_{i\varkappa})$ $(i, \varkappa = m+1, \cdots, n)$ des Differentialsystems (11):

$$\text{(Q)} \qquad \frac{dz_\varkappa}{dx} = \sum_{\lambda=m+1}^{n} z_\lambda b_{\lambda\varkappa}, \qquad (\varkappa = m+1, \cdots, n)$$

dem die Ausdrücke (P) genügen; dann ergeben sich die $(n-m)$ Lösungssysteme von (A)

$$(y_{i\varkappa}), \qquad (i = m+1, \cdots, n;\ \varkappa = 1, 2, \cdots, n)$$

die die bereits bestimmten $m$ Lösungssysteme zu einer Integralmatrix von (A) ergänzen, als partikulare Lösungen der kompletten Systeme

$$\text{(S)} \qquad \frac{dy_\varkappa}{dx} = \sum_{\lambda=1}^{m} y_\lambda \left(a_{\lambda\varkappa} + \sum_{\nu=m+1}^{n} s_{\lambda\nu} a_{\nu\varkappa}\right) + \sum_{\lambda=m+1}^{n} \sum_{\nu=m+1}^{n} z_\lambda s_{\lambda\nu} a_{\nu\varkappa}, \qquad (\varkappa = 1, 2, \cdots, n)$$

wo man für $z_{m+1}, \cdots, z_n$ der Reihe nach die Zeilen der Integralmatrix $(z_{i\varkappa})$ $(i, \varkappa = m+1, \cdots, n)$ von (Q) zu setzen hat. Und zwar braucht man nur die $m$ ersten Gleichungen der Systeme (S) aufzulösen, da dann nach (19 c) die

$$y_{i\varkappa} \qquad (i, \varkappa = m+1, \cdots, n)$$

bestimmt werden können.

Wenn das System (A) in dem angegebenen Sinne reduzibel ist, so kann man noch auf folgende Weise eine Vereinfachung eintreten lassen. Es sei $R_{i\varkappa}$ die zu dem Elemente $r_{i\varkappa}$ der Determinante

$$|r_{i\varkappa}| \qquad (i, \varkappa = m+1, \cdots, n)$$

gehörige Subdeterminante, dividiert durch diese Determinante; multipliziert man dann die Gleichungen (P) mit $R_{\nu\varkappa}$ und addiert, so wird

$$\sum_{\varkappa=m+1}^{n} z_\varkappa R_{\nu\varkappa} = \sum_{\lambda=1}^{m} y_\lambda \sum_{\varkappa=m+1}^{n} r_{\lambda\varkappa} R_{\nu\varkappa} + y_\nu. \qquad (\nu = m+1, \cdots, n)$$

Setzen wir also

$$\zeta_\nu = \sum_{\varkappa=m+1}^{n} z_\varkappa R_{\nu\varkappa}$$

$$\sum_{\varkappa=m+1}^{n} r_{\lambda\varkappa} R_{\nu\varkappa} = \varrho_{\lambda\nu},$$

so befriedigen die $n-m$ Ausdrücke

$$\zeta_\nu = \sum_{\lambda=1}^{m} y_\lambda \varrho_{\lambda\nu} + y_\nu \qquad (\nu = m+1, \cdots, n)$$

ein Differentialsystem mit Koeffizienten des Rationalitätsbereiches, das mit (Q) zu derselben Art gehört; d. h. mit andern Worten, wir können in den Ausdrücken (P) von vornherein

$$(20) \qquad r_{i\varkappa} = \delta_{i\varkappa} \qquad (i, \varkappa = m+1, \cdots, n)$$

nehmen. Die Matrix (17) hat dann die Form

$$(17\,\mathrm{a}) \qquad (r_{i\varkappa}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \ldots 0 & r_{1,m+1} & \ldots r_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 \ldots 1 & r_{m,m+1} & \ldots r_{mn} \\ 0 & 0 \ldots 0 & 1 & \ldots 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 \ldots 0 & 0 & \ldots 1 \end{pmatrix},$$

und in der inversen Matrix $(s_{i\varkappa}) = (r_{i\varkappa})^{-1}$, die dieselbe Form hat, ist einfach

$$(22) \qquad s_{i\varkappa} = -r_{i\varkappa}. \qquad (i = 1, 2, \cdots, m;\ \varkappa = m+1, \cdots, n)$$

Ferner haben wir

$$(23) \qquad \begin{cases} b_{\lambda\varkappa} = a_{\lambda\varkappa} + \sum\limits_{\nu=m+1}^{n} s_{\lambda\nu} a_{\nu\varkappa}, & (\lambda, \varkappa = 1, 2, \cdots, m) \\ b_{\nu\varkappa} = a_{\nu\varkappa}, & (\nu = m+1, \cdots, n;\ \varkappa = 1, 2, \cdots, m) \end{cases}$$

$$(24) \qquad b_{i\varkappa} = 0. \qquad (i = 1, 2, \cdots, m;\ \varkappa = m+1, \cdots, n)$$

Das System (A) läßt sich daher in die Form setzen (vergl. (S)):

$$(\mathrm{S}') \qquad \frac{dy_\varkappa}{dx} = \sum_{\lambda=1}^{m} y_\lambda \Big(a_{\lambda\varkappa} + \sum_{\nu=m+1}^{n} s_{\lambda\nu} a_{\nu\varkappa}\Big) + \sum_{\nu=m+1}^{n} z_\nu a_{\nu\varkappa}, \qquad (\varkappa = 1, 2, \cdots, n)$$

wo die durch die Gleichungen

$$(\mathrm{P}') \qquad z_\varkappa = \sum_{\lambda=1}^{m} y_\lambda r_{\lambda\varkappa} + y_\varkappa \qquad (\varkappa = m+1, \cdots, n)$$

gegebenen $z_{m+1}, \ldots, z_n$ dem Differentialsysteme (Q) genügen. Dieses letztere Differentialsystem erhalten wir, indem wir die Ausdrücke (P)

differentiieren und für die Derivierten der $y_1, \ldots, y_n$ ihre Werte aus (S′) einsetzen. Es ergibt sich auf diese Weise:

$$\frac{dz_\varkappa}{dx} = \sum_{\lambda=1}^{m} \frac{dy_\lambda}{dx} r_{\lambda\varkappa} + \sum_{\lambda=1}^{n} y_\lambda \frac{dr_{\lambda\varkappa}}{dx} + \frac{dy_\varkappa}{dx}, \qquad (\varkappa = m+1, \cdots, n)$$

also mit Rücksicht auf (S′) und (22):

$$\frac{dz_\varkappa}{dx} = \sum_{\lambda=1}^{m} r_{\lambda\varkappa} \sum_{\mu=1}^{m} y_\mu \left(a_{\mu\lambda} - \sum_{\nu=m+1}^{n} r_{\mu\nu} a_{\nu\lambda}\right) + \sum_{\lambda=1}^{m} \sum_{\nu=m+1}^{n} z_\nu a_{\nu\lambda} r_{\lambda\varkappa}$$

$$+ \sum_{\mu=1}^{m} y_\mu \frac{dr_{\mu\varkappa}}{dx} + \sum_{\mu=1}^{m} y_\mu \left(a_{\mu\varkappa} - \sum_{\nu=m+1}^{n} r_{\mu\nu} a_{\nu\varkappa}\right) + \sum_{\nu=m+1}^{n} z_\nu a_{\nu\varkappa},$$

oder:

$$\frac{dz_\varkappa}{dx} = \sum_{\mu=1}^{m} y_\mu \left(\frac{dr_{\mu\varkappa}}{dx} + \sum_{\lambda=1}^{m} a_{\mu\lambda} r_{\lambda\varkappa} \quad \sum_{\nu=m+1}^{n} \sum_{\lambda=1}^{m} r_{\mu\nu} a_{\nu\lambda} r_{\lambda\varkappa} + a_{\mu\varkappa}\right.$$

$$\left. - \sum_{\nu=m+1}^{n} r_{\mu\nu} a_{\nu\varkappa}\right) + \sum_{\nu=m+1}^{n} z_\nu \left(a_{\nu\varkappa} + \sum_{\lambda=1}^{m} a_{\nu\lambda} r_{\lambda\varkappa}\right).$$

Nun sollten aber in dem Differentialsysteme (Q), dem die $z_{m+1}, \cdots, z_n$ genügen, die $y_1, \ldots, y_m$ überhaupt nicht auftreten; es müssen folglich die Gleichungen bestehen:

$$\text{(D)} \quad \frac{dr_{\mu\varkappa}}{dx} + \sum_{\lambda=1}^{m} \left(a_{\mu\lambda} - \sum_{\nu=m+1}^{n} r_{\mu\nu} a_{\nu\lambda}\right) r_{\lambda\varkappa} + a_{\mu\varkappa} - \sum_{\nu=m+1}^{n} r_{\mu\nu} a_{\nu\varkappa} = 0, \qquad \begin{pmatrix} \mu = 1, 2, \cdots, m \\ \varkappa = m+1, \cdots, n \end{pmatrix}$$

und das Differentialsystem (Q) lautet jetzt:

$$\text{(Q′)} \quad \frac{dz_\varkappa}{dx} = \sum_{\nu=m+1}^{n} z_\nu \left(a_{\nu\varkappa} + \sum_{\lambda=1}^{m} a_{\nu\lambda} r_{\lambda\varkappa}\right), \qquad (\varkappa = m+1, \cdots, n)$$

so daß also:

$$\text{(25)} \quad b_{i\varkappa} = a_{i\varkappa} + \sum_{\lambda=1}^{m} a_{i\lambda} r_{\lambda\varkappa}. \qquad (i, \varkappa = m+1, \cdots, n)$$

Der Gang dieser Rechnung zeigt, daß das Bestehen der Gleichungen (D) die notwendige und hinreichende Bedingung dafür darstellt, daß das System (A) in dem Sinne reduzibel sei, daß die Ausdrücke (P′) einem Differentialsysteme (Q′) genügen. Die notwendigen

und hinreichenden Bedingungen für die Reduzibilität des Differentialsystems (A) in dem Sinne, daß überhaupt Ausdrücke

$$\sum_{\lambda=1}^{n} y_\lambda r_{\lambda x} \qquad (x = m+1, \cdots, n)$$

mit Koeffizienten des Rationalitätsbereiches gefunden werden können, für die

$$|r_{ix}| \neq 0, \quad (i, x = m+1, \cdots, n)$$

und die einem homogenen linearen Differentialsysteme mit $n - m$ Unbekannten und mit Koeffizienten des Rationalitätsbereiches Genüge leisten, bestehen also darin, daß das Differentialsystem (D) ein partikulares Lösungssystem $r_{\mu x}$ besitzt, dessen Elemente Funktionen des Rationalitätsbereiches sind.*)

Wir fügen noch einige Bemerkungen über reduzible Systeme hinzu, die uns bei späteren Untersuchungen von Nutzen sein werden.

1) Wenn für das Differentialsystem (A) bekannt ist, daß zwischen den Elementen eines Integralsystems $\eta_1, \ldots, \eta_n$ homogene lineare Relationen mit Koeffizienten des Rationalitätsbereiches bestehen, so ist das Differentialsystem reduzibel. — In der Tat, mögen zwischen den $\eta_1, \ldots, \eta_n$ genau $n - m$ voneinander unabhängige Relationen

$$(\alpha) \qquad \eta_1 \gamma_{1x} + \cdots + \eta_n \gamma_{nx} = 0 \qquad (x = m+1, \cdots, n)$$

bestehen (d. h. auch nicht mehr als $n - m$ solche Relationen), wo die $\gamma_{ix}$ dem Rationalitätsbereiche angehören, und sei etwa die Determinante

$$|\gamma_{ix}| \neq 0. \quad (i, x = m+1, \cdots, n)$$

Dann können die Relationen $(\alpha)$ in die Form

$$(\alpha') \qquad \eta_x = \eta_1 s_{1x} + \cdots + \eta_m s_{mx} \qquad (x = m+1, \cdots, n)$$

gesetzt werden, und wir wissen, daß zwischen den $\eta_1, \ldots, \eta_m$ keine

*) Für den Fall, wo der Rationalitätsbereich der Bereich aller rationalen Funktionen von $x$ ist, läßt sich hieraus ein Verfahren herleiten, mittels dessen durch einen endlichen Prozeß entschieden werden kann, ob ein vorgelegtes homogenes lineares Differentialsystem mit rationalen Koeffizienten überhaupt reduzibel ist oder nicht. Wir gehen in diesen Vorlesungen auf die Ausführung dieser Methode nicht ein, sondern bemerken nur, daß dieselbe natürlich im wesentlichen auf das Verfahren hinauskommt, das I. Bendixson (Stockholm, Öfversigt. XLIX, 1892) und E. Beke (Mathem. Annalen, Bd. 45, 1894) für den Fall einer homogenen linearen Differentialgleichung $n$-ter Ordnung zur Entscheidung der analogen Frage angegeben haben.

homogene lineare Relation mit Koeffizienten des Rationalitätsbereiches bestehen kann. Setzen wir nun

$$(\beta) \qquad \begin{cases} z_\varkappa = y_\varkappa, & (\varkappa = 1, 2, \cdots, m) \\ z_\varkappa = -y_1 s_{1\varkappa} - \cdots - y_m s_{m\varkappa} + y_\varkappa, & (\varkappa = m+1, \cdots, n) \end{cases}$$

so befriedigen die $z_1, \ldots, z_n$ ein Differentialsystem

$$(\mathrm{B}) \qquad \frac{dz_\varkappa}{dx} = \sum_{\lambda=1}^{n} z_\lambda b_{\lambda\varkappa}, \qquad (\varkappa = 1, 2, \cdots, n)$$

das mit (A) zu derselben Art gehört. Dieses Differentialsystem (B) besitzt das partikulare Integralsystem

$$z_1 = \eta_1, \cdots, \quad z_m = \eta_m, \quad z_{m+1} = 0, \quad \cdots, z_n = 0,$$

die $\eta_1, \ldots, \eta_m$ befriedigen folglich das Differentialsystem mit $m$ Unbekannten

$$(\mathfrak{B}) \qquad \frac{dz_\varkappa}{dx} = \sum_{\lambda=1}^{m} z_\lambda b_{\lambda\varkappa} \qquad (\varkappa = 1, 2, \cdots, m)$$

und die $(n-m)$ Relationen

$$(\gamma) \qquad 0 = \sum_{\lambda=1}^{m} \eta_\lambda b_{\lambda\varkappa}. \qquad (\varkappa = m+1, \cdots, n)$$

Da aber die $b_{\lambda\varkappa}$ dem Rationalitätsbereiche angehören und zwischen den $\eta_1, \ldots, \eta_m$ homogene lineare Relationen von der Form $(\gamma)$ nicht bestehen sollten, so folgt, daß

$$b_{\lambda\varkappa} = 0 \qquad (\lambda = 1, 2, \cdots, m;\ \varkappa = m+1, \cdots, n)$$

ist; das Differentialsystem (B) hat also eine Koeffizientenmatrix von der Form

$$(b_{i\varkappa}) = \left(\begin{array}{c|c} B_{mm} & 0 \\ \hline B_{n-m,\,m} & B_{n-m,\,n-m} \end{array}\right),$$

d. h. (A) ist reduzibel. — Beiläufig ergibt sich, daß, wenn zwischen den Elementen eines partikularen Integralsystems des Differentialsystems (A) $n-m$ unabhängige Relationen von der Form $(\alpha)$, und nicht mehr, mit Koeffizienten des Rationalitätsbereiches bestehen, dann genau $m$ linear unabhängige partikulare Lösungssysteme von (A) vorhanden sind, die diese Relationen $(\alpha)$ befriedigen.

2) Sind für das Differentialsystem (A) die $m$ linear unabhängigen Lösungssysteme $y_{i\varkappa}$ $(i = 1, 2, \cdots, m;\ \varkappa = 1, 2, \cdots, n)$ bekannt, und ist für dieselben

z. B. die Determinante $|y_{i\varkappa}|$ $(i, \varkappa = 1, 2, \cdots, m)$ von Null verschieden, so kann man die Relationen

$$y_{i\varkappa} = y_{i1}s_{1\varkappa} + \cdots + y_{im}s_{m\varkappa} \qquad (\varkappa = m+1, \cdots, n)$$

ansetzen, und aus diesen die $s_{\nu\varkappa}$ bestimmen. Bildet man dann die $z_1, \ldots, z_n$ nach den Gleichungen ($\beta$), so sind für das Differentialsystem

$$\text{(B)} \qquad \frac{dz_\varkappa}{dx} = \sum_{\lambda=1}^{n} z_\lambda b_{\lambda\varkappa} \qquad (\varkappa = 1, 2, \cdots, n)$$

die Elemente

$$z_{i\varkappa} = y_{i\varkappa} \qquad (i, \varkappa = 1, 2, \cdots, m)$$

einer Integralmatrix $(z_{i\varkappa})$ $(i, \varkappa = 1, 2, \cdots, n)$ bekannt. Denkt man sich nun das homogene System mit $n - m$ Unbekannten

$$(\varepsilon) \qquad \frac{dz_\varkappa}{dx} = \sum_{\lambda=m+1}^{n} z_\lambda b_{\lambda\varkappa} \qquad (\varkappa = m+1, \cdots, n)$$

integriert, und bedeutet $(z_{i\varkappa})$ $(i, \varkappa = m+1, \cdots, n)$ eine Integralmatrix von ($\varepsilon$), so ergeben sich, wie wir gesehen haben, die

$$z_{i\varkappa} \qquad (i = m+1, \cdots, n;\ \varkappa = 1, 2, \cdots, m)$$

durch Integration des inhomogenen Systems

$$\frac{dz_\varkappa}{dx} = \sum_{\lambda=1}^{m} z_\lambda b_{\lambda\varkappa} + \sum_{\lambda=m+1}^{n} z_{i\lambda} b_{\lambda\varkappa}, \qquad (\varkappa = 1, 2, \cdots, m)$$

also, da eine Integralmatrix des zugehörigen reduzierten Systems, nämlich $(z_{i\varkappa})$ $(i, \varkappa = 1, 2, \cdots, m)$, bekannt ist, nach den Ergebnissen der dritten Vorlesung durch Quadraturen.

Kennt man also für ein System (A) $m$ linear unabhängige Lösungssysteme, so kann die Integration von (A) auf die Integration eines homogenen Systems mit $n - m$ Unbekannten und auf Quadraturen zurückgeführt werden.

3) Wenn zwei Differentialsysteme mit $n$ Unbekannten

$$\frac{dy_\varkappa}{dx} = \sum_{\lambda=1}^{n} y_\lambda a_{\lambda\varkappa}, \qquad \frac{dz_\varkappa}{dx} = \sum_{\lambda=1}^{n} z_\lambda b_{\lambda\varkappa} \qquad (\varkappa = 1, 2, \cdots, n)$$

ein oder mehrere Lösungssysteme gemein haben, ohne identisch zu sein, so bestehen für jedes gemeinsame Lösungssystem $\eta_1, \ldots, \eta_n$ die Relationen

$$\sum_{\lambda=1}^{n} \eta_\lambda (a_{\lambda\varkappa} - b_{\lambda\varkappa}) = 0, \qquad (\varkappa = 1, 2, \cdots, n)$$

wo jedenfalls nicht alle $a_{i\varkappa} - b_{i\varkappa}$ verschwinden. Die beiden Differentialsysteme sind also nach 1) reduzibel.

4) Satz von Frobenius.*) Wenn für zwei partikulare Integralsysteme $\eta_\varkappa$, $\zeta_\varkappa$ des Differentialsystems (A) Relationen von der Form

$$\text{(a)} \qquad \zeta_\varkappa = \sum_{\lambda=1}^{n} \eta_\lambda \gamma_{\lambda\varkappa} \qquad (\varkappa = 1, 2, \cdots, n)$$

mit Koeffizienten des Rationalitätsbereiches bestehen, so ist das System (A) reduzibel.

Wären die $\gamma_{i\varkappa}$ so beschaffen, daß ihre Determinante $|\gamma_{i\varkappa}|$ $(i, \varkappa = 1, 2, \cdots, n)$ identisch verschwindet, so bestünden zwischen den $\zeta_1, \ldots, \zeta_n$ homogene lineare Relationen mit Koeffizienten des Rationalitätsbereiches; die Reduzibilität von (A) wäre also nach 1) erwiesen. Wir können also voraussetzen, daß

$$|\gamma_{i\varkappa}| \neq 0. \qquad (i, \varkappa = 1, 2, \cdots, n)$$

Setzen wir dann

$$\text{(b)} \qquad z_\varkappa = \sum_{\lambda=1}^{n} y_\lambda \gamma_{\lambda\varkappa}, \qquad (\varkappa = 1, 2, \cdots, n)$$

so befriedigen die $z_1, \ldots, z_n$ ein Differentialsystem

$$\text{(B)} \qquad \frac{dz_\varkappa}{dx} = \sum_{\lambda=1}^{n} z_\lambda b_{\lambda\varkappa}, \qquad (\varkappa = 1, 2, \cdots, n)$$

das mit (A) zu derselben Art gehört. Dieses Differentialsystem hat mit (A) das Lösungssystem $\zeta_1, \ldots, \zeta_n$ gemein; wäre also (B) nicht mit (A) identisch, so folgte die Reduzibilität von (A) nach der Bemerkung 3). Wir können folglich voraussetzen, daß (A) mit (B) identisch ist. — Bedeutet dann $(y_{i\varkappa})$ eine Integralmatrix von (A), so ist auch

$$(z_{i\varkappa}) = (y_{i\varkappa})(\gamma_{i\varkappa})$$

eine Integralmatrix von (A); es gibt folglich eine konstante Matrix $(c_{i\varkappa})$ mit nicht verschwindender Determinante, für die

$$(z_{i\varkappa}) = (c_{i\varkappa})(y_{i\varkappa})$$

ist. Bedeutet nun $\omega_\alpha$ eine Wurzel der charakteristischen Gleichung

$$|c_{i\varkappa} - \delta_{i\varkappa}\omega| = 0, \qquad (i, \varkappa = 1, 2, \cdots, n)$$

*) Crelles Journal, Bd. 76 (1873), S. 256; Hamburger ibid., Bd. 111 (1893) S. 121.

und bestimmen wir die Konstanten $u_1, \ldots, u_n$ so, daß sie den Gleichungen

$$\sum_{\lambda=1}^{n} u_\lambda (c_{\lambda\varkappa} - \delta_{\lambda\varkappa}\omega_\alpha) = 0$$

genügen, so ist, wenn wir

$$\left.\begin{aligned}\sum_{\lambda=1}^{n} u_\lambda y_{\lambda\varkappa} &= Y_\varkappa,\\ \sum_{\lambda=1}^{n} u_\lambda z_{\lambda\varkappa} &= Z_\varkappa\end{aligned}\right\} \qquad (\varkappa = 1, 2, \cdots, n)$$

setzen,

$$Z_\varkappa = \omega_\alpha Y_\varkappa. \qquad (\varkappa = 1, 2, \cdots, n)$$

Es bestehen folglich zwischen den Elementen des partikularen Integralsystems $Y_1, \ldots, Y_n$ von (A) die homogenen Relationen mit Koeffizienten des Rationalitätsbereiches

$$\omega_\alpha Y_\varkappa = \sum_{\lambda=1}^{n} Y_\lambda \gamma_{\lambda\varkappa}, \qquad (\varkappa = 1, 2, \cdots, n)$$

woraus dann nach 1) die Reduzibilität von (A) folgt.*)

5) Wenn die beiden Differentialsysteme

(A) $$\frac{dy_\varkappa}{dx} = \sum_{\lambda=1}^{n} y_\lambda a_{\lambda\varkappa} \qquad (\varkappa = 1, 2, \cdots, n)$$

(B) $$\frac{dz_\varkappa}{dx} = \sum_{\lambda=1}^{n} z_\lambda b_{\lambda\varkappa} \qquad (\varkappa = 1, 2, \cdots, n)$$

zu derselben Art gehören, so bestehen Relationen (1)

$$z_\varkappa = \sum_{\lambda=1}^{n} y_\lambda r_{\lambda\varkappa} \qquad (\varkappa = 1, 2, \cdots, n)$$

mit Koeffizienten des Rationalitätsbereiches, für die

$$|r_{i\varkappa}| \neq 0 \qquad (i, \varkappa = 1, 2, \cdots, n)$$

ist, und wir haben die Gleichungen (2)

$$(b_{i\varkappa}) = (r_{i\varkappa})^{-1}(a_{i\varkappa})(r_{i\varkappa}) + D_x(r_{i\varkappa}),$$

*) Wie man sieht, wird hier die Annahme ausgenützt, daß der Rationalitätsbereich alle Konstanten enthält. Vergl. E. Landau, Archiv der Math. und Physik (3) X (1905) S. 45.

die wir explizite in der Form schreiben können:

$$\text{(F)} \qquad \frac{dr_{i\varkappa}}{dx} = \sum_{\lambda=1}^{n} r_{i\lambda} b_{\lambda\varkappa} - \sum_{\lambda=1}^{n} a_{i\lambda} r_{\lambda\varkappa}. \qquad (i, \varkappa = 1, 2, \cdots, n)$$

Dieses System homogener linearer Differentialgleichungen erster Ordnung für die $n^2$ Unbekannten $r_{i\varkappa}$ muß ein partikulares Lösungssystem besitzen, dessen Elemente dem Rationalitätsbereiche angehören, und dessen Determinante $|r_{i\varkappa}|$ nicht verschwindet. Das Vorhandensein eines solchen partikularen Lösungssystems ist die notwendige und hinreichende Bedingung für die Zugehörigkeit der Differentialsysteme (A), (B) zu derselben Art.

Besitzt das System (F) zwei verschiedene solche Lösungssysteme $r_{i\varkappa}$ und $\varrho_{i\varkappa}$ und bedeutet $(y_{i\varkappa})$ eine Integralmatrix von (A), so sind

$$(y_{i\varkappa})(r_{i\varkappa}), \quad (y_{i\varkappa})(\varrho_{i\varkappa})$$

zwei Integralmatrizen von (B), es gibt folglich eine konstante Matrix $(c_{i\varkappa})$ von der Beschaffenheit, daß

$$(y_{i\varkappa})(\varrho_{i\varkappa}) = (c_{i\varkappa})(y_{i\varkappa})(r_{i\varkappa});$$

daraus folgt aber

$$(y_{i\varkappa}) = (c_{i\varkappa})(y_{i\varkappa})(r_{i\varkappa})(\varrho_{i\varkappa})^{-1},$$

das System (A) ist also nach dem Frobeniusschen Satze reduzibel.

5) Setzen wir

$$(y_{i\varkappa})^{-1} = (Y_{i\varkappa}), \quad Y_{i\varkappa} = \eta_{\varkappa i}$$
$$(z_{i\varkappa})^{-1} = (Z_{i\varkappa}), \quad Z_{i\varkappa} = \zeta_{\varkappa i},$$

so sind $(\eta_{i\varkappa})$ bezw. $(\zeta_{i\varkappa})$ Integralmatrizen des zu (A) bezw. (B) adjungierten Differentialsystems (vgl. die zweite Vorlesung S. 28). Nun folgt aber aus

$$(z_{i\varkappa}) = (y_{i\varkappa})(r_{i\varkappa}).$$
$$(Z_{i\varkappa}) = (r_{i\varkappa})^{-1}(Y_{i\varkappa}),$$

also, wenn wir

$$(r_{i\varkappa})^{-1} = (R_{i\varkappa}), \quad R_{i\varkappa} = \varrho_{\varkappa i}$$

setzen:

$$(\zeta_{i\varkappa}) = (\eta_{i\varkappa})(\varrho_{i\varkappa}).$$

D. h. wenn (A) und (B) zu derselben Art gehören, so gehören auch die adjungierten Systeme zu derselben Art; und wenn (A) reduzibel ist, so ist folglich auch das adjungierte System reduzibel.

7) Wir schließen diese Vorlesung mit dem Hinweise auf einige der neueren Untersuchungen von A. Loewy*) über Reduzibilität linearer Differentialgleichungen.

*) Siehe namentlich Mathem. Annalen, Bd. 56, S. 549, American Transactions Vol. 4, S. 44.

Wenn das Differentialsystem (A) reduzibel ist, so kann es durch den Übergang zu einem Systeme derselben Art in das evident reduzible System (B), wo

$$b_{i\varkappa} = 0 \qquad (i = 1, 2, \cdots, m; \varkappa = m+1, \cdots, n)$$

ist, transformiert werden. In diesem können die Teilsysteme

(R)
$$\frac{dz_\varkappa}{dx} = \sum_{\lambda=1}^{m} z_\lambda b_{\lambda\varkappa}, \qquad (\varkappa = 1, 2, \cdots, m)$$

(Q)
$$\frac{dz_\varkappa}{dx} = \sum_{\lambda=m+1}^{n} z_\lambda b_{\lambda\varkappa} \qquad (\varkappa = m+1, \cdots, n)$$

eventuell wieder reduzibel sein; durch Fortsetzung des Transformationsverfahrens können wir schließlich zu einem mit (A) zu derselben Art gehörigen Differentialsysteme gelangen, das die folgende Form hat:

(A′)
$$\left\{\begin{aligned} &\frac{dz_\varkappa}{dx} = \sum_{\lambda=1}^{n} z_\lambda b_{\lambda\varkappa}, \qquad (\varkappa = 1, 2, \cdots, n) \\ &(b_{i\varkappa}) = \begin{pmatrix} \mathfrak{b}_{11} & 0 & 0 & \ldots 0 \\ \mathfrak{b}_{21} & \mathfrak{b}_{22} & 0 & \ldots 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots \\ \mathfrak{b}_{\nu 1} & \mathfrak{b}_{\nu 2} & \mathfrak{b}_{\nu 3} & \ldots \mathfrak{b}_{\nu\nu} \end{pmatrix}. \end{aligned}\right.$$

Darin bedeuten die $\mathfrak{b}_{i\varkappa}$ $(i, \varkappa = 1, 2, \cdots, \nu)$ Matrizen von $f_i$ Zeilen und $f_\varkappa$ Kolonnen für $\varkappa \leq i$, während alle übrigen Elemente der Koeffizientenmatrix $(b_{i\varkappa})$ Nullen sind; die Teildifferentialsysteme, deren Koeffizientenmatrizen durch die in der Diagonale stehenden Matrizen

(α)
$$\mathfrak{b}_{11}, \mathfrak{b}_{22}, \ldots, \mathfrak{b}_{\nu\nu}$$

gegeben werden, seien irreduzibel. Natürlich kann das Differentialsystem (A) auf verschiedene Weisen in ein Differentialsystem von der Form (A′) übergeführt werden. Es sei dann

(A″)
$$\left\{\begin{aligned} &\frac{du_\varkappa}{dx} = \sum_{\lambda=1}^{n} u_\lambda c_{\lambda\varkappa}, \qquad (\varkappa = 1, 2, \cdots, n) \\ &(c_{i\varkappa}) = \begin{pmatrix} \mathfrak{c}_{11} & 0 & 0 & \ldots 0 \\ \mathfrak{c}_{21} & \mathfrak{c}_{22} & 0 & \ldots 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots \\ \mathfrak{c}_{\mu 1} & \mathfrak{c}_{\mu 2} & \mathfrak{c}_{\mu 3} & \ldots \mathfrak{c}_{\mu\mu} \end{pmatrix} \end{aligned}\right.$$

ein anderes mit (A) zu derselben Art gehöriges Differentialsystem von derselben Beschaffenheit wie (A′), so gilt der folgende von A. Loewy bewiesene Satz: Die Teildifferentialsysteme, deren Koeffizientenmatrizen die Matrizen

$$(\beta) \qquad C_{11}, C_{22}, \ldots, C_{\mu\mu}$$

sind, lassen sich den Teildifferentialsystemen mit den Koeffizientenmatrizen ($\alpha$) gegenseitig eindeutig so zuordnen, daß die einander zugeordneten Differentialsysteme gleich viele Unbekannte enthalten und von derselben Art sind.*) Insbesondere ist also stets $\nu = \mu$.

Auf einen Beweis dieses Satzes gehen wir hier nicht ein, sondern bemerken nur, daß die Differentialsysteme mit konstanten Koeffizienten in dem in der vorigen Vorlesung bereits erledigten besonderen Falle sowie in dem allgemeinen Falle, zu dessen Behandlung wir jetzt übergehen wollen, ein Beispiel für den angeführten Satz liefern.

*) Loewy a. a. O. Der Satz ist a. a. O. in anderer Form ausgesprochen, in der hier gegebenen Übertragung auf Differentialsysteme wird derselbe besonders übersichtlich.

# Achte Vorlesung.

**Differentialsysteme mit konstanten Koeffizienten im Falle mehrfacher Wurzeln der charakteristischen Gleichung. Elementarteiler. Integration der Teilsysteme. Kanonische Form einer Matrix. Notwendige und hinreichende Bedingungen für die Ähnlichkeit der Matrizen. Cauchysche Systeme. Aufstellung einer speziellen Integralmatrix. Kanonische Form der Umlaufsubstitution. Lösung der Aufgabe der fünften Vorlesung.**

Wir wenden uns jetzt wieder der Behandlung der Differentialsysteme mit konstanten Koeffizienten

$$\text{(E)} \qquad \frac{dy_\varkappa}{dt} = \sum_{\lambda=1}^{n} y_\lambda a_{\lambda\varkappa} \qquad (\varkappa = 1, 2, \cdots, n)$$

zu und knüpfen dabei unmittelbar an die Erörterungen und Bezeichnungen der sechsten Vorlesung (S. 95ff.) an.

Es sei $r_\alpha$ eine $p$-fache Wurzel der charakteristischen Gleichung

$$\text{(F)} \qquad |a_{\varkappa\lambda} - \delta_{\varkappa\lambda} r| = 0; \qquad (\varkappa, \lambda = 1, 2, \cdots, n)$$

wenn dann die Matrix

$$(1) \qquad (a_{\varkappa\lambda} - \delta_{\varkappa\lambda} r_\alpha) \qquad (\varkappa, \lambda = 1, 2, \cdots, n)$$

vom Range $\nu_0$ ist, so muß jedenfalls (vergl., für $p = 1$, S. 97)

$$n - \nu_0 \leqq p$$

sein. Die linearen Gleichungen (33) der sechsten Vorlesung (S. 97)

$$(2) \qquad \sum_{\lambda=1}^{n} (a_{\varkappa\lambda} - \delta_{\varkappa\lambda} r_\alpha) u_\lambda = 0 \qquad (\varkappa = 1, 2, \cdots, n)$$

besitzen dann genau $n - \nu_0$ linear unabhängige Lösungssysteme

$$u_{\varkappa\nu}, \qquad (\varkappa = 1, 2, \cdots, n;\ \nu = \nu_0 + 1, \cdots, n)$$

die eine Matrix vom Range $n - \nu_0$ bilden. Es sei etwa die Determinante $|u_{\varkappa\nu}|_{(\varkappa, \nu = \nu_0 + 1, \cdots, n)}$ von Null verschieden, dann können wir

$$u_{\varkappa\nu} = \delta_{\varkappa\nu} \qquad (\varkappa, \nu = \nu_0 + 1, \cdots, n)$$

wählen. Setzen wir also

(3) $$v_\nu^{(0)} = \sum_{\lambda=1}^{\nu_0} y_\lambda u_{\lambda\nu} + y_\nu, \qquad (\nu = \nu_0+1, \cdots, n)$$

so befriedigen diese Größen die Differentialgleichungen

$(Q_0)$ $$\frac{dv_\nu^{(0)}}{dt} = r_\alpha v_\nu^{(0)}, \qquad (\nu = \nu_0+1, \cdots, n)$$

und die $y_1, \ldots, y_{\nu_0}$ genügen — nach den Ergebnissen der vorigen Vorlesung — dem Differentialsysteme

$(S_0)$ $$\frac{dy_\varkappa}{dt} = \sum_{\lambda=1}^{\nu_0} y_\lambda b_{\lambda\varkappa} + \sum_{\lambda=\nu_0+1}^{n} v_\lambda^{(0)} a_{\lambda\varkappa}, \qquad (\varkappa = 1, 2, \cdots, \nu_0)$$

wo

$$b_{i\varkappa} = a_{i\varkappa} - \sum_{\nu=\nu_0+1}^{n} u_{i\nu} a_{\nu\varkappa}. \qquad (i, \varkappa = 1, 2, \cdots, \nu_0)$$

Wenn wir

$$\underset{(i,\varkappa=1,2,\cdots,n)}{(u_{i\varkappa})} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 & u_{1,\nu_0+1} & \ldots & u_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & u_{\nu_0,\nu_0+1} & \ldots & u_{\nu_0 n} \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix}$$

setzen, so ist

$$(u_{i\varkappa})^{-1}(a_{i\varkappa})(u_{i\varkappa}) = \begin{pmatrix} b_{11} & \ldots & b_{1\nu_0} & 0 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ b_{\nu_0 1} & \ldots & b_{\nu_0\nu_0} & 0 & \ldots & 0 \\ a_{\nu_0+1,1} & \cdot & a_{\nu_0+1,\nu_0} & r_\alpha & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & \ldots & a_{n\nu_0} & 0 & \ldots & r_\alpha \end{pmatrix}.$$

Die zu der Matrix $(b_{i\varkappa})_{(i,\varkappa=1,2,\cdots,\nu_0)}$ gehörige charakteristische Gleichung

$(F_1)$ $$|b_{i\varkappa} - \delta_{i\varkappa} r| = 0 \qquad (i, \varkappa = 1, 2, \cdots, \nu_0)$$

hat folglich dieselben Wurzeln wie die Gleichung (F), abgesehen von der $(n - \nu_0)$-fachen Wurzel $r_\alpha$. Wenn nun $p = n - \nu_0$ wäre, so hätte die Gleichung $(F_1)$ überhaupt nicht mehr die Wurzel $r_\alpha$; dann wäre die auf diese Wurzel bezügliche Untersuchung beendet, und wir könnten eine andere Wurzel $r_\beta$ von (F) vornehmen.

Wenn dagegen $p > n - \nu_0$ ist, so hat die Gleichung $(\mathrm{F}_1)$ noch die $p - n + \nu_0$-fache Wurzel $r_\alpha$. Wir suchen dann Konstanten

$$u_1^{(1)}, \ldots, u_{\nu_0}^{(1)}$$

so zu bestimmen, daß

$$v^{(1)} = u_1^{(1)} y_1 + \cdots + u_{\nu_0}^{(1)} y_{\nu_0} \tag{4}$$

einer Differentialgleichung von der Form

$$\frac{dv^{(1)}}{dt} = r_\alpha v^{(1)} + L(v_{\nu_0+1}^{(0)}, \ldots, v_n^{(0)}) \tag{5}$$

genügt, wo $L$ eine homogene lineare Funktion der eingeklammerten Größen mit konstanten Koeffizienten bedeutet. Es soll also:

$$\sum_{\varkappa=1}^{\nu_0} u_\varkappa^{(1)} \left( \sum_{\lambda=1}^{\nu_0} y_\lambda b_{\lambda\varkappa} + \sum_{\lambda=\nu_0+1}^{n} v_\lambda^{(0)} a_{\lambda\varkappa} \right) = r_\alpha \sum_{\varkappa=1}^{\nu_0} u_\varkappa^{(1)} y_\varkappa + L(v_{\nu_0+1}^{(0)}, \cdots v_n^{(0)})$$

sein; hieraus folgt aber:

$$\sum_{\varkappa=1}^{\nu_0} u_\varkappa^{(1)} \sum_{\lambda=1}^{\nu_0} y_\lambda b_{\lambda\varkappa} = r_\alpha \sum_{\varkappa=1}^{\nu_0} u_\varkappa^{(1)} y_\varkappa,$$

und demgemäß:

$$\sum_{\varkappa=1}^{\nu_0} u_\varkappa^{(1)} (b_{\lambda\varkappa} - \delta_{\lambda\varkappa} r_\alpha) = 0, \qquad (\lambda = 1, 2, \cdots, \nu_0) \tag{6}$$

da weder zwischen den $y_1, \cdots, y_{\nu_0}, v_{\nu_0+1}^{(0)}, \cdots, v_n^{(0)}$ noch zwischen den $y_1, \cdots, y_{\nu_0}$ selbst eine homogene Relation mit konstanten Koeffizienten bestehen kann, wenn nicht zwischen den $y_1, \ldots, y_n$ eine solche besteht; das letztere wurde aber bereits in der sechsten Vorlesung (S. 96) ausgeschlossen.

Es sei nun die Matrix

$$(b_{i\varkappa} - \delta_{i\varkappa} r_\alpha) \qquad (i, \varkappa = 1, 2, \cdots, \nu_0) \tag{7}$$

vom Range $\nu_1$; dann besitzt das Gleichungssystem (6) genau $\nu_0 - \nu_1$ linear unabhängige Lösungssysteme

$$u_{\varkappa\nu}^{(1)}, \qquad (\varkappa = 1, \cdots, \nu_0;\ \nu = \nu_1 + 1, \cdots, \nu_0)$$

in denen wir, wenn — wie wir voraussetzen wollen — die Determinante

$$\left| u_{\varkappa\nu}^{(1)} \right| \neq 0 \qquad (\varkappa, \nu = \nu_1 + 1, \cdots, \nu_0)$$

ist,

$$u_{\varkappa\nu}^{(1)} = \delta_{\varkappa\nu} \qquad (\varkappa, \nu = \nu_1 + 1, \cdots, \nu_0)$$

wählen können. Die $\nu_0 - \nu_1$ Ausdrücke:

(8) $$v_\nu^{(1)} = \sum_{\lambda=1}^{\nu_1} y_\lambda u_{\lambda\nu}^{(1)} + y_\nu \qquad (\nu = \nu_1 + 1, \cdots, \nu_0)$$

befriedigen dann die Differentialgleichungen

($Q_1$) $$\frac{d v_\nu^{(1)}}{dt} = r_\alpha v_\nu^{(1)} + \sum_{\lambda=\nu_0+1}^{n} v_\lambda^{(0)} c_{\lambda\nu}, \qquad (\nu = \nu_1 + 1, \cdots, \nu_0)$$

wo die $c_{\lambda\nu}$ leicht bestimmbare Konstanten bedeuten, während die $y_1, \ldots, y_{\nu_1}$ einem Differentialsysteme von der Form:

($S_1$) $$\frac{dy_\varkappa}{dt} = \sum_{\lambda=1}^{\nu_1} y_\lambda c_{\lambda\varkappa} + \sum_{\lambda=\nu_1}^{\nu_0} v_\lambda^{(1)} c_{\lambda\varkappa} + \sum_{\lambda=\nu_0+1}^{n} v_\lambda^{(0)} \bar{c}_{\lambda\varkappa}$$

genügen, dessen konstante Koeffizienten ebenfalls leicht angegeben werden können.

Setzen wir nun

(9) $$\sum_{\lambda=\nu_0+1}^{n} v_\lambda^{(0)} c_{\lambda\nu} = \bar{v}_\nu^{(0)}, \qquad (\nu = \nu_1 + 1, \cdots, \nu_0)$$

so sind diese $\nu_0 - \nu_1$ Ausdrücke linear unabhängig; denn bestünde zwischen ihnen eine lineare homogene Relation mit konstanten Koeffizienten

$$\sum_{\nu=\nu_1+1}^{\nu_0} \gamma_\nu \bar{v}_\nu^{(0)} = 0,$$

so würde der Ausdruck

$$v = \sum_{\nu=\nu_1+1}^{\nu_0} \gamma_\nu v_\nu^{(1)}$$

einer Differentialgleichung von der Form

$$\frac{dv}{dt} = r_\alpha v$$

genügen, was nicht möglich ist. — Da die Anzahl der linear unabhängigen $v^{(0)}$ gleich $n - \nu_0$ ist, so folgt hieraus zunächst, daß

(10) $$\nu_0 - \nu_1 < n - \nu_0$$

sein muß. Wir nehmen nunmehr an Stelle von $\nu_0 - \nu_1$ der $v_\varkappa^{(0)}$ die durch (9) gegebenen $\bar{v}_\nu^{(0)}$ und bezeichnen die so gewählten $n - \nu_0$ linear unabhängigen Kombinationen der $y_1, \ldots, y_n$, die einer Differentialgleichung von der Form ($Q_0$) genügen, jetzt mit

(11) $$z_1^{(0)},\ z_2^{(0)}, \ldots, z_{\tau_0}^{(0)}, \quad \tau_0 = n - \nu_0,$$

ferner bezeichnen wir die $\nu_0 - \nu_1$ linear unabhängigen $v_\nu^{(1)}$, die Differentialgleichungen der Form $(Q_1)$ genügen, mit

(12) $$z_1^{(1)},\ z_2^{(1)}, \ldots, z_{\tau_1}^{(1)}, \quad \tau_1 = \nu_0 - \nu_1,$$

und zwar in der Weise, daß

$(\bar{Q}_1)$ $$\frac{dz_\nu^{(1)}}{dt} = r_\alpha z_\nu^{(1)} + z_\nu^{(0)} \qquad (\nu = 1, 2, \cdots, \tau_1)$$

ist. Dabei sind die $\tau_0 + \tau_1$ Größen (11) und (12) linear unabhängige Funktionen ersten Grades der $y_1, \ldots, y_n$ mit konstanten Koeffizienten. Wir haben dann für die Größen (11) und (12) die $\tau_0 + \tau_1 = n - \nu_1$ Differentialgleichungen

$(Q_{01})$ $$\frac{dz_\nu^{(0)}}{dt} = r_\alpha z_\nu^{(0)}; \quad \frac{dz_\nu^{(1)}}{dt} = r_\alpha z_\nu^{(1)} + z_\nu^{(0)},$$
$$(\nu = 1, 2, \cdots, \tau_0) \qquad (\nu = 1, 2, \cdots, \tau_1)$$

und für die $y_1, y_2, \ldots, y_{\nu_1}$ das Differentialsystem

$(S_{01})$ $$\frac{dy_\varkappa}{dt} = \sum_{\lambda=1}^{\nu_1} y_\lambda c_{\lambda\varkappa} + L_\varkappa(z_1^{(0)}, \ldots, z_{\tau_0}^{(0)}, z_1^{(1)}, \ldots, z_{\tau_1}^{(1)}),$$
$$(\varkappa = 1, 2, \cdots, \nu_1)$$

wo $L_\varkappa$ eine lineare Funktion mit konstanten Koeffizienten der in Klammern stehenden Größen bedeutet. — Die Wurzeln der charakteristischen Gleichung

$(F_2)$ $$|c_{i\varkappa} - \delta_{i\varkappa} r| = 0 \qquad (i, \varkappa = 1, 2, \cdots, \nu_1)$$

stimmen, von der $(n - \nu_1)$-fachen Wurzel $r_\alpha$ abgesehen, mit den Wurzeln der Gleichung (F) überein.

Wenn nun $p > n - \nu_1$ ist, so hat die Gleichung $(F_2)$ noch immer die Wurzel $r_\alpha$; wir haben dann in

$$v^{(2)} = u_1^{(2)} y_1 + \cdots + u_{\nu_1}^{(2)} y_{\nu_1}$$

die Konstanten $u_1^{(2)}, \ldots, u_{\nu_1}^{(2)}$ so zu bestimmen, daß $v^{(2)}$ eine Differentialgleichung der Form

$$\frac{dv^{(2)}}{dt} = r_\alpha v^{(2)} + L(z_1^{(0)}, \ldots, z_{\tau_0}^{(0)}, z_1^{(1)}, \ldots, z_{\tau_1}^{(1)})$$

befriedigt, wo $L$ wieder eine lineare homogene Funktion ihrer Argumente mit konstanten Koeffizienten bedeutet. So fahren wir fort, bis die Wurzel $r_\alpha$ ganz erschöpft ist. Wir erhalten auf diese Weise

$$(\alpha)\qquad \begin{cases} z_1^{(0)}, \ldots, z_{\tau_0}^{(0)}, & \tau_0 = n - \nu_0, \\ z_1^{(1)}, \ldots, z_{\tau_1}^{(1)}, & \tau_1 = \nu_0 - \nu_1, \\ \ldots & \ldots \\ z_1^{(\lambda)}, \ldots, z_{\tau_\lambda}, & \tau_\lambda = \nu_{\lambda-1} - \nu_\lambda, \end{cases}$$

wo (vergl. die Gleichung (10))

$$\tau_0 \geqq \tau_1 \geqq \cdots > \tau_\lambda,$$
$$\tau_0 + \tau_1 + \cdots + \tau_\lambda = n - \nu_\lambda = p$$

ist; die Größen ($\alpha$) sind also $p$ linear unabhängige homogene lineare Funktionen der $y_1, \ldots, y_n$ mit konstanten Koeffizienten. Indem wir bei jedem neuen Schritte gewisse der bereits gewonnenen $z_1^{(i)}, z_2^{(i)}, \ldots$ durch geeignete lineare Kombinationen derselben mit konstanten Koeffizienten ersetzen (ähnlich wie für gewisse der $v_\varkappa^{(0)}$ die durch die Gleichungen (9) gegebenen $\bar{v}_\varkappa^{(0)}$ genommen wurden), können wir es erreichen, daß die auf diese Weise erzielten $p$ linear unabhängigen Kombinationen der $y_1, \ldots, y_n$, die wir wieder durch das Schema ($\alpha$) repräsentieren, den folgenden Differentialgleichungen genügen:

$$(\mathrm{Q}_\alpha)\qquad \begin{cases} \dfrac{dz_\nu^{(0)}}{dt} = r_\alpha z_\nu^{(0)}, & (\nu = 1, 2, \cdots, \tau_0) \\ \dfrac{dz_\nu^{(1)}}{dt} = r_\alpha z_\nu^{(1)} + z_\nu^{(0)}, & (\nu = 1, 2, \cdots, \tau_1) \\ \ldots & \ldots \\ \dfrac{dz_\nu^{(\lambda)}}{dt} = r_\alpha z_\nu^{(\lambda)} + z_\nu^{(\lambda-1)}. & (\nu = 1, 2, \cdots, \tau_\lambda) \end{cases}$$

Zu diesen treten jetzt die $\nu_\lambda = n - p$ ersten $y_1, \ldots, y_{\nu_\lambda}$, die Differentialgleichungen von der Form

$$(\mathrm{S}_\alpha)\qquad \frac{dy_\varkappa}{dt} = \sum_{\mu=1}^{\nu_\lambda} y_\mu a_{\mu\varkappa}^{(\alpha)} + L_\varkappa\left(z_1^{(0)}, \ldots, z_{\tau_\lambda}^{(\lambda)}\right) \qquad (\varkappa = 1, 2, \cdots, \nu_\lambda)$$

befriedigen, und die charakteristische Gleichung

$$(\mathrm{F}_\alpha)\qquad \left| a_{\mu\varkappa}^{(\alpha)} - \delta_{\mu\varkappa} r \right| = 0 \qquad (\mu, \varkappa = 1, 2, \cdots, \nu_\lambda)$$

hat mit (F) alle Wurzeln, abgesehen von der $p$-fachen Wurzel $r_\alpha$, gemein. Wir verfahren nun mit dem aus den Gleichungen ($\mathrm{Q}_\alpha$), ($\mathrm{S}_\alpha$) gebildeten Differentialsysteme, unter Zugrundelegung einer von $r_\alpha$ verschiedenen Wurzel $r_\beta$ der Gleichung (F) oder ($\mathrm{F}_\alpha$) genau so, wie wir es vorhin für $r_\alpha$ angedeutet haben. Sind auf diese Weise alle Wurzeln

von (F) erschöpft, so haben wir das Differentialsystem (E) in ein Differentialsystem transformiert, das aus lauter Teilsystemen von der Art wie $(Q_\alpha)$ besteht, und wo jedes dieser Teilsysteme zu einer der voneinander verschiedenen Wurzeln der charakteristischen Gleichung (F) gehört.

Wir betrachten jetzt eines dieser Teilsysteme, etwa $(Q_\alpha)$, etwas genauer.

Wir haben zunächst $\tau_0 - \tau_1$ einzelne Differentialgleichungen

$$\frac{dz_\nu^{(0)}}{dt} = r_\alpha z_\nu^{(0)}, \qquad (\nu = \tau_1 + 1, \cdots, \tau_0)$$

dann $\tau_1 - \tau_2$ Systeme von je zwei Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} \frac{dz_\nu^{(0)}}{dt} &= r_\alpha z_\nu^{(0)}, \\ \frac{dz_\nu^{(1)}}{dt} &= r_\alpha z_\nu^{(1)} + z_\nu^{(0)}, \end{aligned}\right| \qquad (\nu = \tau_2 + 1, \cdots, \tau_1)$$

dann $\tau_2 - \tau_3$ Systeme von je drei Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} \frac{dz_\nu^{(0)}}{dt} &= r_\alpha z_\nu^{(0)}, \\ \frac{dz_\nu^{(1)}}{dt} &= r_\alpha z_\nu^{(1)} + z_\nu^{(0)}, \\ \frac{dz_\nu^{(2)}}{dt} &= r_\alpha z_\nu^{(2)} + z_\nu^{(1)} \end{aligned}\right\} \qquad (\nu = \tau_3 + 1, \cdots, \tau_2)$$

usw., endlich $\tau_\lambda$ Systeme von je $\lambda + 1$ Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} \frac{dz_\nu^{(0)}}{dt} &= r_\alpha z_\nu^{(0)}, \\ \frac{dz_\nu^{(1)}}{dt} &= r_\alpha z_\nu^{(1)} + z_\nu^{(0)} \\ &\cdots\cdots\cdots \\ \frac{dz_\nu^{(\lambda)}}{dt} &= r_\alpha z_\nu^{(\lambda)} + z_\nu^{(\lambda-1)}. \end{aligned}\right\} \qquad (\nu = 1, 2, \cdots, \tau_\lambda)$$

Dabei können natürlich einzelne der Differenzen

$$\tau_0 - \tau_1, \quad \tau_1 - \tau_2, \cdots$$

gleich Null sein.

Man nennt nach **Weierstraß** die Faktoren

$$\begin{array}{ll} r - r_\alpha, & (\tau_0 - \tau_1)\text{-mal}, \\ (r - r_\alpha)^2, & (\tau_1 - \tau_2)\text{-mal}, \\ \cdots & \cdots \\ (r - r_\alpha)^{\lambda+1}, & \tau_\lambda\text{-mal}, \end{array}$$

die zu der $p$-fachen Wurzel $r_\alpha$ der charakteristischen Gleichung (F) gehörigen **Elementarteiler** der Matrix $(a_{\iota\varkappa} - \delta_{\iota\varkappa} r)$ oder, im übertragenen Sinne, wenn kein Mißverständnis zu befürchten ist, auch der Matrix $(a_{\iota\varkappa})$ selbst. — Wir denken uns nun diejenigen Elementarteiler, die wirklich auftreten, der Reihe nach hingeschrieben, natürlich jeden so oft, wie die zugehörige der Zahlen $\tau_0 - \tau_1, \tau_1 - \tau_2, \ldots, \tau_\lambda$ es anzeigt:

$$(r - r_\alpha)^{e_\alpha^{(1)}}, \ (r - r_\alpha)^{e_\alpha^{(2)}}, \ldots, (r - r_\alpha)^{e_\alpha^{(i_\alpha)}},$$

wo die Exponenten eine nicht zunehmende Folge:

$$e_\alpha^{(1)} \geqq e_\alpha^{(2)} \geqq \cdots \geqq e_\alpha^{(i_\alpha)}$$

bilden mögen. Dann besteht also das Teildifferentialsystem $(Q_\alpha)$, das der Wurzel $r_\alpha$ entspricht, aus $i_\alpha$ gesonderten Teildifferentialsystemen, die den einzelnen Elementarteilern entsprechen, und zwar hat das zu dem Elementarteiler $(r - r_\alpha)^\sigma$ gehörige Teildifferentialsystem die Form:

$$(Q^{(\alpha,\sigma)}) \quad \begin{cases} \dfrac{du_1}{dt} = r_\alpha u_1 + u_2, \\ \dfrac{du_2}{dt} = \qquad r_\alpha u_2 + u_3, \\ \cdots\cdots\cdots \\ \dfrac{du_{\sigma-1}}{dt} = \qquad\qquad r_\alpha u_{\sigma-1} + u_\sigma, \\ \dfrac{du_\sigma}{dt} = \qquad\qquad\qquad r_\alpha u_\sigma. \end{cases}$$

Die Koeffizientenmatrix dieses Teildifferentialsystems hat also die Form

$$\varrho_{\alpha\sigma} = \begin{pmatrix} r_\alpha & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 1 & r_\alpha & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & r_\alpha & \ldots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & r_\alpha \end{pmatrix},$$

und die Integration von $(Q^{(\alpha,\sigma)})$ läßt sich nunmehr auch sofort vollziehen.

Zunächst ergibt die letzte Gleichung des Systems

$$u_\sigma = c_\sigma e^{r_\alpha t},$$

wo $c_\sigma$ eine Integrationskonstante bedeutet; dann folgt aus der vorletzten Gleichung

$$\frac{du_{\sigma-1}}{dt} = r_\alpha u_{\sigma-1} + c_\sigma e^{r_\alpha t}\ *)$$

für $u_{\sigma-1}$ die Darstellung

$$u_{\sigma-1} = (c_\sigma t + c_{\sigma-1}) e^{r_\alpha t},$$

und durch Fortsetzung dieses Verfahrens ergibt sich

$$u_{\sigma-2} = \left(c_\sigma \frac{t^2}{2!} + c_{\sigma-1} t + c_{\sigma-2}\right) e^{r_\alpha t},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$u_1 = \left(c_\sigma \frac{t^{\sigma-1}}{(\sigma-1)!} + c_{\sigma-1} \frac{t^{\sigma-2}}{(\sigma-2)!} + \cdots + c_2 t + c_1\right) e^{r_\alpha t},$$

wo auch $c_{\sigma-1}, \ldots, c_2, c_1$ Integrationskonstanten bedeuten. Durch geeignete Spezialisierung dieser Konstanten können wir nun ohne weiteres eine Integralmatrix

$$\underset{(i, \varkappa = 1, 2, \cdots, \sigma)}{(u_{i\varkappa})} = V_{\alpha\sigma}$$

des Systems $(Q^{(\alpha,\sigma)})$ herstellen; wir kommen später ausführlich darauf zurück, wie diese Integralmatrix in einer für unsere Zwecke geeigneten Weise einzurichten ist. Wir bemerken nur noch das Folgende: Das allgemeine Integralsystem $u_1, \ldots, u_\sigma$ des Systems $(Q^{(\alpha,\sigma)})$ hängt von der besonderen Konstitution dieses Systems und überdies nur von dem Werte der Wurzel $r_\alpha$ ab.

Nunmehr vereinigen wir die zu den sämtlichen verschiedenen Wurzeln von (F)

$$r_\alpha, r_\beta, \ldots, r_\varepsilon$$

bezw. zu den diesen Wurzeln entsprechenden Elementarteilern gehörigen Systeme $(Q^{(\nu,\sigma)})$ $(\nu = \alpha, \beta, \cdots, \varepsilon;\ \sigma = e_\nu^{(1)}, \cdots, e_\nu^{(i_\nu)})$, zu einem Differentialsysteme

$$\text{(K)} \qquad \frac{dv_\varkappa}{dt} = \sum_{\lambda=1}^{n} v_\lambda r_{\lambda\varkappa}; \qquad (\varkappa = 1, 2, \cdots, n)$$

*) Das allgemeine Integral der kompletten Differentialgleichung

$$\frac{du}{dt} = pu + q$$

lautet:

$$u = e^{\int p\,dt} \int q e^{-\int p\,dt}\, dt.$$

dann geht dieses System aus (E) durch eine Transformation von der Form

(13) $$v_\varkappa = \sum_{\lambda=1}^{n} y_\lambda u_{\lambda\varkappa} \qquad (\varkappa = 1, 2, \cdots, n)$$

hervor, wo die $u_{i\varkappa}$ wohlbestimmte Konstanten bedeuten, deren Determinante nicht verschwindet. Die Koeffizientenmatrix von (K) enthält **kodiagonal** aneinandergereiht die Teilmatrizen

$$\varrho_{\nu\sigma} \qquad \left(\nu = \alpha, \beta, \cdots, \varepsilon;\ \sigma = e_\nu^{(1)}, \cdots, e_\nu^{(i_\nu)}\right)$$

und an den übrigen Stellen lauter Nullen, d. h. es ist:

$$\underset{(i,\varkappa=1,2,\cdots,n)}{(r_{i\varkappa}) = (u_{i\varkappa})^{-1}(a_{i\varkappa})(u_{i\varkappa})} = \begin{pmatrix} \varrho_{\alpha e_\alpha^{(1)}} & 0 & 0 \ldots 0 \\ 0 & \varrho_{\alpha e_\alpha^{(2)}} & 0 \ldots 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 \ldots \varrho_{\varepsilon e_\varepsilon^{(i_\varepsilon)}} \end{pmatrix},$$

und ähnlich ist eine Integralmatrix von (K) aus den Integralmatrizen der Teilsysteme $(Q^{(\nu,\sigma)})$ aufgebaut:

$$\underset{(i,\varkappa=1,2,\cdots,n)}{(v_{i\varkappa})} = \begin{pmatrix} V_{\alpha e_\alpha^{(1)}} & 0 & 0 \ldots 0 \\ 0 & V_{\alpha e_\alpha^{(2)}} & 0 \ldots 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 \ldots V_{\varepsilon e_\varepsilon^{(i_\varepsilon)}} \end{pmatrix};$$

eine Integralmatrix von (E) ergibt sich dann durch die Formel

(14) $$(y_{i\varkappa}) = (v_{i\varkappa})(u_{i\varkappa})^{-1}.$$

Wir ziehen nunmehr aus den bisherigen Ergebnissen eine wichtige Folgerung. — Betrachten wir nämlich an Stelle von $(a_{i\varkappa})$ irgendeine mit $(a_{i\varkappa})$ **ähnliche Matrix**

$$(b_{i\varkappa}) = (\mathfrak{a}_{i\varkappa})^{-1}(a_{i\varkappa})(\mathfrak{a}_{i\varkappa}),$$

so ist, wie in der sechsten Vorlesung (vergl. Gl. (43) S. 99) gezeigt worden ist, auch

$$(b_{i\varkappa} - \delta_{i\varkappa} r) = (\mathfrak{a}_{i\varkappa})^{-1}(a_{i\varkappa} - \delta_{i\varkappa} r)(\mathfrak{a}_{i\varkappa});$$

es sind also, wie bereits a. a. O. hervorgehoben wurde, einerseits die Wurzeln der zu $(b_{i\varkappa})$ gehörigen charakteristischen Gleichung

$$\underset{(i,\varkappa=1,2,\cdots,n)}{|b_{i\varkappa} - \delta_{i\varkappa} r| = 0}$$

mit denen der zu $(a_{i\varkappa})$ gehörigen charakteristischen Gleichung identisch.

Andererseits erkennt man aber auch, daß, wenn wir für irgendeine dieser Wurzeln, etwa $r_\alpha$, die zugehörigen Elementarteiler der Matrix $(b_{\iota\varkappa})$ in derselben Weise bestimmen, wie dies in dieser Vorlesung für $(a_{\iota\varkappa})$ auseinandergesetzt wurde, sich genau dieselben Elementarteiler ergeben müssen wie für $(a_{\iota\varkappa})$ selbst. Denn es treten z. B. an die Stelle der Gleichungen (2) dieser Vorlesung die Gleichungen

$$\sum_{\lambda=1}^{n}(b_{\varkappa\lambda}-\delta_{\varkappa\lambda}r_\alpha)\,u_\lambda=0; \qquad (\varkappa=1,2,\cdots,n)$$

die Matrix $(b_{\iota\varkappa}-\delta_{\iota\varkappa}r_\alpha)$ hat aber, da sie mit $(a_{\iota\varkappa}-\delta_{\iota\varkappa}r_\alpha)$ ähnlich ist, denselben Rang wie diese letztere Matrix usw. — Für die ähnlichen Systeme $(a_{\iota\varkappa})$, $(b_{\iota\varkappa})$ stimmen also, wie wir sagen können, die Elementarteiler überein, oder — wenn wir die Matrix $(r_{\iota\varkappa})$ die kanonische Form der Matrix $(a_{\iota\varkappa})$ nennen — die ähnlichen Matrizen $(a_{\iota\varkappa})$, $(b_{\iota\varkappa})$ haben dieselbe kanonische Form.

Dieser Satz ist nun, ähnlich wie der analoge, für den Fall ungleicher Wurzeln der charakteristischen Gleichung in der sechsten Vorlesung aufgestellte, umkehrbar. — Bedeutet nämlich jetzt $(b_{\iota\varkappa})$ eine Matrix von $n^2$ Elementen, deren Elementarteiler mit denen von $(a_{\iota\varkappa})$ übereinstimmen, so ist $(b_{\iota\varkappa})$ in die kanonische Form $(r_{\iota\varkappa})$ transformierbar, d. h. es gibt eine Matrix $(\bar{u}_{\iota\varkappa})$, so daß

$$(r_{\iota\varkappa})=(\bar{u}_{\iota\varkappa})^{-1}\,(b_{\iota\varkappa})\,(\bar{u}_{\iota\varkappa})$$

ist. Dann folgt aber ohne weiteres die Darstellung

$$(b_{\iota\varkappa})=(\bar{u}_{\iota\varkappa})\,(u_{\iota\varkappa})^{-1}\,(a_{\iota\varkappa})\,(u_{\iota\varkappa})\,(\bar{u}_{\iota\varkappa})^{-1},$$

d. h. es ist $(b_{\iota\varkappa})$ mit $(a_{\iota\varkappa})$ ähnlich. Wir haben also jetzt den folgenden Fundamentalsatz dieser Theorie ganz allgemein bewiesen:

Die notwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür, daß die beiden Matrizen $(a_{\iota\varkappa})$, $(b_{\iota\varkappa})$ $(\iota,\varkappa=1,2,\cdots,n)$ ähnlich sind, bestehen darin, daß die Elementarteiler dieser Matrizen übereinstimmen. Damit ist zugleich die in der fünften Vorlesung (S. 72 unten) formulierte Aufgabe vollkommen gelöst.

Wir wenden uns nun — dem in der sechsten Vorlesung befolgten Wege gemäß — zu der Betrachtung des Cauchyschen Systems

$$\text{(H)} \qquad \frac{dy_\varkappa}{dx}=\sum_{\lambda=1}^{n}y_\lambda\,\frac{a_{\lambda\varkappa}}{x-a}, \qquad (\varkappa=1,2,\cdots,n)$$

das aus (E) durch die Transformation

$$\text{(15)} \qquad t=\log\,(x-a)$$

hervorgeht, und stellen ihm sogleich das System

$$\text{(G)} \qquad \frac{dv_\varkappa}{dx} = \sum_{\lambda=1}^{n} v_\lambda \frac{r_{\lambda\varkappa}}{x-a} \qquad (\varkappa = 1, 2, \cdots, n)$$

an die Seite, das durch dieselbe Transformation aus (K) entsteht, und wo die $v_\varkappa$ mit den $y_\varkappa$ durch die Gleichungen (13)

$$v_\varkappa = \sum_{\lambda=1}^{n} y_\lambda u_{\lambda\varkappa} \qquad (\varkappa = 1, 2, \cdots, n)$$

verknüpft sind. Das allgemeine Lösungsystem $u_1, \ldots, u_\sigma$ des dem Systeme $(Q^{(\alpha,\sigma)})$ entsprechenden Teilsystems von (G) lautet in seiner Abhängigkeit von $x$ (vergl. S. 130)

$$\begin{cases} u_1 = (x-a)^{r_\alpha}\Big(c_1 + c_2 \log(x-a) + \cdots + c_{\sigma-1}\dfrac{\log^{\sigma-2}(x-a)}{(\sigma-2)!} \\ \qquad\qquad + c_\sigma \dfrac{\log^{\sigma-1}(x-a)}{(\sigma-1)!}\Big), \\ u_2 = (x-a)^{r_\alpha}\Big(c_2 + c_3 \log(x-a) + \cdots + c_\sigma \dfrac{\log^{\sigma-2}(x-a)}{(\sigma-2)!}\Big), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ u_{\sigma-1} = (x-a)^{r_\alpha}\big(c_{\sigma-1} + c_\sigma \log(x-a)\big), \\ u_\sigma = (x-a)^{r_\alpha} c_\sigma . \end{cases}$$

Wir wollen jetzt, durch geeignete Wahl der Integrationskonstanten, eine Integralmatrix dieses Teilsystems herzustellen suchen, deren Änderung bei einem Umlaufe der Variabeln $x$ um den Punkt $a$ sich in möglichst einfacher Form angeben läßt.

Eine Integralmatrix $(y_{i\varkappa})$ von (H) wird, wenn $x$ den gedachten Umlauf vollzieht, eine gewisse lineare Substitution $(c_{i\varkappa})$ erfahren, d. h. in

$$\text{(16)} \qquad (c_{i\varkappa})\,(y_{i\varkappa})$$

übergehen. Zu der Matrix $(c_{i\varkappa})$ gehört eine gewisse charakteristische Gleichung

$$\text{(17)} \qquad |\,c_{i\varkappa} - \delta_{i\varkappa}\omega\,| = 0,$$

die zum Punkte $x = a$ gehörige Fundamentalgleichung (vergl. sechste Vorlesung, S. 102), deren Wurzeln wir durch $\omega_1, \ldots, \omega_n$ bezeichnen. Wir denken uns nun die Matrix $(c_{i\varkappa})$ in ihre kanonische Form $(\omega_{i\varkappa})$ transformiert,

$$(\omega_{i\varkappa}) = (\gamma_{i\varkappa})^{-1}(c_{i\varkappa})(\gamma_{i\varkappa});$$

dann wird

$$(\eta_{i\varkappa}) = (\gamma_{i\varkappa})(y_{i\varkappa})$$

eine Integralmatrix von $(\bar{H})$ und entsprechend

$$(v_{i\varkappa}) = (\eta_{i\varkappa})(u_{i\varkappa})$$

eine Integralmatrix von (G) sein, die beim Umlaufe um $a$ die kanonische Substitution $(\omega_{i\varkappa})$ erleidet. Diese Integralmatrix $(v_{i\varkappa})$ wollen wir aufstellen. Wir bemerken, daß die kanonische Form der Matrix $(c_{i\varkappa})$ natürlich von der besonderen Wahl der Integralmatrix $(y_{i\varkappa})$ unabhängig ist, da ja (vergl. die fünfte Vorlesung, S. 72) die Substitutionen, die verschiedene Integralmatrizen desselben Differentialsystems bei demselben Umlaufe erleiden, einander ähnlich sind. Die aufzustellende Integralmatrix $(v_{i\varkappa})$ ist daher auch unabhängig von der Wahl der Integralmatrix $(y_{i\varkappa})$.

Um unsere Aufgabe zu lösen, setzen wir

$$s = \frac{\log(x-a)}{2\pi\sqrt{-1}};$$

dann hat $s$ die Eigenschaft, sich bei dem in Rede stehenden Umlaufe von $x$ um den Punkt $a$ in $s+1$ zu verwandeln. Die Ausdrücke für $u_1, \ldots, u_\sigma$ können in der Form

$$(18) \qquad \begin{cases} u_1 = (x-a)^{r_\alpha} f(s), \\ u_2 = (x-a)^{r_\alpha} f'(s), \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ u_{\sigma-1} = (x-a)^{r_\alpha} f^{(\sigma-2)}(s), \\ u_\sigma = (x-a)^{r_\alpha} f^{(\sigma-1)}(s) \end{cases}$$

geschrieben werden, wo

$$(19) \qquad f(s) = \bar{c}_1 + \bar{c}_2 s + \cdots \bar{c}_{\sigma-1}\frac{s^{\sigma-2}}{(\sigma-2)!} + \bar{c}_\sigma\frac{s^{\sigma-1}}{(\sigma-1)!}$$

gesetzt wurde und $\bar{c}_1, \ldots, \bar{c}_\sigma$ wieder Integrationskonstanten bedeuten, während $f'(s), f''(s), \ldots f^{(\sigma-1)}(s)$ die sukzessiven Derivierten von $f(s)$ nach $s$ bezeichnen.

Wir setzen nunmehr

$$s^{(\varkappa)} = s(s-1)\ldots(s-\varkappa+1); \qquad (\varkappa = 1, 2, \cdots)$$

dann läßt sich die ganze rationale Funktion $f(s)$ in die Form

$$(20) \qquad f(s) = C_1 + C_2 s^{(1)} + \cdots + C_{\sigma-1}\frac{s^{(\sigma-2)}}{(\sigma-2)!} + C_\sigma\frac{s^{(\sigma-1)}}{(\sigma-1)!}$$

setzen, wo die $C_1, C_2, \ldots, C_\sigma$ ebenfalls als Integrationskonstanten betrachtet werden können. Bezeichnen wir dann — nach der in der

Differenzenrechnung üblichen Weise — für irgendeine Funktion $\varphi(s)$ von $s$ die Differenz $\varphi(s+1) - \varphi(s)$ mit $\Delta\varphi(s)$, setzen also

$$\varphi(s+1) - \varphi(s) = \Delta\varphi(s),$$

und ebenso weiter

$$\Delta\varphi(s+1) - \Delta\varphi(s) = \Delta^2\varphi(s),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\Delta^{\lambda-1}\varphi(s+1) - \Delta^{\lambda-1}\varphi(s) = \Delta^{\lambda}\varphi(s),$$

so ist offenbar

$$\Delta s^{(\varkappa)} = \varkappa s^{(\varkappa-1)} \qquad (\varkappa = 1, 2, \cdots)$$

und ferner

$$\Delta\left(\frac{ds^{(\varkappa)}}{ds}\right) = \frac{d\Delta s^{(\varkappa)}}{ds} = \varkappa\frac{ds^{(\varkappa-1)}}{ds}.$$

Wir haben also die Formeln

$$(21) \qquad \begin{cases} \Delta^{\lambda} f'(s) = \dfrac{d}{ds}\Delta^{\lambda} f(s), \\ \Delta^{\lambda} f^{(\varkappa)}(s) = \dfrac{d^{\varkappa}}{ds^{\varkappa}}\Delta^{\lambda} f(s). \end{cases}$$

Wir wählen nun die Integralmatrix

$$\underset{(i,\varkappa=1,2,\cdots\sigma)}{(u_{i\varkappa})} = V_{a\sigma}$$

des Differentialsystems $(Q^{(a,\sigma)})$ in folgender Weise. Zuvörderst sei

$$(22^1) \qquad \begin{cases} u_{\sigma 1} = (x-a)^{r_a} f(s), \\ u_{\sigma-1,1} = (x-a)^{r_a}\omega_a\Delta f(s), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ u_{21} = (x-a)^{r_a}\omega_a^{\sigma-2}\Delta^{\sigma-2} f(s), \\ u_{11} = (x-a)^{r_a}\omega_a^{\sigma-1}\Delta^{\sigma-1} f(s); \end{cases}$$

dann ist zufolge der Formeln (18) und mit Rücksicht auf (19):

$$(22^2) \qquad \begin{cases} u_{\sigma 2} = (x-a)^{r_a} f'(s), \\ u_{\sigma-1,2} = (x-a)^{r_a}\omega_a\Delta f'(s), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ u_{22} = (x-a)^{r_a}\omega_a^{\sigma-2}\Delta^{\sigma-2} f'(s) \end{cases}$$

usw., endlich

$$(22^{\sigma}) \qquad u_{\sigma\sigma} = (x-a)^{r_a} f^{(\sigma-1)}(s),$$

während

$$(23) \qquad u_{i\varkappa} = 0, \qquad (i < \varkappa).$$

Lassen wir $x$ den Umlauf um den Punkt $a$ vollziehen, so multi-

plizieren sich $u_{11}, u_{22}, \ldots, u_{\sigma\sigma}$ mit dem Faktor $e^{2\pi\sqrt{-1}r_\alpha}$; wir haben also in diesem Faktor eine Wurzel der **Fundamentalgleichung** (17), können demnach gleich

$$(24) \qquad \omega_\alpha = e^{2\pi\sqrt{-1}r_\alpha}$$

setzen. Wenn wir also das, was aus $u_{i\varkappa}$ wird, wenn $x$ den Umlauf um $a$ vollzogen hat, mit $\bar{u}_{i\varkappa}$ bezeichnen, so ist

$$\bar{u}_{ii} = \omega_\alpha u_{ii}. \qquad (i = 1, 2, \cdots, \sigma)$$

Ferner ergibt sich z. B. für

$$u_{i1} = (x - a)^{r_\alpha} \omega_\alpha^{\sigma - i} \Delta^{\sigma - i} f(s) \qquad (i = 2, 3, \cdots, \sigma)$$

die Änderung:

$$\bar{u}_{i1} = (x - a)^{r_\alpha} \omega_\alpha^{\sigma - i + 1} \Delta^{\sigma - i} f(s + 1);$$

wir finden also, da

$$\Delta^{\sigma - i} f(s + 1) = \Delta^{\sigma - i} f(s) + \Delta^{\sigma - i + 1} f(s)$$

ist,

$$\bar{u}_{i1} = \omega_\alpha u_{i1} + u_{i-1,1}.$$

In ähnlicher Weise finden wir allgemein:

$$\bar{u}_{i\varkappa} = \omega_\alpha u_{i\varkappa} + u_{i-1,\varkappa}, \qquad (i > \varkappa;\ \varkappa = 1, 2, \cdots, \sigma - 1)$$

d. h. die durch die Ausdrücke (22), (23) gegebene Integralmatrix $V_{\alpha\sigma}$ des Teilsystems $(Q^{(\alpha,\sigma)})$ erleidet bei dem in Rede stehenden Umlaufe die **Substitution**:

$$\begin{pmatrix} \omega_\alpha & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 1 & \omega_\alpha & \ldots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & \omega_\alpha \end{pmatrix} = \Omega_{\alpha\sigma},$$

die zufolge der Gleichung (24) von $r_\alpha$ nur in der Weise abhängt, daß sie keine Änderung erfährt, wenn in dem Teildifferentialsysteme $(Q^{(\alpha,\sigma)})$ an die Stelle von $r_\alpha$ die Größe $r_\alpha + g$ gesetzt wird, wo $g$ eine beliebige ganze Zahl bedeutet.

Wir schließen hieraus und aus der Art, wie die Integralmatrix $(v_{i\varkappa})$ des Systems (G) beziehungsweise (K) aus den Teilmatrizen $V_{\alpha\sigma}$ aufgebaut ist (S. 131), daß die Matrix $(v_{i\varkappa})$ durch den in Rede stehenden Umlauf der Variabeln $x$ diejenige Substitution erfährt, die entsteht, wenn wir die Teilmatrizen $\Omega_{\alpha\sigma}$ in derselben Reihenfolge kodiagonal aneinanderreihen, wie die $V_{\alpha\sigma}$ in $(v_{i\varkappa})$ aufeinanderfolgen, und die übrigen Elemente durch Nullen ersetzen. Wir schreiben diese **Substitution**:

$$\Omega = \underset{(i, \varkappa = 1, 2, \cdots, n)}{(\omega_{i\varkappa})} = \begin{pmatrix} \Omega_{\alpha e_\alpha^{(1)}} & 0 & 0 \ldots 0 \\ 0 & \Omega_{\alpha e_\alpha^{(2)}} & 0 \ldots 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 \ldots \Omega_{\varepsilon e_\varepsilon^{(i_\varepsilon)}} \end{pmatrix},$$

sie stellt also in der Tat die kanonische Form der Substitution $(c_{i\varkappa})$ dar, die irgendeine Integralmatrix des Systems $(\bar{\mathrm{H}})$ bei unserem Umlaufe erfährt.

Wir können jetzt die Aufgabe (siehe S. 94), eine Funktionalmatrix $(\mathfrak{y}_{i\varkappa})$ anzugeben, die eine vorgeschriebene lineare Substitution $(c_{i\varkappa})$ erfährt, wenn $x$ den Punkt $a$ umkreist, im allgemeinsten Falle lösen. Wir haben zu dem Ende zuvörderst die Matrix $(c_{i\varkappa})$ in ihre kanonische Form zu transformieren, also die Wurzeln der Gleichung

$$|c_{i\varkappa} - \delta_{i\varkappa}\omega| = 0$$

und die zu diesen gehörigen Elementarteiler der Matrix $(c_{i\varkappa})$ aufzustellen. Seien diese Elementarteiler

(25) $$(\omega - \omega_\nu)^\sigma \qquad (\nu = \alpha, \beta, \cdots, \varepsilon;\ \sigma = e_\nu^{(1)}, \cdots, e_\nu^{(i_\nu)}).$$

Wir setzen dann

(26) $$r_\nu = \frac{\log \omega_\nu}{2\pi\sqrt{-1}}, \qquad (\nu = \alpha, \beta, \cdots, \varepsilon)$$

wodurch die $r_\nu$ natürlich nur abgesehen von additiven ganzen Zahlen bestimmt sind, und bilden uns eine kanonische Matrix mit den Elementarteilern

$$(r - r_\nu)^\sigma. \qquad (\nu = \alpha, \beta, \cdots, \varepsilon;\ \sigma = e_\nu^{(1)}, \cdots, e_\nu^{(i_\nu)})$$

Sei diese kanonische Matrix $(r_{i\varkappa})$. Die Willkürlichkeit, die den durch die Gleichungen (26) gegebenen $r_\nu$ noch anhaftet, kann bei der Aufstellung von $(r_{i\varkappa})$ in folgender Weise zur Geltung gebracht werden. Wir können in jedem einzelnen der Elementarteiler $(r - r_\nu)^\sigma$ für $r_\nu$ eine andere Determination des Ausdruckes (26) wählen, also entsprechend den Elementarteilern

$$(\omega - \omega_\nu)^{e_\nu^{(1)}}, \ldots, (\omega - \omega_\nu)^{e_\nu^{(i_\nu)}}$$

der Matrix $(c_{i\varkappa})$, etwa

$$\left(r - r_\nu^{(1)}\right)^{e_\nu^{(1)}}, \ldots, \left(r - r_\nu^{(i_\nu)}\right)^{e_\nu^{(i_\nu)}},$$

wo sich die $r_\nu^{(1)}, \ldots, r_\nu^{(i_\nu)}$ um irgend welche additive ganze Zahlen voneinander unterscheiden können. Für das Cauchysche Differentialsystem

(G) $$\frac{dr_\varkappa}{dx} = \sum_{\lambda=1}^{n} v_\lambda \frac{r_{\lambda\varkappa}}{x-a}$$

wird dadurch, im Sinne der oben (S. 136) gemachten Bemerkung, die Substitution, die eine Integralmatrix erfährt, wenn $x$ den Punkt $a$ umkreist, in keiner Weise beeinflußt.

Für das Cauchysche System (G) bilden wir uns dann diejenige Integralmatrix $(v_{i\varkappa})$, die beim Umlaufe von $x$ um den Punkt $a$ die kanonische Substitution $(\omega_{i\varkappa})$ erfährt; diese kanonische Substitution ist dann nichts anderes als die kanonische Form der Matrix $(c_{i\varkappa})$. Wenn

$$(c_{i\varkappa}) = (\gamma_{i\varkappa})(\omega_{i\varkappa})(\gamma_{i\varkappa})^{-1}$$

ist, so erleidet die Integralmatrix

$$(\mathfrak{y}_{i\varkappa}) = (\gamma_{i\varkappa})(v_{i\varkappa})$$

des Systems (G) bei Umkreisung des Punktes $a$ die vorgegebene Substitution $(c_{i\varkappa})$.

Wir greifen jetzt wieder auf das Differentialsystem

(B) $$\frac{dy_\varkappa}{dx} = \sum_{\lambda=1}^{n} y_\lambda a_{\lambda\varkappa}$$

zurück, dessen Koeffizienten $a_{i\varkappa}$ in dem den Punkt $a$ umgebenden zweifach zusammenhängenden Bereiche $\mathfrak{A}$ holomorph, also nach Laurentschen Reihen

$$a_{i\varkappa} = \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} a_{i\varkappa}^{(\nu)} (x-a)^\nu.$$

entwickelbar sind. Wenn dann die auf dem geschlossenen Wege $s$ (vergl. sechste Vorlesung S. 92) erstreckte konstante Matrix

$$s\int_{x_0}^{\widehat{x_0}} (a_{i\varkappa}\,dx + \delta_{i\varkappa}) = (c_{i\varkappa})$$

gesetzt wird, so ist die Integralmatrix

$$(\bar{y}_{i\varkappa}) = (\mathfrak{A})\int_{x_0}^{\widehat{x}} (a_{i\varkappa}\,dx + \delta_{i\varkappa})$$

nach den Auseinandersetzungen der sechsten Vorlesung (S. 94) in der Form

$$(\bar{y}_{i\varkappa}) = (\mathfrak{y}_{i\varkappa}) \left( \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} t_{i\varkappa}^{(\nu)} (x-a)^\nu \right)$$

darstellbar; dabei bedeutet $(\mathfrak{y}_{i\varkappa})$ die im Sinne der obigen Vorschrift gebildete „Cauchysche Matrix", die bei Umkreisung von $a$ die Substitution $(c_{i\varkappa})$ erfährt. In dieser sind die $r_\alpha, r_\beta, \ldots, r_\varepsilon$ nur abgesehen von additiven ganzen Zahlen, die innerhalb eines jeden einzelnen Elementarteilers noch ganz beliebig gewählt werden können, bestimmt, und die Determinationen der im allgemeinen unendlich vieldeutigen Ausdrücke

$$(x-a)^{r_\nu}, \quad \log(x-a)$$

sind in geeigneter Weise zu fixieren. Wir nennen $(\mathfrak{y}_{i\varkappa})$ die mit $(\bar{y}_{i\varkappa})$ in bezug auf den Punkt $a$ oder den Bereich $\mathfrak{A}$ kogrediente Cauchysche Matrix und können nun auch, indem wir den Ausdrücken

$$(x-a)^{r_\nu}, \quad \log(x-a)$$

ihre ganze Vieldeutigkeit belassen, die auf einem beliebigen innerhalb $\mathfrak{A}$ verlaufenden Wege erstreckte Integralmatrix

$$(y_{i\varkappa}) = \int\limits_{x_0}^{\overset{\frown}{x}} (a_{i\varkappa}\,dx + \delta_{i\varkappa})$$

durch die Formel

$$(y_{i\varkappa}) = (\mathfrak{y}_{i\varkappa})\left(\sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} \varepsilon_{i\varkappa}^{(\nu)}(x-a)^\nu\right)$$

darstellen. Die Gleichung

$$|c_{i\varkappa} - \delta_{i\varkappa}\omega| = 0,$$

die von der Wahl der Integralmatrix $(y_{i\varkappa})$ unabhängig ist, heißt die zum Punkte $a$ gehörige Fundamentalgleichung des Differentialsystems (B), und die Integralmatrix

$$(\eta_{i\varkappa}) = (\gamma_{i\varkappa})^{-1}(y_{i\varkappa}) = (v_{i\varkappa})\left(\sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} \varepsilon_{i\varkappa}^{(\nu)}(x-a)^\nu\right),$$

die bei Umkreisung von $a$ die kanonische Substitution $(\omega_{i\varkappa})$ erfährt, heißt die zum Punkte $a$ gehörige kanonische Integralmatrix. Von dem Cauchyschen Differentialsysteme (G) sagen wir wohl auch, daß es mit (B) in der Umgebung von $a$ (oder innerhalb $\mathfrak{A}$) kogredient sei.

Damit ist die Untersuchung des Verhaltens der Lösungen eines linearen Differentialsystems in der Umgebung einer Stelle $a$, die eine isolierte Singularität der Koeffizienten ist und in deren Umgebung sich diese Koeffizienten eindeutig verhalten, erledigt. Mit Rücksicht auf später zu behandelnde Probleme heben wir unter den Ergebnissen dieser Vorlesung die beiden folgenden hervor:

1) Wenn $(c_{i\varkappa})$ eine beliebige konstante Matrix mit nicht verschwindender Determinante und $a$ einen beliebigen Punkt bedeutet, so läßt sich stets ein Cauchysches Differentialsystem mit dem singulären Punkte $a$ herstellen, das eine Integralmatrix besitzt, die bei Umkreisung von $a$ die Substitution $(c_{i\varkappa})$ erfährt.

2) Für ein beliebiges lineares Differentialsystem, dessen Koeffizienten in der Umgebung der isolierten singulären Stelle $a$ eindeutig sind, existiert ein mit ihm in der Umgebung von $x = a$ kogredientes Cauchysches Differentialsystem.

Der Verallgemeinerung dieser beiden Ergebnisse auf den Fall, wo statt eines Punktes $a$ eine beliebige endliche Anzahl solcher singulärer Punkte in Betracht kommt, wird ein wesentlicher Teil der nun folgenden Untersuchungen gewidmet werden.*)

*) In bezug auf die in dieser Vorlesung (S. 122—129) gegebene Darstellung der Theorie der Elementarteiler vergleiche man die mir während der Drucklegung bekannt gewordene Inauguraldissertation von J. Wirth: „Über die Elementarteiler einer linearen Substitution" (Freiburg i. Br. 1906).

## Neunte Vorlesung.

**Singularitäten monogener Funktionen. Punkte der Unbestimmtheit. Differentialsysteme, deren Lösungen in einem Punkte nicht unbestimmt sind. Die zu dem singulären Punkte gehörige Cauchysche Matrix. Determinierende Fundamentalgleichung und Matrix. Unterscheidung zweier Fälle. Diskussion des ersten Falles. Residuenmatrix. Rekursionsformel. Reduktion des zweiten Falles auf den ersten. Differentialgleichungen $n$-ter Ordnung. Fundamentalsystem. Wronskische Matrix und Determinante. Notwendige Form der Koeffizienten.**

Die in der vorigen Vorlesung angestellten Untersuchungen haben, sofern sie sich auf die Theorie der allgemeinen linearen Differentialsysteme beziehen, einen ausschließlich qualitativen Charakter, indem sowohl für die Bestimmung der Exponenten $r_\alpha, r_\beta, \ldots, r_\varepsilon$ als auch für die Berechnung der Reihenkoeffizienten $\varepsilon_{ix}^{(\nu)}$ keine Methode angegeben worden ist, die bei gegebenen Werten der Entwickelungskoeffizienten $\alpha_{ix}^{(\nu)}$ zum Ziele führen würde (vergl. die Formeln S. 139 der vorigen Vorlesung). Wir wenden uns jetzt einer Fragestellung zu, die zu einem speziellen Falle von großer Wichtigkeit führen wird, in dem sich das Verhalten der Lösungen eines linearen Differentialsystems in der Umgebung einer isolierten singulären Stelle auch quantitativ verfolgen läßt. Diese von Fuchs (1865) herrührende Fragestellung ist für die ganze Entwickelung unserer Theorie von ausschlaggebender Bedeutung geworden; ehe wir aber auf eine genaue Formulierung derselben eingehen, müssen wir einige Bemerkungen über die Natur der Singularitäten monogener Funktionen vorausschicken.

Für den Fall eindeutiger Funktionen oder allgemeiner, in einem Bereiche, wo sich ein Zweig einer monogenen Funktion eindeutig verhält, unterscheidet man — wie aus den Elementen der Funktionentheorie bekannt ist — zwei Hauptarten von Singularitäten: Pole und sogenannte wesentlich singuläre Stellen. In der Umgebung eines Poles ist eine monogene Funktion in der Form

$$\frac{\alpha_{-\varrho}}{(x-a)^\varrho} + \cdots + \frac{\alpha_{-1}}{x-a} + \alpha_0 + \alpha_1(x-a) + \cdots \text{ in inf.}$$

darstellbar, wo $g$ eine endliche positive ganze Zahl — die Ordnungszahl des Poles $a$ — bedeutet; man sagt dann von dieser Funktion, daß sie daselbst den Charakter einer rationalen Funktion besitzt, oder auch, daß sie in der Umgebung von $x = a$ meromorph sei. Eine singuläre Stelle einer eindeutigen Funktion, die kein Pol ist, heißt eine wesentlich singuläre Stelle. Ist dieselbe isoliert, d. h. läßt sich eine Umgebung dieser Stelle so abgrenzen, daß innerhalb dieser Umgebung keine andere Singularität der Funktion gelegen ist, so läßt die Funktion daselbst eine Entwickelung in eine Laurentsche Reihe

$$\sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} a_\nu (x-a)^\nu$$

zu. — Diese für den Fall eindeutiger Funktionen völlig ausreichenden Festsetzungen lassen sich jedoch auf den Fall mehrdeutiger Funktionen nicht übertragen. Man muß vielmehr, um zu allgemein gültigen Definitionen zu gelangen, nach dem Vorgange von Fuchs*), den Wertevorrat der Funktion in Betracht ziehen, dessen die Funktion fähig ist, wenn sich die unabhängige Variable dem betreffenden singulären Punkte annähert. Wir stellen die folgenden Definitionen auf:

Es sei $a$ ein Punkt, um den sich ein endlicher und einfach zusammenhängender Bereich $\mathfrak{A}$ so abgrenzen läßt, daß jeder Zweig der Funktion $f(x)$ in der Umgebung einer jeden von $a$ verschiedenen Stelle des Bereiches $\mathfrak{A}$ holomorph ist. Wir denken uns von $a$ aus einen Schnitt $l$ nach der Begrenzung von $\mathfrak{A}$ hin gelegt, dann ist in dem so zerschnittenen Bereiche $\bar{\mathfrak{A}}$ jeder Zweig von $f(x)$ eindeutig determiniert. Es möge dann $f(x)$ die Eigenschaft haben, daß jeder Zweig von $f(x)$ sich einem bestimmten endlichen oder unendlich großen Grenzwerte annähert, wenn die Variable $x$ auf einem beliebigen Wege, der ganz innerhalb $\mathfrak{A}$ verbleibt und den Schnitt $l$ nicht überschreitet, sich dem Punkte $a$ annähert, und zwar möge die Annäherung des betreffenden Zweiges von $f(x)$ an diesen Grenzwert gleichmäßig erfolgen, d. h. also mit andern Worten: Denkt man sich um $a$ als Zentrum zwei konzentrische Kreise $K_\varepsilon$ und $K_\eta$ mit den Radien $\varepsilon$, $\eta$ beschrieben, die ganz innerhalb $\mathfrak{A}$ verlaufen und wo $\eta < \varepsilon$ ist, so kann die Differenz zwischen den beiden Werten, die irgendein Zweig von $f(x)$ in einem beliebigen Punkte des Kreises $K_\varepsilon$ und in einem beliebigen Punkte von $K_\eta$ annimmt, dadurch beliebig klein gemacht werden, daß man den Radius $\varepsilon$ des größeren Kreises hinreichend klein wählt. — Wir sagen dann, daß die Funktion $f(x)$ in dem Punkte $a$ nicht unbestimmt

*) Sitzungsberichte 1886. Werke, Bd. II, S. 393, vergl. S. 415.

ist. — Dagegen soll ein Punkt $a$, der so beschaffen ist, daß in jeder Nähe desselben Punkte vorhanden sind, in denen die Funktion $f(x)$ nicht unbestimmt ist, der aber selbst nicht zu diesen Punkten gehört, ein Punkt der Unbestimmtheit der Funktion $f(x)$ genannt werden.

Im Sinne dieser Definition ist z. B. $x = a$ für die Funktionen

$$(x - a)^r, \quad \log(x - a),$$

wo $r$ eine beliebige komplexe Größe bedeutet, ein Punkt, wo diese Funktionen nicht unbestimmt sind. Ferner kann man zeigen, daß, wenn $f(x)$ in der Umgebung von $x = a$ in der Form einer Laurentschen Reihe darstellbar und in dem Punkte $a$ nicht unbestimmt ist, die Anzahl der Potenzen von $x - a$ mit negativen Exponenten, die in jener Laurentschen Reihe wirklich auftreten, eine endliche, d. h. $x = a$ ein Pol oder eine reguläre Stelle für diese Funktion sein muß. Allgemein ist für eine eindeutige Funktion ein Punkt, wo die Funktion nicht unbestimmt ist, notwendigerweise ein Pol oder eine reguläre Stelle. Wir werden darum im folgenden auch für die „wesentlich singulären Stellen" eindeutiger Funktionen die Bezeichnung „Punkte der Unbestimmtheit" benützen.

Nach diesen Festsetzungen können wir die Fragestellung, der wir zunächst unsere Aufmerksamkeit zuwenden wollen, in folgender Weise fassen.

Es sei, wie in der vorigen Vorlesung, $x = a$ ein Punkt, in dessen Umgebung die Koeffizienten des linearen Differentialsystems (B) in der Form Laurentscher Reihen darstellbar sind. — Wir wollen den Fall untersuchen, wo die Lösungen von (B) im Punkte $a$ nicht unbestimmt sind.

Dazu ist offenbar notwendig und hinreichend, daß die Elemente einer Integralmatrix, z. B. die der zu $x = a$ gehörigen kanonischen Integralmatrix

$$(\eta_{i\varkappa}) = (v_{i\varkappa})\left(\sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} \varepsilon_{i\varkappa}^{(\nu)}(x - a)^\nu\right)$$

im Punkte $a$ nicht unbestimmt seien, und dies erfordert wieder, nach den obigen Auseinandersetzungen, daß in den Laurentschen Reihen

$$\varphi_{i\varkappa} = \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} \varepsilon_{i\varkappa}^{(\nu)}(x - a)^\nu$$

die Anzahl der wirklich auftretenden Potenzen mit negativen Exponenten eine endliche sei. — Hieraus können wir aber sofort einen Schluß auf

das Verhalten des Koeffizienten $a_{i\varkappa}$ des Differentialsystems (B) ziehen. Da nämlich

$$(1) \qquad (a_{i\varkappa}) = D_x(\eta_{i\varkappa}) = (\eta_{i\varkappa})^{-1}\left(\frac{d\eta_{i\varkappa}}{dx}\right)$$

ist, so folgt ohne weiteres, daß auch die $a_{i\varkappa}$ im Punkte $a$ nicht unbestimmt sind; da aber andererseits diese Funktionen in der Umgebung von $a$ eindeutig sein sollten, so ergibt sich weiter, daß **der Punkt $a$ nur ein Pol der Funktionen $a_{i\varkappa}$ sein kann.**

Aus der Jacobischen Gleichung (siehe zweite Vorlesung, S. 21)

$$(2) \qquad \Delta = |\eta_{i\varkappa}| = C \cdot e^{\int^x \sum_{\varkappa=1}^{n} a_{\varkappa\varkappa}\, dx},$$

worin $C$ eine Konstante bedeutet, folgt durch Differentiation

$$(3) \qquad \Delta \cdot \sum_{\varkappa=1}^{n} a_{\varkappa\varkappa} = \frac{d\Delta}{dx}.$$

Da $a$ nur ein Pol der Funktionen $a_{i\varkappa}$ sein kann, so ist für diese homogene lineare Differentialgleichung erster Ordnung der Koeffizient

$$\sum_{\varkappa=1}^{n} a_{\varkappa\varkappa} = \mathfrak{a}(x)$$

in der Umgebung von $x = a$ in der Form

$$(4) \quad \mathfrak{a}(x) = \frac{\alpha_\lambda}{(x-a)^\lambda} + \frac{\alpha_{\lambda-1}}{(x-a)^{\lambda-1}} + \cdots + \frac{r}{x-a} + \beta_0 + \beta_1(x-a) + \cdots \text{ in inf.}$$

darstellbar; ferner ist die Lösung $\Delta$ im Punkte $a$ nicht unbestimmt. Aus (4) ergibt sich aber für $\Delta$ die Darstellung

$$\Delta = (x-a)^r e^{\frac{\alpha_\lambda}{1-\lambda}\frac{1}{(x-a)^{\lambda-1}} + \cdots + \frac{\alpha_2}{-1}\frac{1}{x-a}} \cdot \varphi(x),$$

wo $\varphi(x)$ eine in der Umgebung von $x = a$ holomorphe Funktion bedeutet, die für $x = a$ nicht verschwindet. Soll also $\Delta$ in $x = a$ nicht unbestimmt sein, so muß notwendig $\lambda \leq 1$ sein, d. h. **der Koeffizient einer linearen homogenen Differentialgleichung erster Ordnung, deren Integral in dem Punkte $a$ nicht unbestimmt ist, hat in $a$ höchstens einen Pol erster Ordnung, und umgekehrt, wenn der Koeffizient in $x = a$ höchstens einen Pol erster Ordnung hat, so ist das Integral in $a$ nicht unbestimmt.**

Es ist folglich für unser Differentialsystem (B):

$$(5)\qquad \sum_{\varkappa=1}^{n} a_{\varkappa\varkappa}(x) = \frac{r}{x-a} + \mathfrak{P}(x),$$

wo $\mathfrak{P}(x)$ eine in der Umgebung von $a$ holomorphe Funktion bedeutet, und

$$(6)\qquad |\eta_{i\varkappa}| = (x-a)^r \varphi(x),$$

wo

$$(7)\qquad r = \operatorname{Res}_a \sum_{\varkappa=1}^{n} a_{\varkappa\varkappa}(x), \quad \varphi(a) \neq 0.$$

Um nun weitere Schlüsse ziehen zu können, wollen wir uns über die Cauchysche Matrix $(v_{i\varkappa})$ noch in geeigneter Weise disponiert denken. In dem allgemeinen Falle der vorigen Vorlesung waren die Exponenten $r_\nu$ nur abgesehen von additiven ganzen Zahlen bestimmt, die innerhalb eines jeden einzelnen Elementarteilers noch nach Belieben gewählt werden konnten; in dem uns jetzt beschäftigenden Falle, wo in den Reihen $\varphi_{i\varkappa}$ nur eine endliche Anzahl mit negativen Exponenten versehener Potenzen auftritt, liegt es nahe, diese additiven ganzen Zahlen in folgender Weise zu fixieren:

Wir betrachten in der Cauchyschen Matrix $(v_{i\varkappa})$ und in der kanonischen Matrix

$$(r_{i\varkappa}) = (x-a) D_x (v_{i\varkappa})$$

die einem bestimmten Elementarteiler $(r - r_\nu)^\sigma$ entsprechenden Teilmatrizen $V_{\nu\sigma}$ beziehungsweise

$$\varrho_{\nu\sigma} = \begin{pmatrix} r_{\tau\tau} & 0 & 0 & \dots 0 & 0 \\ 1 & r_{\tau+1,\tau+1} & 0 & \dots 0 & 0 \\ 0 & 1 & r_{\tau+2,\tau+2} & \dots 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots 1 & r_{\tau+\sigma-1,\tau+\sigma-1} \end{pmatrix},$$

wo also

$$r_{\tau\tau} = r_{\tau+1,\tau+1} = r_{\tau+2,\tau+2} = \dots = r_{\tau+\sigma-1,\tau+\sigma-1} = r_\nu$$

ist. Wenn wir in $\varrho_{\nu\sigma}$ die Diagonalglieder nicht gleich $r_\nu$, sondern gleich $r_\nu + g_{\nu\sigma}$ setzen, wo $g_{\nu\sigma}$ eine ganze Zahl bedeutet, so kommt dies offenbar darauf hinaus, daß wir in der Teilmatrix $V_{\nu\sigma}$ von $(v_{i\varkappa})$ jede Kolonne mit $(x-a)^{g_{\nu\sigma}}$ multiplizieren. Dies entspricht aber der Rechtskomposition der Matrix $(v_{i\varkappa})$ mit der Matrix

$$(8)\qquad (\delta_{i\varkappa}(x-a)^{g_i})$$

$$g_1 = \dots = g_{\tau-1} = 0;\; g_\tau = \dots = g_{\tau+\sigma-1} = g_{\nu\sigma};\; g_{\tau+\sigma} = \dots = g_n = 0.$$

Durch die gedachte Änderung wird also die Matrix $(\varphi_{i\varkappa})$ mit der Matrix (8) von links her komponiert, d. h. es wird in $(\varphi_{i\varkappa})$ jedes Element der $\tau$-ten, $(\tau + 1)$-ten, ..., $(\tau + \sigma - 1)$-ten Zeile, d. h. jedes der Elemente

(9) $$\varphi_{i\varkappa} \qquad (i = \tau, \tau+1, \cdots, \tau+\sigma-1;\ \varkappa = 1, 2, \cdots, n)$$

mit $(x - a)^{g_{\tau\sigma}}$ multipliziert. Wir können also durch geeignete Wahl von $g_{\tau\sigma}$ erreichen, daß

1) durch die Multiplikation mit $(x - a)^{g_{\tau\sigma}}$ in allen Elementen (9) die etwa auftretenden Potenzen mit negativen Exponenten vernichtet werden, und daß
2) die so entstehenden holomorphen Elemente **nicht alle** für $x = a$ verschwinden.

Wir denken uns nun die $r_{ii}$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$ bereits von vornherein so eingerichtet, daß für jeden Elementarteiler die noch unbestimmten additiven ganzen Zahlen so gewählt werden, daß in den entsprechenden Zeilen von $(\varphi_{i\varkappa})$ die Elemente holomorph und nicht alle für $x = a$ gleich Null sind. Wir sagen dann von $(\mathfrak{r}_{i\varkappa})$, daß es eine **Cauchysche Matrix** sei, **zu der die Integralmatrix** $(\eta_{i\varkappa})$ **im Punkte** $x = a$ **gehört**; ferner nennen wir, im Anschlusse an **Fuchs**, die charakteristische Gleichung

(10) $$r_{i\varkappa} - \delta_{i\varkappa} r = 0 \qquad (i, \varkappa = 1, 2, \cdots, n)$$

des **Cauchyschen** Differentialsystems

(11) $$\frac{d\mathfrak{r}_\varkappa}{dx} = \sum_{i=1}^{n} \mathfrak{r}_i \frac{r_{i\varkappa}}{x - a} \qquad (\varkappa = 1, 2, \ldots, n)$$

die **determinierende Fundamentalgleichung** des Differentialsystems (B), die zum Punkte $x = a$ gehört, und $(r_{i\varkappa})$ selbst soll als die zu $x = a$ gehörige **determinierende Matrix** von (B) bezeichnet werden. Da es nur auf die Elementarteiler von $(r_{i\varkappa})$ ankommt, so kann auch irgendeine mit $(r_{i\varkappa})$ ähnliche Matrix als determinierende Matrix gelten.

Wir setzen nun für die holomorphe Matrix

(12) $$(\varphi_{i\varkappa}) = \left( \sum_{\nu=0}^{\infty} \varepsilon_{i\varkappa}^{(\nu)} (x - a)^\nu \right),$$

(13) $$(b_{i\varkappa}) = D_x(\varphi_{i\varkappa});$$

dann ist, da allgemein zu reden die Determinante $|\varphi_{i\varkappa}|$ im Punkte $x = a$ noch von endlicher ganzzahliger Ordnung verschwinden kann, der Punkt $x = a$ für das lineare Differentialsystem

(14) $$\frac{d\varphi_\varkappa}{dx} = \sum_{\lambda=1}^{n} \varphi_\lambda b_{\lambda\varkappa},$$

ein regulärer oder ein außerwesentlich singulärer Punkt (siehe sechste Vorlesung, S. 92).

Für die Cauchysche Matrix $(v_{i\varkappa})$ ergibt sich nach der Jacobischen Gleichung

$$|v_{i\varkappa}| = \text{const.}\,(x-a)^{\sum\limits_{\varkappa=1}^{n} r_{\varkappa\varkappa}},$$

wir haben also, da zufolge der besonderen Form der Matrix $(r_{i\varkappa})$

$$r_{\varkappa\varkappa} = r_\varkappa \qquad (\varkappa = 1, 2, \ldots, n)$$

ist (wenn wir mit $r_1, \ldots, r_n$ die $n$ Wurzeln der determinierenden Fundamentalgleichung (10) bezeichnen)

(15) $$|v_{i\varkappa}| = \text{const.}\,(x-a)^{\sum\limits_{\varkappa=1}^{n} r_\varkappa}.$$

Aus

(16) $$(\eta_{i\varkappa}) = (v_{i\varkappa})(\varphi_{i\varkappa})$$

ergibt sich aber

$$|\eta_{i\varkappa}| = |v_{i\varkappa}|\,|\varphi_{i\varkappa}|,$$

wir haben also zufolge der Gleichungen (6), (7), (15)

(17) $$|\varphi_{i\varkappa}| = (x-a)^R \psi(x),$$

wo

(18) $$R = \operatorname{Res}_a \sum_{\varkappa=1}^{n} a_{\varkappa\varkappa} - \sum_{\varkappa=1}^{n} r_\varkappa,$$

und $\psi(x)$ eine in der Umgebung von $x = a$ holomorphe Funktion bedeutet, die für $x = a$ nicht verschwindet.

Die Größe $R$ ist eine nicht negative ganze Zahl. Wir haben nun zwei Fälle zu unterscheiden, je nachdem

$$1)\quad R = 0,$$

$$2)\quad R > 0$$

ist.

Im ersten Falle $R = 0$ hat also die Determinante $|\varphi_{i\varkappa}|$ in $a$ einen von Null verschiedenen Wert; es sind demnach die Elemente der Matrix $(\varphi_{i\varkappa})^{-1}$ und folglich auch die Koeffizienten $(b_{i\varkappa})$ des Differentialsystems (14) in der Umgebung von $x = a$ holomorph. Nach der

Gleichung (16) und der Derivationsregel (IV) der zweiten Vorlesung haben wir aber

$$(19) \qquad (a_{i\varkappa}) = (\varphi_{i\varkappa})^{-1}\left(\frac{r_{i\varkappa}}{x-a}\right)(\varphi_{i\varkappa}) + (b_{i\varkappa});$$

die Funktionen $a_{i\varkappa}$ haben demnach im Punkte $x = a$ höchstens einen Pol erster Ordnung. — Es sei

$$(20) \qquad \begin{cases} a_{i\varkappa} = \dfrac{A_{i\varkappa}}{x-a} + \psi_{i\varkappa}(x), \\ \psi_{i\varkappa} = \displaystyle\sum_{\nu=0}^{\infty} \alpha_{i\varkappa}^{(\nu)}(x-a)^{\nu}, \end{cases}$$

ferner setzen wir in Übereinstimmung mit (12)

$$\varphi_{i\varkappa}(a) = \varepsilon_{i\varkappa}^{(0)};$$

dann ist also nach (19)

$$(21) \qquad (A_{i\varkappa}) = (\varepsilon_{i\varkappa}^{(0)})^{-1}(r_{i\varkappa})(\varepsilon_{i\varkappa}^{(0)}),$$

d. h. die Koeffizientenmatrix $(r_{i\varkappa})$ des Cauchyschen Differentialsystems (11) ist nichts anderes als die kanonische Form der zum Punkte $x = a$ gehörigen Residuenmatrix $(A_{i\varkappa})$. Damit ist also in diesem Falle für die bisher nur abstrakt definierte determinierende Matrix $(r_{i\varkappa})$ eine Definition gefunden, die die wirkliche Aufstellung dieser Matrix ermöglicht, wenn die Koeffizienten des Differentialsystems (B) bekannt sind. Wir sagen kurz: in diesem Falle ($R = 0$) ist die Residuenmatrix selbst die determinierende Matrix.

Auf diese Weise ist also durch die Residuenmatrix $(A_{i\varkappa})$ der Koeffizienten des Differentialsystems die Cauchysche Matrix $(v_{i\varkappa})$, zu der die Integralmatrix $(\eta_{i\varkappa})$ im Punkte $x = a$ gehört, vollkommen determiniert. Wir zeigen jetzt weiter, wie man aus den Entwicklungskoeffizienten der $\psi_{i\varkappa}(x)$ (Gleichungen (20)) die Entwicklungskoeffizienten der $\varphi_{i\varkappa}(x)$ herstellen kann. Zu dem Ende schreiben wir die Gleichung (19) in der Form

$$(\varphi_{i\varkappa})(a_{i\varkappa}) = \left(\frac{r_{i\varkappa}}{x-a}\right)(\varphi_{i\varkappa}) + \left(\frac{d\varphi_{i\varkappa}}{dx}\right)$$

oder, indem wir für $a_{i\varkappa}$, $\varphi_{i\varkappa}$ ihre Entwicklungen in der Umgebung von $x = a$ einsetzen und dann mit $x - a$ multiplizieren:

$$\left(\sum_{\nu=0}^{\infty} \varepsilon_{i\varkappa}^{(\nu)}(x-a)^{\nu}\right)\left(A_{i\varkappa} + \sum_{\nu=0}^{\infty} \alpha_{i\varkappa}^{(\nu)}(x-a)^{\nu+1}\right) = (r_{i\varkappa})\left(\sum_{\nu=0}^{\infty} \varepsilon_{i\varkappa}^{(\nu)}(x-a)^{\nu}\right) + \left(\sum_{\nu=1}^{\infty} \nu\varepsilon_{i\varkappa}^{(\nu)}(x-a)^{\nu}\right).$$

Wenn wir hierin nach Potenzen von $x - a$ ordnen und dann die Koeffizienten der einzelnen Potenzen von $x - a$ gleich Null setzen, so ergibt sich durch das absolute Glied

$$(\varepsilon_{i\varkappa}^{(0)})(A_{i\varkappa}) - (r_{i\varkappa})(\varepsilon_{i\varkappa}^{(0)}) = 0, \tag{22}$$

und durch den Koeffizienten von $(x - a)^{\nu+1}$

$$\begin{cases} (\varepsilon_{i\varkappa}^{(\nu+1)})(A_{i\varkappa}) + (\varepsilon_{i\varkappa}^{(0)})(\alpha_{i\varkappa}^{(\nu)}) + (\varepsilon_{i\varkappa}^{(1)})(\alpha_{i\varkappa}^{(\nu-1)}) + \cdots + (\varepsilon_{i\varkappa}^{(\nu)})(\alpha_{i\varkappa}^{(0)}) \\ \qquad - (r_{i\varkappa})(\varepsilon_{i\varkappa}^{(\nu+1)}) - (\nu + 1)(\varepsilon_{i\varkappa}^{(\nu+1)}) = 0. \end{cases} \tag{23}$$

Zufolge unserer Voraussetzung ($R = 0$) ist die Determinante der Matrix $(\varepsilon_{i\varkappa}^{(0)})$ von Null verschieden, die Gleichung (22) ist also mit (21) äquivalent. Aus (23) müssen die Elemente der Matrix $(\varepsilon_{i\varkappa}^{(\nu+1)})$ berechenbar sein, wenn $(\varepsilon_{i\varkappa}^{(0)}), (\varepsilon_{i\varkappa}^{(1)}), \ldots, (\varepsilon_{i\varkappa}^{(\nu)})$ bekannt sind; diese Berechnung stößt auf keinerlei Schwierigkeiten, wenn in dem zur Bestimmung der $\varepsilon_{i\varkappa}^{(\nu+1)}$ dienenden linearen Gleichungssysteme die Determinante der Koeffizienten der $\varepsilon_{i\varkappa}^{(\nu+1)}$ nicht verschwindet. Z. B. haben wir für $i = 1$ die Gleichungen

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11}^{(\nu+1)} A_{1\varkappa} + \cdots + \varepsilon_{1n}^{(\nu+1)} A_{n\varkappa} - r_1 \varepsilon_{1\varkappa}^{(\nu+1)} - (\nu + 1)\, \varepsilon_{1\varkappa}^{(\nu+1)} \\ = - \sum_{\lambda=1}^{n} (\varepsilon_{1\lambda}^{(0)} \alpha_{\lambda\varkappa}^{(\nu)} + \cdots + \varepsilon_{1\lambda}^{(\nu)} \alpha_{\lambda\varkappa}^{(0)}). \end{aligned}$$

Die Koeffizientendeterminante lautet

$$| A_{i\varkappa} - \delta_{i\varkappa}(r_1 + \nu + 1) |; \tag{24}$$

sie ist also sicher von Null verschieden,

a) wenn die Wurzeln $r_1, \ldots, r_n$ der Gleichung

$$| A_{i\varkappa} - \delta_{i\varkappa} r | = 0, \tag{25}$$

die in unserem Falle ($R = 0$) die determinierende Fundamentalgleichung ist, keine ganzzahligen Differenzen aufweisen,

b) wenn im Falle ganzzahliger Wurzeldifferenzen der reale Teil von $r_1$ nicht kleiner ist als die realen Teile der von $r_1$ um ganze Zahlen differierenden übrigen Wurzeln.

Wir brauchen uns hier mit der algebraischen Diskussion der Gleichungssysteme (23) nicht eingehender zu beschäftigen.*) Wir haben nämlich die Existenz der $\varepsilon_{i\varkappa}^{(\nu)}$ als endlicher Werte postuliert; da diese den Gleichungen (23) genügen müssen, so folgt aus der Form dieser Gleichungen, daß sie auch die rekursive Berechnung der $\varepsilon_{i\varkappa}^{(\nu)}$ — von den durch die Natur der Sache bedingten Willkürlichkeiten ab-

*) Eine nach allen Seiten hin vollständige Untersuchung dieser Gleichungssysteme findet sich bei J. Horn, Mathem. Annalen, Bd. 39.

gesehen — ermöglichen müssen. Wir kommen in der nächsten Vorlesung übrigens auf dieses Gleichungssystem, das wir als die zum Punkte $x = a$ gehörige Rekursionsformel bezeichnen wollen, noch einmal zurück. —

In dem Falle $R = 0$ haben wir also sowohl die Cauchysche Matrix $(v_{i\varkappa})$ als auch die holomorphe Matrix $(\varphi_{i\varkappa})$ quantitativ bestimmen können, wenn die Entwicklungen der Koeffizienten $a_{i\varkappa}$ unseres Differentialsystems bekannt sind.

Wir wenden uns jetzt zur Untersuchung des zweiten Falles: $R > 0$. —

Wir wollen zeigen, daß sich dieser Fall durch eine die analytische Natur der Koeffizienten und der Integrale des Differentialsystems nicht alterierende Transformation auf den bereits erledigten ersten Fall $R = 0$ zurückführen läßt.

* * *

Wir schicken die folgende einfache Bemerkung voraus.

Haben wir eine Matrix $(m_{i\varkappa})$ und bezeichnen wir die Kolonne, die durch den zweiten Index $\varkappa$ charakterisiert wird, mit $C_\varkappa$, so gelten offenbar die drei folgenden Regeln:

I. Durch Rechtskomposition von $(m_{i\varkappa})$ mit der Matrix

$$N_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \dots 0 \\ 1 & 0 & 0 \dots 0 \\ 0 & 0 & 1 \dots 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 \dots 1 \end{pmatrix}$$

werden die Kolonnen $C_1$ und $C_2$ miteinander vertauscht.

II. Durch Rechtskomposition von $(m_{i\varkappa})$ mit der Matrix

$$N_2 = \begin{pmatrix} 1 & g & 0 \dots 0 \\ 0 & 1 & 0 \dots 0 \\ 0 & 0 & 1 \dots 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 \dots 1 \end{pmatrix}$$

wird die Kolonne $C_2$ durch $C_2 + gC_1$ ersetzt; d. h. an die Stelle von $m_{i2}$ tritt $m_{i2} + gm_{i1}$.

III. Durch Rechtskomposition von $(m_{i\varkappa})$ mit der Matrix

$$N_3 = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

werden die Elemente der Kolonne $C_1$ mit dem Faktor $\lambda$ multipliziert.

Was hier für die Kolonnen $C_1$, $C_2$ erzielt wurde, kann offenbar auch für irgend zwei Kolonnen $C_\varkappa$, $C_\iota$ erreicht werden.

* * *

Wir betrachten nun die in der Umgebung von $x = a$ holomorphe Matrix

$$(\varphi_{i\varkappa}) = \left(\sum_{\nu=0}^{\infty} \varepsilon_{i\varkappa}^{(\nu)} (x-a)^\nu\right),$$

deren Kolonnen wir ebenfalls mit $C_1, \dots, C_n$ bezeichnen, und denken uns aus jeder Kolonne die allen Elementen dieser Kolonne gemeinsame höchste Potenz von $x - a$ herausgezogen. Für die Kolonne $C_\varkappa$ sei $(x-a)^{g_\varkappa}$ diese Potenz (der zu $C_\varkappa$ gehörige Kolonnenteiler); dann ist jedenfalls

$$g_1 + \cdots + g_n \leqq R.$$

Wenn das Gleichheitszeichen gilt, so haben wir

(26) $$(\varphi_{i\varkappa}) = (\bar{\varphi}_{i\varkappa})((x-a)^{g_i}\delta_{i\varkappa}),$$

wo $\bar{\varphi}_{i\varkappa}$ in der Umgebung von $x = a$ holomorph und die Determinante

(27) $$\lim_{x=a} |\bar{\varphi}_{i\varkappa}| \neq 0$$

ist. In diesem Falle sind wir bereits am Ziele.

Gilt jedoch das Ungleichheitszeichen, d. h. ist

$$g_1 + \cdots + g_n < R,$$

so vertauschen wir durch Rechtskomposition von $(\varphi_{i\varkappa})$ mit Matrizen von der Art $N_1$ die Reihenfolge der Kolonnen in $(\varphi_{i\varkappa})$ so lange, bis in der neuen Matrix — für die wir die in bezug auf $(\varphi_{i\varkappa})$ eingeführten Zeichen beibehalten wollen —

$$g_1 \leqq g_2 \leqq \cdots \leqq g_n$$

ist. In dieser neuen Matrix $(\varphi_{i\varkappa})$ betrachten wir jetzt die Matrix der Anfangsglieder $(\varepsilon_{i\varkappa})$, wo also

$$\varphi_{i\varkappa} = (x-a)^{g_\varkappa}(\varepsilon_{i\varkappa} + \cdots)$$

ist. In $(\varepsilon_{i\varkappa})$ können wir dann durch Rechtskomposition von $(\varphi_{i\varkappa})$ mit Matrizen der Form $N_2$ das $\lambda$-fache der $\mu$-ten Kolonne von einer späteren,

$\nu$-ten Kolonne ($\nu > \mu$) abziehen; es kommt dies nämlich darauf hinaus, daß wir die Kolonne $C_\nu$ durch

$$(28) \qquad C_\nu - \lambda(x-a)^{g_\nu - g_\mu} C_\mu, \qquad g_\nu - g_\mu \geqq 0,$$

ersetzen. Ferner können wir durch Rechtskomposition von $(\varphi_{i\varkappa})$ mit Matrizen der Form $N_3$ erreichen, daß in $(\varepsilon_{i\varkappa})$ eine beliebig gewählte Kolonne durch irgendeine Konstante dividiert wird.

Nehmen wir nun in $(\varepsilon_{i\varkappa})$ die erste Kolonne

$$\varepsilon_{11}, \varepsilon_{21}, \ldots, \varepsilon_{n1},$$

so sind diese Elemente nicht sämtlich gleich Null. Sei z. B. $\varepsilon_{11} = 0$, aber von oben gerechnet schon $\varepsilon_{21}$ das erste von Null verschiedene Element; dann dividieren wir die ganze erste Kolonne durch $\varepsilon_{21}$, wodurch die Matrix der Anfangsglieder in die Form

$$\begin{pmatrix} 0 & \varepsilon_{12} & \cdots \\ 1 & \varepsilon_{22} & \cdots \\ \cdot & \cdot & \cdots \\ \cdot & \cdot & \cdots \\ \cdot & \cdot & \cdots \end{pmatrix}$$

übergeht. Dann können wir durch Subtraktion der mit geeigneten Konstanten multiplizierten ersten Kolonne von den folgenden Kolonnen die Elemente der zweiten Zeile von der zweiten Kolonne an insgesamt zu Null machen. — Ebenso verfahren wir dann der Reihe nach mit der zweiten, dritten, ... Kolonne; d. h. wir machen zunächst das von oben aus erste nicht verschwindende Element der betreffenden Kolonne zu Eins, und dann die in derselben Zeile stehenden Elemente der folgenden Kolonnen zu Null. Wir können dieses Verfahren bis zur letzten $n$-ten Kolonne fortsetzen, wenn wir nicht auf eine Kolonne stoßen, deren sämtliche Elemente verschwinden. Tritt dieser Fall ein, so hat sich das betreffende $g_\varkappa$ mindestens um eine Einheit erhöht. Dann ordnen wir zunächst wieder die Kolonnen nach der Größe der neuen Exponenten $\bar{g}_\varkappa$ der Kolonnenteiler und schlagen dasselbe Verfahren ein wie vorhin. Die Erhöhung eines Exponenten eines Kolonnenteilers kann sich offenbar nur eine endliche Anzahl von Malen ereignen, da ja die Summe aller Kolonnenteilerexponenten nicht größer sein kann als $R$. Wir kommen also schließlich zu einer Matrix von Anfangsgliedern, in der das Verfahren bis zur letzten $n$-ten Kolonne durchgeführt werden kann. Ordnen wir dann die Kolonnen so, daß zuerst diejenigen Kolonnen stehen, deren erstes Element gleich Eins ist, dann

jene, deren zweites Element gleich Eins ist usw., so hat die Matrix der Anfangsglieder die Form

$$\begin{pmatrix} 1\ 1 \ldots 1 & 0\ 0 \ldots 0 & 0\ 0 \ldots 0 & \ldots \\ *\ * \ldots * & 1\ 1 \ldots 1 & 0\ 0 \ldots 0 & \ldots \\ *\ * \ldots * & *\ * \ldots * & 1\ 1 \ldots 1 & \ldots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix},$$

wo an den mit Sternchen bezeichneten Stellen irgendwelche Elemente stehen, deren Wert uns nicht weiter interessiert. Nun ist zunächst evident, daß in jeder der in dem Schema angedeuteten Gruppen nicht mehr als eine Kolonne vorkommen kann; denn wären mehrere Kolonnen vorhanden, für die z. B. das zweite Element von oben gleich Eins ist, so könnten durch Subtraktion der ersten Kolonne dieser Gruppe von allen folgenden in diesen folgenden Kolonnen die Elemente der zweiten Zeile zu Null gemacht werden. Ferner muß aber in jeder Gruppe mindestens eine Kolonne wirklich enthalten sein, d. h. es muß wirklich eine Kolonne geben, in der die $\varkappa - 1$ ersten Elemente gleich Null und das $\varkappa$-te gleich Eins ist, für $\varkappa = 1, 2, \ldots, n$; denn wäre dies nicht der Fall, so müßte eine Kolonne vorhanden sein, deren sämtliche Elemente gleich Null sind, das Verfahren wäre also noch nicht zu Ende geführt. Die Matrix der Anfangskoeffizienten lautet also nach dieser Umformung:

$$(28) \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \ldots 0 \\ * & 1 & 0 \ldots 0 \\ * & * & 1 \ldots 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot \\ * & * & * \ldots 1 \end{pmatrix};$$

ihre Determinante hat demnach den Wert Eins.

Fassen wir nun alle die Matrizen, mit denen während des geschilderten Verfahrens von rechts her komponiert worden ist, zu einer Matrix $(g_{i\varkappa})$ zusammen, so sind die Elemente $g_{i\varkappa}$ ganze rationale Funktionen von $x - a$, und die Determinante $|g_{i\varkappa}|$ dieser Matrix ist eine von Null verschiedene Konstante. Wir haben dann, wenn wir in der umgeformten Matrix, deren Anfangskoeffizienten die Elemente der Matrix (28) sind, die Kolonnenteiler $(x-a)^{\bar{\varrho}_1}, \ldots, (x-a)^{\bar{\varrho}_n}$ herausziehen:

$$(29) \qquad (\varphi_{i\varkappa})(g_{i\varkappa}) = (\bar{\varphi}_{i\varkappa})((x-a)^{\bar{\varrho}_i}\delta_{i\varkappa}),$$

wo

$$\lim_{x=a} |\bar{\varphi}_{i\varkappa}| = 1$$

und folglich

$$\bar{g}_1 + \cdots + \bar{g}_n = R$$

ist. — Durch das beschriebene Reduktionsverfahren, das einem von Kronecker angegebenen und dann von K. Hensel in der Theorie der algebraischen Funktionen angewandten Verfahren*) nachgebildet ist, haben wir das Folgende erreicht.

Wir setzen

$$(30) \qquad (\zeta_{i\varkappa}) = (v_{i\varkappa})(\bar{\varphi}_{i\varkappa});$$

da für die holomorphe Matrix $(\bar{\varphi}_{i\varkappa})$ die Determinante $|\bar{\varphi}_{i\varkappa}|$ im Punkte $x = a$ einen von Null verschiedenen Wert besitzt, so haben die Elemente der derivierten Matrix

$$D_x(\zeta_{i\varkappa}) = (\bar{a}_{i\varkappa})$$

in $x = a$ höchstens einen Pol erster Ordnung, und wenn

$$\bar{a}_{i\varkappa} = \frac{B_{i\varkappa}}{x - a} + \bar{\psi}_{i\varkappa}$$

gesetzt wird, wo die $\bar{\psi}_{i\varkappa}$ in der Umgebung von $x = a$ holomorphe Funktionen bedeuten, so ist für das Differentialsystem

$$(\bar{\mathrm{B}}) \qquad \frac{dz_\varkappa}{dx} = \sum_{\lambda=1}^{n} z_\lambda \bar{a}_{\lambda\varkappa}$$

alles genau so, wie für das ursprüngliche Differentialsystem im ersten Falle $R = 0$, d. h. die Residuenmatrix $(B_{i\varkappa})$ ist die determinierende Matrix, und die Koeffizienten der Entwicklungen der $\bar{\varphi}_{i\varkappa}$ in der Umgebung von $x = a$ ergeben sich aus den den Gleichungen (23) analogen Rekursionsformeln. — Der Übergang von $(\eta_{i\varkappa})$ zu $(\zeta_{i\varkappa})$ wird durch die Gleichung

$$(\eta_{i\varkappa})(g_{i\varkappa}) = (\zeta_{i\varkappa})((x-a)^{\bar{g}_i}\delta_{i\varkappa})$$

vermittelt. Da jedoch die Determinante von $(g_{i\varkappa})$ eine von Null verschiedene Konstante ist, so hat die inverse Matrix

$$(h_{i\varkappa}) = (g_{i\varkappa})^{-1}$$

dieselbe Form wie $(g_{i\varkappa})$ selbst, d. h. ihre Elemente sind gleichfalls ganze rationale Funktionen von $x - a$, und ihre Determinante ist eine nicht verschwindende Konstante. Wir nennen kursorisch eine Matrix von der Art wie $(g_{i\varkappa})$, $(h_{i\varkappa})$ eine neutrale.

*) Siehe etwa Hensel und Landsberg, Theorie der algebraischen Funktionen, 1902, S. 169 ff.



Es ist also

(31) $$(\eta_{i\varkappa}) = (\zeta_{i\varkappa})\left((x-a)^{\bar{\varrho}_i}\delta_{i\varkappa}\right)(h_{i\varkappa}),$$

d. h. das Differentialsystem (B) wird durch die Transformationsformeln

(32) $$y_\varkappa = \sum_{\lambda=1}^{n} z_\lambda (x-a)^{\bar{\varrho}_\lambda} h_{\lambda\varkappa},$$

wo die $\bar{\varrho}_\lambda$ nicht negative ganze Zahlen, die $h_{\lambda\varkappa}$ die Elemente einer neutralen Matrix bedeuten, in das System $(\bar{B})$ übergeführt. Von einem Differentialsysteme, dessen Integralmatrix in der Umgebung von $x = a$ die Form

$$(v_{i\varkappa})(\bar{\varphi}_{i\varkappa})$$

hat, wo $(v_{i\varkappa})$ eine Cauchysche Matrix, $(\bar{\varphi}_{i\varkappa})$ eine in der Umgebung von $x = a$ holomorphe Matrix bedeutet, deren Determinante im Punkte $a$ nicht verschwindet, sagen wir, es habe in der Umgebung von $x = a$ die Normalform. Es gilt also der folgende Satz:

Ein Differentialsystem (B), dessen Koeffizienten in der Umgebung von $x = a$ eindeutig und dessen Lösungen im Punkte $a$ nicht unbestimmt sind, hat entweder selbst in der Umgebung von $x = a$ die Normalform oder es kann durch eine Transformation von der Form (32) in ein Differentialsystem übergeführt werden, das in der Umgebung von $x = a$ die Normalform hat.

Die bisherige Untersuchung hat uns noch nicht zu einer Form der Koeffizienten des Differentialsystems geführt, die für den Umstand charakteristisch ist, daß die Lösungen in einem singulären Punkte nicht unbestimmt werden; nur für den Fall einer Differentialgleichung erster Ordnung haben wir eine solche Form gefunden. Allgemein wissen wir bisher nur, daß, wenn die Lösungen in einem Punkte nicht unbestimmt werden und die Koeffizienten in der Umgebung jenes singulären Punktes eindeutig sind, diese Koeffizienten in jenen Punkten den Charakter rationaler Funktionen besitzen müssen, und daß, wie wir jetzt sagen wollen, für den Rationalitätsbereich der Funktionen, die in der Umgebung von $x = a$ diesen Charakter haben (d. h. in $a$ selbst höchstens einen Pol besitzen), ein Differentialsystem derselben Art existiert, das daselbst die Normalform hat. Aber wir besitzen auch kein Kriterium, das unmittelbar aus der Form der Koeffizienten zu erkennen gestattet, ob ein vorgelegtes Differentialsystem im Punkte $a$ die Normalform besitzt. Notwendig dafür ist, daß die Koeffizienten in $x = a$ höchstens einen Pol erster Ordnung besitzen. Wir wollen

jetzt zu der Aufstellung eines Kriteriums schreiten, das sich **zunächst** als **notwendig** und **später** auch als **hinreichend** dafür erweisen wird, daß die Lösungen eines linearen Differentialsystems im Punkte $a$ nicht unbestimmt werden.

* * *

Wir schicken zu dem Ende einige Bemerkungen voraus, die sich auf den Fall eines beliebigen Rationalitätsbereiches beziehen.

Es sei

$$\text{(A)} \qquad \frac{dy_x}{dx} = \sum_{\lambda=1}^{n} y_\lambda a_{\lambda x} \qquad (x = 1, 2, \cdots, n)$$

ein Differentialsystem mit Koeffizienten des Rationalitätsbereiches und $(r_{ix})$ eine Matrix, deren Elemente ebenfalls dem Rationalitätsbereiche angehören. Wir setzen

$$\text{(I)} \qquad z_x = \sum_{\lambda=1}^{n} y_\lambda r_{\lambda x} \qquad (x = 1, 2, \cdots, n)$$

und suchen nun die $r_{ix}$ so zu bestimmen, daß

$$\text{(II)} \qquad z_2 = \frac{dz_1}{dx}, \; z_3 = \frac{dz_2}{dx}, \; \ldots, \; z_n = \frac{dz_{n-1}}{dx}$$

sei: dann können wir die $r_{11}, r_{21}, \ldots, r_{n1}$ noch als willkürliche Funktionen des Rationalitätsbereiches wählen und haben die übrigen $r_{ix}$ den Formeln

$$\text{(III)} \qquad r_{\lambda, x+1} = \frac{dr_{\lambda x}}{dx} - \sum_{\nu=1}^{n} a_{\lambda\nu} r_{\nu x} \qquad (\lambda = 1, 2, \cdots, n;\; x = 1, 2, \cdots, n-1)$$

gemäß zu bestimmen. Denken wir uns diese Bestimmung ausgeführt, so ist also, wenn wir $z_1 = z$ setzen:

$$\text{(IV)} \qquad \begin{cases} z = y_1 r_{11} + y_2 r_{21} + \cdots + y_n r_{n1}, \\ \dfrac{dz}{dx} = y_1 r_{12} + y_2 r_{22} + \cdots + y_n r_{n2}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \dfrac{d^{n-1}z}{dx^{n-1}} = y_1 r_{1n} + y_2 r_{2n} + \cdots + y_n r_{nn}. \end{cases}$$

Differentiieren wir die letzte Gleichung und ersetzen die $\frac{dy_x}{dx}$

durch ihre Ausdrücke auf den rechten Seiten des Differentialsystems (A), so erhalten wir

(IVa) $$\frac{d^n z}{dx^n} = y_1 r_{1,n+1} + \cdots + y_n r_{n,n+1}.$$

Eliminieren wir aus den $n+1$ linearen Gleichungen (IV), (IVa) die $y_1, \ldots, y_n$, so erhalten wir die Gleichung

$$\begin{vmatrix} z & r_{11} & \cdots r_{n1} \\ \frac{dz}{dx} & r_{12} & \cdots r_{n2} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{d^n z}{dx^n} & r_{1,n+1} & \cdots r_{n,n+1} \end{vmatrix} = 0,$$

die wir in der Form:

(V) $$R_n \frac{d^n z}{dx^n} + R_{n-1} \frac{d^{n-1} z}{dx^{n-1}} + \cdots + R_0 z = 0$$

schreiben können, also eine homogene lineare Differentialgleichung $n$-ter Ordnung für $z$, deren Koeffizienten $R_n$, $R_{n-1}, \ldots, R_0$ offenbar dem Rationalitätsbereiche angehören. Insbesondere ist

$$\pm R_n = |r_{i\varkappa}|; \qquad (i, \varkappa = 1, 2, \cdots, n)$$

die Differentialgleichung (V) ist also wirklich von $n$-ter Ordnung, wenn die Determinante $|r_{i\varkappa}|$ nicht identisch verschwindet. Die Differentialgleichung $n$-ter Ordnung (V) kann nach Division durch den Koeffizienten der $n$-ten Derivierten in der Form

$$\frac{d^n z}{dx^n} = z b_{1n} + \frac{dz}{dx} b_{2n} + \cdots + \frac{d^{n-1} z}{dx^{n-1}} b_{nn}$$

geschrieben werden; sie konstituiert also in Verbindung mit den $n-1$ Gleichungen (II) ein Differentialsystem

(VI) $$\frac{dz_\varkappa}{dx} = \sum_{\lambda=1}^{n} z_\lambda b_{\lambda\varkappa}$$

für die $n$ Funktionen

$$z_1 = z,\ z_2 = \frac{dz}{dx}, \cdots, z_n = \frac{d^{n-1} z}{dx^{n-1}},$$

dessen Koeffizienten, abgesehen von den Elementen der letzten Kolonne, durch die Formeln

$$b_{i\varkappa} = 0,\ b_{\varkappa+1,\varkappa} = 1 \qquad (\varkappa = 1, 2, \cdots, n-1;\ i \neq \varkappa+1)$$

gegeben werden. Die homogene lineare Differentialgleichung $n$-ter Ord-

nung ist also als spezieller Fall unter den Systemen linearer Differentialgleichungen für $n$ Unbekannte enthalten und umgekehrt kann ein solches Differentialsystem stets auf eine Differentialgleichung $n$-ter Ordnung zurückgeführt werden. Das letztere ist evident, wenn die Determinante $|r_{i\varkappa}| = \pm R_n$ nicht identisch verschwindet; denn in diesem Falle gehört das Differentialsystem (VI), das ja nur eine andere Schreibweise für die Differentialgleichung (V) ist, mit (A) zu derselben Art, d. h. es sind die $y_1, \ldots, y_n$ in der Form

$$y_\varkappa = z s_{1\varkappa} + \frac{dz}{dx} s_{2\varkappa} + \cdots + \frac{d^{n-1}z}{dx^{n-1}} s_{n\varkappa} \qquad (\varkappa = 1, 2, \cdots, n)$$

darstellbar, wo

$$(s_{i\varkappa}) = (r_{i\varkappa})^{-1}$$

ist. — Wenn für irgendeine Wahl der $r_{11}, \ldots, r_{n1}$ die aus diesen Größen mit Hilfe der Gleichungen (III) gebildeten $r_{i,\varkappa+1}$ so beschaffen sind, daß die Determinante $|r_{i\varkappa}|$ $(i, \varkappa = 1, 2, \cdots, n)$ identisch verschwindet, so ist, im Sinne der siebenten Vorlesung, das Differentialsystem (A) offenbar reduzibel. Wenn dies für jede Wahl der $r_{11}, \ldots, r_{n1}$ eintritt, so besteht zwischen den $y_1, \ldots, y_n$, die dem System (A) genügen, eine homogene lineare Relation mit Koeffizienten des Rationalitätsbereiches; das System (A) kann dann durch ein Differentialsystem mit weniger als $n$ Unbekannten und mit Koeffizienten des Rationalitätsbereiches ersetzt werden. Diesen letzteren Fall können wir also beiseite lassen. — In dem Falle eines reduzibeln Systems (A) gibt es dann notwendigerweise auch solche $r_{11}, \ldots, r_{n1}$, für die $|r_{i\varkappa}| \neq 0$ ausfällt, für die also der Ausdruck $y_1 r_{11} + \cdots + y_n r_{n1}$ einer Differentialgleichung $n$-ter Ordnung genügt; es gibt aber auch solche $r_{11}, \ldots, r_{n1}$, für die die Differentialgleichung, der $y_1 r_{11} + \cdots + y_n r_{n1}$ Genüge leistet, von niedrigerer als der $n$-ten Ordnung ist, und dieser letztere Umstand ist seinerseits für die Reduzibilität des Systems (A) charakteristisch.

Allgemein sagen wir, daß eine Differentialgleichung $n$-ter Ordnung (V) mit dem Differentialsysteme (A) zu derselben Art gehört. Wir beschäftigen uns noch kurz mit solchen Differentialgleichungen.

Bedeutet $(y_{i\varkappa})$ eine Integralmatrix von (A), so hat die entsprechende Integralmatrix

$$(y_{i\varkappa})(r_{i\varkappa})$$

des Differentialsystems (VI), oder, wie wir sagen wollen, der Differentialgleichung (V), die Form

$$\text{(VII)} \qquad \begin{pmatrix} z_1 \frac{dz_1}{dx} \cdots \frac{d^{n-1}z_1}{dx^{n-1}} \\ z_2 \frac{dz_2}{dx} \cdots \frac{d^{n-1}z_2}{dx^{n-1}} \\ \cdots\cdots\cdots \\ z_n \frac{dz_n}{dx} \cdots \frac{d^{n-1}z_n}{dx^{n-1}} \end{pmatrix},$$

wo

$$z_\varkappa = y_{\varkappa 1} r_{11} + \cdots + y_{\varkappa n} r_{n1} \qquad (\varkappa = 1, 2, \cdots, n)$$

gesetzt wurde; die $z_1, \ldots, z_n$ bilden, nach der Bezeichnung von Fuchs, ein Fundamentalsystem von Lösungen der Differentialgleichung $n$-ter Ordnung (V). Die allgemeine Lösung von (V) ist in der Form

$$c_1 z_1 + \cdots + c_n z_n$$

darstellbar, wo die $c_1, \ldots, c_n$ willkürliche Konstanten bedeuten, und die Eigenschaft der $z_1, \ldots, z_n$, daß die Determinante der Matrix (VII)

$$\text{(VIII)} \qquad \begin{vmatrix} z_1 \frac{dz_1}{dx} \cdots \frac{d^{n-1}z_1}{dx^{n-1}} \\ z_2 \frac{dz_2}{dx} \cdots \frac{d^{n-1}z_2}{dx^{n-1}} \\ \cdots\cdots\cdots \\ z_n \frac{dz_n}{dx} \cdots \frac{d^{n-1}z_n}{dx^{n-1}} \end{vmatrix}$$

nicht identisch verschwindet, ist für ein Fundamentalsystem von Lösungen charakteristisch. Wir nennen die Matrix (VII) eine Wronskische Matrix, die Determinante (VIII) die zu $z_1, \ldots, z_n$ gehörige Wronskische Determinante, das der Differentialgleichung (V) äquivalente Differentialsystem (VI) ein Wronskisches Differentialsystem.

Die Theorie der Wronskischen Differentialsysteme, d. h. der linearen Differentialgleichungen $n$-ter Ordnung ist sowohl in sachlicher als auch in historischer Beziehung von der größten Bedeutung. Historisch hat sich die ganze analytische Theorie der linearen Differentialgleichungen gerade an den Differentialgleichungen $n$-ter Ordnung entwickelt; erst nachdem Fuchs und seine Nachfolger die auf diese Differentialgleichungen bezüglichen Resultate und Methoden aufgestellt hatten, wurde namentlich durch Sauvage, Koenigsberger, Horn die Übertragung dieser Resultate auf die Systeme von $n$ linearen Differentialgleichungen erster Ordnung in Angriff genommen. Sachlich muß neben der Theorie der allgemeinen Systeme auch der Theorie

der Differentialgleichungen $n$-ter Ordnung die größte Sorgfalt gewidmet werden, da fast für alle speziellen Untersuchungen die Betrachtung der Differentialgleichung $n$-ter Ordnung besondere Vorteile gewährt, indem an Stelle der Matrizen von $n^2$ Elementen, wie sie in der allgemeinen Theorie der Systeme auftreten, bei einer Differentialgleichung $n$-ter Ordnung nur Systeme von $n$ Größen (die $n$ Koeffizienten der Differentialgleichung bezw. die Elemente eines Fundamentalsystems) zu betrachten sind. Für generelle Untersuchungen, namentlich solche qualitativer Natur, scheint dagegen die eine größere Bewegungsfreiheit sichernde Theorie der allgemeinen Differentialsysteme den Vorzug zu verdienen.

* * *

Indem wir nun als Rationalitätsbereich die Gesamtheit derjenigen Funktionen fixieren, die in $x = a$ höchstens einen Pol besitzen und in einer gewissen Umgebung von $x = a$ holomorph sind, wollen wir die Beschaffenheit der Koeffizienten einer Differentialgleichung

$$\text{(P)} \qquad \frac{d^n z}{dx^n} + p_1 \frac{d^{n-1} z}{dx^{n-1}} + \cdots + p_n z = 0$$

zu bestimmen suchen, deren Lösungen im Punkte $a$ nicht unbestimmt werden. Die Koeffizienten $p_1, \ldots, p_n$ haben natürlich in $a$ den Charakter rationaler Funktionen.

Für $n = 1$ wissen wir bereits, daß der Koeffizient von $z$ in $a$ höchstens einen Pol erster Ordnung besitzen kann. Wir wollen zeigen, daß für ein beliebiges $n$ die Koeffizienten $p_1, \ldots, p_n$ von (P) die folgende Form haben müssen:

$$\text{(Q)} \qquad p_1 = \frac{\varphi_1(x)}{x-a}, \; p_2 = \frac{\varphi_2(x)}{(x-a)^2}, \ldots, \; p_n = \frac{\varphi_n(x)}{(x-a)^n},$$

wo $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_n(x)$ in $x = a$ holomorphe Funktionen bedeuten. Zum Beweise dieses grundlegenden, von **Fuchs** herrührenden Satzes bedienen wir uns nach dem Vorgange von L. W. **Thomé** des Verfahrens der vollständigen Induktion.

Aus den für die Systeme erzielten Ergebnissen dieser Vorlesung folgt zunächst, daß, wenn die sämtlichen Lösungen von (P) in $x = a$ nicht unbestimmt sind, mindestens eine Lösung $z_1$ vorhanden sein muß, die in der Umgebung von $x = a$ in der Form

$$z_1 = (x-a)^{r_1} \varphi(x)$$

darstellbar ist, wo $r_1$ eine Wurzel der determinierenden Fundamental-

gleichung, $\varphi(x)$ eine in $x = a$ holomorphe Funktion bedeutet, die für $x = a$ nicht verschwindet. Machen wir nun in (P) die Substitution

$$z = z_1 \int u\,dx,$$

so genügt, wie die einfache Rechnung bestätigt, $u$ der linearen Differentialgleichung $(n-1)$-ter Ordnung

$$(\mathrm{P}') \qquad \frac{d^{n-1}u}{dx^{n-1}} + q_1 \frac{d^{n-2}u}{dx^{n-2}} + \cdots + q_{n-1}u = 0,$$

wo

$$(\mathrm{Q}') \quad \begin{cases} q_1 = p_1 + n\,\dfrac{d \log z_1}{dx}, \\ q_\lambda = p_\lambda + n p_{\lambda-1} \dfrac{1}{z_1}\dfrac{dz_1}{dx} + \cdots + \dfrac{n(n-1)\cdots(n-\lambda+1)}{1\cdot 2\cdots \lambda}\dfrac{1}{z_1}\dfrac{d^\lambda z_1}{dx^\lambda}. \\ (\lambda = 2, 3, \ldots, n-1) \end{cases}$$

Die Ausdrücke

$$\frac{1}{z_1}\frac{dz_1}{dx}, \quad \frac{1}{z_1}\frac{d^2 z_1}{dx^2}, \ldots, \frac{1}{z_1}\frac{d^{n-1}z_1}{dx^{n-1}}$$

sind offenbar in der Umgebung von $x = a$ eindeutig und haben in $x = a$ beziehungsweise höchstens einen Pol erster, zweiter, ..., $(n-1)$-ter Ordnung. Setzen wir also voraus, daß der zu beweisende Satz für Differentialgleichungen $(n-1)$-ter Ordnung richtig ist, und beachten, daß die allgemeine Lösung

$$u = \frac{d}{dx}\left(\frac{z}{z_1}\right)$$

von (P′) in $x = a$ nicht unbestimmt ist, wenn dies für die allgemeine Lösung $z$ von (P) der Fall ist, so haben die $q_1, \ldots, q_{n-1}$ in der Umgebung von $x = a$ die Form

$$q_1 = \frac{\psi_1(x)}{x-a}, \quad q_2 = \frac{\psi_2(x)}{(x-a)^2}, \ldots, q_{n-1} = \frac{\psi_{n-1}(x)}{(x-a)^{n-1}},$$

wo $\psi_1(x), \ldots, \psi_{n-1}(x)$ in $x = a$ holomorphe Funktionen bedeuten. Daraus folgt aber nach den Gleichungen (Q′) sofort, daß die

$$p_1, \ldots, p_{n-1}$$

die in den Formeln (Q) angegebene Darstellung zulassen, und dann folgt endlich aus der identischen Gleichung

$$\frac{-1}{z_1}\left(\frac{d^n z_1}{dx^n} + p_1 \frac{d^{n-1}z_1}{dx^{n-1}} + \cdots + p_{n-1}\frac{dz_1}{dx}\right) = p_n,$$

daß auch $p_n$ die in (Q) bezeichnete Form hat. Hierdurch ist der Fuchssche Satz bewiesen.

Wenn also das lineare Differentialsystem (A), dessen Koeffizienten in der Umgebung der isolierten singulären Stelle $a$ eindeutig sind, die Eigenschaft hat, daß seine Lösungen in $a$ nicht unbestimmt werden, so muß jede lineare Differentialgleichung $n$-ter Ordnung, die mit (A) (für den betrachteten Rationalitätsbereich) zu derselben Art gehört, d. h. durch einen Ausdruck

$$y_1 r_{11} + \cdots + y_n r_{n1}$$

befriedigt wird, wo die $r_{11}, \ldots, r_{n1}$ in $x = a$ den Charakter rationaler Funktionen besitzen, so beschaffen sein, daß ihre Koeffizienten in der Umgebung von $x = a$ die Form (Q) besitzen.

Die große Bedeutung dieser als notwendig erkannten Form (Q) für die Koeffizienten einer linearen Differentialgleichung $n$-ter Ordnung, deren Lösungen in $x = a$ nicht unbestimmt werden, besteht nun darin, daß, wie Fuchs gezeigt hat, diese Form zugleich hinreichend ist für die gedachte Eigenschaft der Lösungen. Den Beweis dieses Satzes werden wir in der folgenden Vorlesung erbringen.

# Zehnte Vorlesung.

**Differentialsysteme, die in der Umgebung eines Punktes kanonisch sind, haben Lösungen, die daselbst nicht unbestimmt werden. Der Satz von Fuchs. Rekursionsformel für die kanonischen Systeme. Untersuchung des Differentialsystems in der Umgebung des unendlich fernen Punktes. Rang. Normalreihen.**

Es sei nun eine Differentialgleichung $n$-ter Ordnung

$$\text{(P)} \qquad \frac{d^n z}{dx^n} + p_1 \frac{d^{n-1} z}{dx^{n-1}} + \cdots + p_n z = 0$$

vorgelegt, deren Koeffizienten in der Umgebung von $x = a$ die Form

$$\text{(Q)} \qquad p_1 = \frac{\varphi_1(x)}{x-a}, \; p_2 = \frac{\varphi_2(x)}{(x-a)^2}, \cdots, \; p_n = \frac{\varphi_n(x)}{(x-a)^n}$$

haben, wo $\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)$ in $x = a$ holomorph sind. Setzen wir

$$\begin{aligned} y_1 &= z, \\ y_2 &= (x-a)\frac{dz}{dx}, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_n &= (x-a)^{n-1}\frac{d^{n-1}z}{dx^{n-1}}, \end{aligned}$$

so genügen die $y_1, \ldots, y_n$ einem Differentialsysteme von der Form

$$\text{(P)} \qquad \begin{cases} \dfrac{dy_\lambda}{dx} = \dfrac{\lambda-1}{x-a} y_\lambda + \dfrac{1}{x-a} y_{\lambda+1}, & (\lambda = 1, 2, \cdots, n-1) \\ \dfrac{dy_n}{dx} = \left(\dfrac{n-1}{x-a} - \dfrac{\varphi_1}{x-a}\right) y_n - \dfrac{\varphi_2}{x-a} y_{n-1} - \cdots - \dfrac{\varphi_n}{x-a} y_1, \end{cases}$$

also einem Differentialsysteme, dessen Koeffizienten in $x = a$ höchstens einen Pol erster Ordnung besitzen. Wir sagen von einem Differentialsystem dieser Beschaffenheit, d. h. von einem System

$$\text{(A)} \qquad \frac{dy_\varkappa}{dx} = \sum_{\lambda=1}^{n} \left(\frac{A_{\lambda\varkappa}}{x-a} + \psi_{\lambda\varkappa}\right) y_\lambda, \qquad (\varkappa = 1, 2, \cdots, n)$$

wo die $A_{i\varkappa}$ Konstanten, die $\psi_{i\varkappa}$ in $x = a$ holomorphe Funktionen bedeuten,

Wenn also das lineare Differentialsystem (A), dessen Koeffizienten in der Umgebung der isolierten singulären Stelle $a$ eindeutig sind, die Eigenschaft hat, daß seine Lösungen in $a$ nicht unbestimmt werden, so muß jede lineare Differentialgleichung $n$-ter Ordnung, die mit (A) (für den betrachteten Rationalitätsbereich) zu derselben Art gehört, d. h. durch einen Ausdruck

$$y_1 r_{11} + \cdots + y_n r_{n1}$$

befriedigt wird, wo die $r_{11}, \ldots, r_{n1}$ in $x = a$ den Charakter rationaler Funktionen besitzen, so beschaffen sein, daß ihre Koeffizienten in der Umgebung von $x = a$ die Form (Q) besitzen.

Die große Bedeutung dieser als notwendig erkannten Form (Q) für die Koeffizienten einer linearen Differentialgleichung $n$-ter Ordnung, deren Lösungen in $x = a$ nicht unbestimmt werden, besteht nun darin, daß, wie Fuchs gezeigt hat, diese Form zugleich hinreichend ist für die gedachte Eigenschaft der Lösungen. Den Beweis dieses Satzes werden wir in der folgenden Vorlesung erbringen.

# Zehnte Vorlesung.

**Differentialsysteme, die in der Umgebung eines Punktes kanonisch sind, haben Lösungen, die daselbst nicht unbestimmt werden. Der Satz von Fuchs. Rekursionsformel für die kanonischen Systeme. Untersuchung des Differentialsystems in der Umgebung des unendlich fernen Punktes. Rang. Normalreihen.**

Es sei nun eine Differentialgleichung $n$-ter Ordnung

$$\text{(P)} \qquad \frac{d^n z}{dx^n} + p_1 \frac{d^{n-1} z}{dx^{n-1}} + \cdots + p_n z = 0$$

vorgelegt, deren Koeffizienten in der Umgebung von $x = a$ die Form

$$\text{(Q)} \qquad p_1 = \frac{\varphi_1(x)}{x-a}, \; p_2 = \frac{\varphi_2(x)}{(x-a)^2}, \cdots, \; p_n = \frac{\varphi_n(x)}{(x-a)^n}$$

haben, wo $\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)$ in $x = a$ holomorph sind. Setzen wir

$$\begin{aligned} y_1 &= z, \\ y_2 &= (x-a)\frac{dz}{dx}, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_n &= (x-a)^{n-1}\frac{d^{n-1}z}{dx^{n-1}}, \end{aligned}$$

so genügen die $y_1, \ldots, y_n$ einem Differentialsysteme von der Form

$$\text{(P)} \qquad \begin{cases} \dfrac{dy_\lambda}{dx} = \dfrac{\lambda-1}{x-a} y_\lambda + \dfrac{1}{x-a} y_{\lambda+1}, & (\lambda = 1, 2, \cdots, n-1) \\ \dfrac{dy_n}{dx} = \left(\dfrac{n-1}{x-a} - \dfrac{\varphi_1}{x-a}\right) y_n - \dfrac{\varphi_2}{x-a} y_{n-1} - \cdots - \dfrac{\varphi_n}{x-a} y_1, \end{cases}$$

also einem Differentialsysteme, dessen Koeffizienten in $x = a$ höchstens einen Pol erster Ordnung besitzen. Wir sagen von einem Differentialsystem dieser Beschaffenheit, d. h. von einem System

$$\text{(A)} \qquad \frac{dy_\varkappa}{dx} = \sum_{\lambda=1}^{n} \left(\frac{A_{\lambda\varkappa}}{x-a} + \psi_{\lambda\varkappa}\right) y_\lambda, \qquad (\varkappa = 1, 2, \cdots, n)$$

wo die $A_{i\varkappa}$ Konstanten, die $\psi_{i\varkappa}$ in $x = a$ holomorphe Funktionen bedeuten,

es habe in $x = a$ die kanonische Form, oder auch es sei in $x = a$ kanonisch. Es soll gezeigt werden, daß die Lösungen eines solchen in $x = a$ kanonischen Systems im Punkte $x = a$ nicht unbestimmt werden; damit wird auch der am Schlusse der vorigen Vorlesung angekündigte Fuchssche Satz bewiesen sein.

Im Sinne der in der vorigen Vorlesung gegebenen Definition einer singulären Stelle, in der eine Funktion nicht unbestimmt wird, haben wir folgendes zu zeigen: Beschreibt man um den Punkt $a$ als Zentrum zwei Kreise $K_\varepsilon$, $K_\eta$ mit den hinreichend kleinen Radien $\varepsilon$, $\eta$, wo $\eta < \varepsilon$, so kann die Differenz zwischen den Werten, die ein $y_\varkappa$ in einem beliebigen Punkte von $K_\varepsilon$ und einem beliebigen Punkte von $K_\eta$ annimmt, dadurch beliebig klein gemacht werden, daß man den Radius $\varepsilon$ des größeren Kreises hinreichend klein wählt.

Indem wir auf das Differentialsystem (A) eine Transformation von der Form

$$y_\varkappa = \sum_{\lambda=1}^{n} z_\lambda (x-a)^{g_\lambda} h_{\lambda\varkappa} \qquad (\varkappa = 1, 2, \cdots, n)$$

anwenden, wo die $g_1, \ldots, g_n$ ganze Zahlen, $h_{i\varkappa}$ die Elemente einer neutralen Matrix (vergl. S. 154) bedeuten, kann (A) in ein Differentialsystem umgestaltet werden, das in $x = a$ ebenfalls kanonisch ist, und für das die zu der Residuenmatrix gehörige charakteristische Gleichung Wurzeln besitzt, die sich von den Wurzeln der charakteristischen Gleichung der Residuenmatrix von (A) um vorgeschriebene ganze Zahlen unterscheiden. Wir können demnach, ohne dadurch die Allgemeinheit zu beschränken, voraussetzen, daß die Gleichung

$$(1) \qquad | A_{i\varkappa} - \delta_{i\varkappa} r | = 0 \qquad (i, \varkappa = 1, 2, \cdots, n)$$

$n$ voneinander verschiedene Wurzeln $r_1, \ldots, r_n$ besitzt.*) — Ferner können wir durch eine Transformation von der Form

$$z_\varkappa = (x-a)^g y_\varkappa, \qquad (\varkappa = 1, 2, \cdots, n)$$

wo $g$ eine hinreichend große positive ganze Zahl bedeutet, stets erreichen, daß die Wurzeln der Gleichung (1) positive reale Teile erhalten.

Dies vorausgesetzt, sei $(\gamma_{i\varkappa})$ eine Matrix, die die Residuenmatrix $(A_{i\varkappa})$ in ihre kanonische Form transformiert, deren Elemente also die Gleichungen

*) Diese die Rechnung etwas vereinfachende Voraussetzung ist übrigens auch insofern unwesentlich, als der im folgenden zu gebende Beweis leicht so modifiziert werden kann, daß er auch für den allgemeinsten Fall durchgreift.

$$\sum_{\lambda=1}^{n} \gamma_{\iota\lambda}(A_{\lambda\varkappa} - \delta_{\lambda\varkappa} r_\iota) = 0 \qquad (\iota, \varkappa = 1, 2, \cdots, n)$$

befriedigen. Wenden wir dann auf das System (A) die Transformation

$$z_\varkappa = \sum_{\lambda=1}^{n} y_\lambda \gamma_{\lambda\varkappa} \qquad (\varkappa = 1, 2, \cdots, n)$$

an und setzen

$$(\gamma_{\iota\varkappa})(\psi_{\iota\varkappa})(\gamma_{\iota\varkappa})^{-1} = (\Phi_{\iota\varkappa}),$$

so genügen die $z_1, \ldots, z_n$ dem Differentialsysteme

$$(\mathrm{A}') \qquad \frac{dz_\varkappa}{dx} = \frac{r_\varkappa}{x-a} z_\varkappa + \sum_{\lambda=1}^{n} z_\lambda \Phi_{\lambda\varkappa}, \qquad (\varkappa = 1, 2, \cdots, n)$$

wo die $\Phi_{\lambda\varkappa}$ in der Umgebung von $x = a$ holomorphe Funktionen bedeuten.

Wir untersuchen zuvörderst die Lösungen von (A′) längs eines im Punkte $x = a$ endenden Strahles. Setzen wir

$$x - a = te^{\theta\sqrt{-1}},$$

wo $t$ real positiv ist und $\theta$ einen konstanten Winkel bedeutet, so verwandelt sich (A′) in

$$(\mathrm{A}'') \qquad \frac{dz_\varkappa}{dt} = \frac{r_\varkappa}{t} z_\varkappa + \sum_{\lambda=1}^{n} z_\lambda e^{\theta\sqrt{-1}} \Phi_{\lambda\varkappa}(te^{\theta\sqrt{-1}}).$$

In diesem linearen Differentialsysteme ist die unabhängige Variable $t$ real und die Koeffizienten sind komplexe Funktionen dieser realen Variabeln; wir können demnach die in der ersten Vorlesung entwickelten Formeln mutatis mutandis auf das System (A″) anwenden.

Es sei $\mathfrak{A}$ die Umgebung von $a$, innerhalb deren die $\Phi_{\iota\varkappa}$ holomorph sind, und seien

$$(2) \qquad x_0 = a + t_0 e^{\theta\sqrt{-1}}, \quad x_1 = a + \varepsilon e^{\theta\sqrt{-1}}$$

zwei innerhalb $\mathfrak{A}$ befindliche Punkte unseres Strahles, $\varepsilon < t_0$; dann wollen wir dasjenige Integralsystem $z_1, \ldots, z_n$ von (A″) im Punkte $x_1$ bestimmen, dessen Anfangswerte im Punkte $x_0$ durch $z_1^{(0)}, \ldots, z_n^{(0)}$ gegeben sind. Im Sinne der ersten Vorlesung haben wir zu dem Ende den folgenden Algorithmus zu bilden:

$$(3) \qquad z_\varkappa^{(\nu)} = z_\varkappa^{(\nu-1)} + (t_\nu - t_{\nu-1}) \frac{r_\varkappa}{\tau_{\nu-1}} z_\varkappa^{(\nu-1)}$$
$$+ (t_\nu - t_{\nu-1}) \sum_{\lambda=1}^{n} z_\lambda^{(\nu-1)} e^{\theta\sqrt{-1}} \Phi_{\lambda\varkappa}(\tau_{\nu-1} e^{\theta\sqrt{-1}}), \qquad (\nu = 1, 2, \cdots, m)$$

wo

$$t_0 > t_1 > \cdots > t_m = \varepsilon, \quad t_{\nu-1} \geqq \tau_{\nu-1} > t_\nu.$$

Bezeichnen wir mit $g$ die obere Grenze der absoluten Beträge der Funktionen $\Phi_{i\varkappa}$ innerhalb $\mathfrak{A}$, so folgt:

$$|s_\varkappa^{(\nu)}| < |s_\varkappa^{(\nu-1)}| \left| 1 + (t_\nu - t_{\nu-1}) \frac{r_\varkappa}{\tau_{\nu-1}} \right| + |t_\nu - t_{\nu-1}| g \sum_{\lambda=1}^{n} |s_\lambda^{(\nu-1)}|,$$

und indem wir in bezug auf $\varkappa$ von 1 bis $n$ summieren:

$$(4) \quad \sum_{\varkappa=1}^{n} |s_\varkappa^{(\nu)}| < \sum_{\varkappa=1}^{n} |s_\varkappa^{(\nu-1)}| \left\{ \left|1 + (t_\nu - t_{\nu-1}) \frac{r_\varkappa}{\tau_{\nu-1}}\right| + (t_{\nu-1} - t_\nu) n g \right\}.$$

Es sei

$$r_\varkappa = \varrho_\varkappa + \sigma_\varkappa \sqrt{-1},$$

wo also unserer Voraussetzung gemäß $\varrho_\varkappa > 0$ ist; dann haben wir

$$\left| 1 + (t_\nu - t_{\nu-1}) \frac{r_\varkappa}{\tau_{\nu-1}} \right| = \left\{ 1 - \frac{t_{\nu-1} - t_\nu}{\tau_{\nu-1}} 2\varrho_\varkappa + \left(\frac{t_{\nu-1} - t_\nu}{\tau_{\nu-1}}\right)^2 (\varrho_\varkappa^2 + \sigma_\varkappa^2) \right\}^{\frac{1}{2}},$$

also, wenn $\bar{\varrho}$ eine positive Größe bedeutet, die nicht größer ist als die $\varrho_1, \ldots, \varrho_n$, und $r$ eine positive Größe, die nicht kleiner ist als die

$$|r_1|, \ldots, |r_n|,$$

$$\left| 1 + (t_\nu - t_{\nu-1}) \frac{r_\varkappa}{\tau_{\nu-1}} \right| < \left\{ 1 - \frac{t_{\nu-1} - t_\nu}{\tau_{\nu-1}} 2\bar{\varrho} + \left(\frac{t_{\nu-1} - t_\nu}{\tau_{\nu-1}}\right)^2 r^2 \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Wir setzen für einen Augenblick

$$1 - \frac{t_{\nu-1} - t_\nu}{\tau_{\nu-1}} 2\bar{\varrho} + \left(\frac{t_{\nu-1} - t_\nu}{\tau_{\nu-1}}\right)^2 r^2 = \alpha,$$

$$(t_{\nu-1} - t_\nu) n g = \beta;$$

dann ist

$$\left| 1 + (t_\nu - t_{\nu-1}) \frac{r_\varkappa}{\tau_{\nu-1}} \right| + (t_{\nu-1} - t_\nu) n g < \alpha^{\frac{1}{2}} + \beta,$$

also

$$\left| 1 + (t_\nu - t_{\nu-1}) \frac{r_\varkappa}{\tau_{\nu-1}} \right| + (t_{\nu-1} - t_\nu) n g < (\alpha + 2\alpha^{\frac{1}{2}}\beta + \beta^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Da aber

$$\alpha < \left(1 + \frac{t_{\nu-1} - t_\nu}{\tau_{\nu-1}} r\right)^2$$

ist, so folgt

$$\left| 1 + (t_\nu - t_{\nu-1}) \frac{r_\varkappa}{\tau_{\nu-1}} \right| + (t_{\nu-1} - t_\nu) n g < \left\{ \alpha + \beta^2 + 2\beta\left(1 + \frac{t_{\nu-1} - t_\nu}{\tau_{\nu-1}} r\right) \right\}^{\frac{1}{2}},$$

d. h.

$$\left|1 + (t_\nu - t_{\nu-1})\frac{r_\varkappa}{\tau_{\nu-1}}\right| + (t_{\nu-1} - t_\nu)ng < \left\{1 - 2\,\frac{t_{\nu-1} - t_\nu}{\tau_{\nu-1}}(\bar\varrho - ng\tau_{\nu-1}) + \left(\frac{t_{\nu-1} - t_\nu}{\tau_{\nu-1}}\right)^2 (r + ng\tau_{\nu-1})^2\right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Wir denken uns nun den Punkt $x_0$ so gewählt, daß

$$\varrho = \bar\varrho - ngt_0 > 0$$

sei; dann ist, da $\tau_{\nu-1} < t_0$ ist,

$$\left|1 + (t_\nu - t_{\nu-1})\frac{r_\varkappa}{\tau_{\nu-1}}\right| + (t_{\nu-1} - t_\nu)ng < \left\{1 - 2\,\frac{t_{\nu-1} - t_\nu}{\tau_{\nu-1}}\varrho + \left(\frac{t_{\nu-1} - t_\nu}{\tau_{\nu-1}}\right)^2 (r + ngt_0)^2\right\}^{\frac{1}{2}},$$

wenn also

$$(r + ngt_0)^2 - \varrho^2 = \sigma^2$$

gesetzt wird (der Ausdruck $(r + ngt_0)^2 - \varrho^2$ ist offenbar positiv), so folgt endlich:

$$\left|1 + (t_\nu - t_{\nu-1})\frac{r_\varkappa}{\tau_{\nu-1}}\right| + (t_{\nu-1} - t_\nu)ng < \left|1 - \frac{t_{\nu-1} - t_\nu}{\tau_{\nu-1}}(\varrho + \sigma\sqrt{-1})\right|.$$

Hiernach ergibt die Ungleichung (4)

$$\sum_{\varkappa=1}^{n} |s_\varkappa^{(\nu)}| < \sum_{\varkappa=1}^{n} |s_\varkappa^{(\nu-1)}| \left|1 - \frac{t_{\nu-1} - t_\nu}{\tau_{\nu-1}}(\varrho + \sigma\sqrt{-1})\right|, \quad (\nu = 1, 2, \cdots, m)$$

also, indem wir diese Ungleichungen miteinander multiplizieren:

$$\sum_{\varkappa=1}^{n} |s_\varkappa^{(m)}| < \sum_{\varkappa=1}^{n} |s_\varkappa^{(0)}| \prod_{\nu=1}^{m} \left|1 - \frac{t_{\nu-1} - t_\nu}{\tau_{\nu-1}}(\varrho + \sigma\sqrt{-1})\right|,$$

und indem wir in bezug auf $m$ zur Grenze übergehen:

$$(5) \qquad \sum_{\varkappa=1}^{n} |s_\varkappa(x_1)| < \sum_{\varkappa=1}^{n} |s_\varkappa^{(0)}| \lim_{m} \prod_{\nu=1}^{m} \left|1 - \frac{t_{\nu-1} - t_\nu}{\tau_{\nu-1}}(\varrho + \sigma\sqrt{-1})\right|.$$

Der rechter Hand auftretende Grenzwert kann nun in äußerst einfacher Weise bestimmt werden. Betrachten wir nämlich die Differentialgleichung

$$(6) \qquad \frac{d\mathfrak{y}}{dt} = \frac{\varrho + \sigma\sqrt{-1}}{t}\,\mathfrak{y},$$

so wird dasjenige Integral $\mathfrak{y}$ derselben, das sich in $t = t_0$ auf $\mathfrak{y}^{(0)} = 1$ reduziert, im Punkte $t = \varepsilon$ durch den Algorithmus

$$\mathfrak{y}^{(\nu)} = \mathfrak{y}^{(\nu-1)} + (t_\nu - t_{\nu-1})\frac{\varrho + \sigma\sqrt{-1}}{\tau_{\nu-1}}\mathfrak{y}^{(\nu-1)} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, m)$$

determiniert, so daß

$$\mathfrak{y}(\varepsilon) = \lim_m \mathfrak{y}^{(m)} = \lim_m \prod_{\nu=1}^{m}\left(1 + \frac{t_\nu - t_{\nu-1}}{\tau_{\nu-1}}(\varrho + \sigma\sqrt{-1})\right),$$

also

$$(7) \qquad \left|\left(\frac{\varepsilon}{t_0}\right)^{\varrho+\sigma\sqrt{-1}}\right| = \lim_m \prod_{\nu=1}^{m}\left|1 + \frac{t_\nu - t_{\nu-1}}{\tau_{\nu-1}}(\varrho + \sigma\sqrt{-1})\right|$$

ist. Wir finden also nach (5)

$$(8) \qquad \sum_{\varkappa=1}^{n} |s_\varkappa(x_1)| < \sum_{\varkappa=1}^{n} |s_\varkappa^{(0)}| \left|\frac{\varepsilon}{t_0}\right|^{\varrho}.$$

Wenn sich nun $x$ längs unseres im Punkte $x = a$ endenden Strahles dem Punkte $a$ annähert, so folgt aus (8), daß die $s_\varkappa$ gleichmäßig (d. h. mit einer von dem Argumente $\theta$ unabhängigen Rapidität) der Grenze Null zustreben. Das letztere Resultat kann man auch direkt, d. h. ohne die Integration der Differentialgleichung (6) zu Hilfe zu nehmen, erhalten, wenn man nämlich zur Bestimmung des im zweiten Gliede der Ungleichung (5) auftretenden Grenzwertes die Teilungspunkte $t_1, \ldots, t_{m-1}$ und die Zwischenwerte $\tau_0, \ldots, \tau_{m-1}$ in spezieller Weise wählt.

Nehmen wir etwa gleich $\varepsilon = 0$ und teilen das von $t_0$ bis 0 reichende Intervall in $m$ gleiche Teile, so daß also

$$t_{\nu-1} - t_\nu = \frac{t_0}{m},$$

verlegen wir ferner die Zwischenwerte $\tau_{\nu-1}$ in die Anfangspunkte $t_{\nu-1}$ der Intervalle, so ist

$$\tau_{\nu-1} = t_{\nu-1} = \frac{m - \nu + 1}{m}t_0,$$

$$\frac{t_\nu - t_{\nu-1}}{\tau_{\nu-1}} = \frac{-1}{m - \nu + 1},$$

und folglich

$$\lim_m \prod_{\nu=1}^{m}\left(1 + \frac{t_\nu - t_{\nu-1}}{\tau_{\nu-1}}(\varrho + \sigma\sqrt{-1})\right) = \lim_m \prod_{\nu=1}^{m}\left(1 - \frac{\varrho + \sigma\sqrt{-1}}{m - \nu + 1}\right),$$

$$= \prod_{\nu=1}^{\infty}\left(1 - \frac{\varrho + \sigma\sqrt{-1}}{\nu}\right);$$

das zuletzt geschriebene unendliche Produkt divergiert aber bekanntlich für ein positives $\varrho$ gegen Null.

Es sei nunmehr $x_2 = \eta e^{\theta\sqrt{-1}} + a$, wo $\eta < \varepsilon$. Dann ist nach (8)

$$\sum_{\varkappa=1}^{n} | z_\varkappa(x_2) | < \sum_{\varkappa=1}^{n} | z_\varkappa^{(0)} | \left(\frac{\eta}{t_0}\right)^\varrho,$$

$$\sum_{\varkappa=1}^{n} | z_\varkappa(x_1) | < \sum_{\varkappa=1}^{n} | z_\varkappa^{(0)} | \left(\frac{\varepsilon}{t_0}\right)^\varrho,$$

und folglich

$$\sum_{\varkappa=1}^{n} | z_\varkappa(x_2) - z_\varkappa(x_1) | < 2 \sum_{\varkappa=1}^{n} | z_\varkappa^{(0)} | \left(\frac{\varepsilon}{t_0}\right)^\varrho.$$

Für zwei auf demselben Strahle gelegene Punkte $x_1$, $x_2$ kann demnach die Differenz $z_\varkappa(x_2) - z_\varkappa(x_1)$ dem absoluten Betrage nach beliebig klein gemacht werden, indem man $\varepsilon = | x_1 - a |$ hinreichend klein wählt, und zwar unabhängig von der Richtung des Strahles und von dem Werte von $\eta = | x_2 - a | < | x_1 - a$. Wir haben jetzt nur noch zu zeigen, daß das gleiche bestehen bleibt, wenn an die Stelle von $x_1$ ein Punkt $x_3 = a + \varepsilon e^{\theta'\sqrt{-1}}$ tritt, der nicht mit $x_2$ auf demselben Strahle liegt, wo also $\theta' \neq \theta$ ist.

Es ist

$$(9) \qquad | z_\varkappa(x_2) - z_\varkappa(x_3) | < | z_\varkappa(x_2) - z_\varkappa(x_1) | + | z_\varkappa(x_3) - z_\varkappa(x_1) | ;$$

um die zweite Differenz rechter Hand abzuschätzen, setzen wir

$$x = \varepsilon e^{\varphi\sqrt{-1}} + a,$$

wo jetzt $\varepsilon$ konstant und $\varphi$ veränderlich ist. Das Differentialsystem (A') wird:

$$(\mathrm{A}''') \qquad \frac{dz_\varkappa}{d\varphi} = \sum_{\lambda=1}^{n} z_\lambda (r_\lambda \delta_{\lambda\varkappa} + \sqrt{-1}\, \varepsilon e^{\varphi\sqrt{-1}} \Phi_{\lambda\varkappa}),$$

die Koeffizienten dieses Differentialsystems sind eindeutige, endliche und stetige Funktionen der realen Variabeln $\varphi$. Um die Werte der Elemente des Integralsystems $z_1, \ldots, z_n$, das an der Stelle $\varphi = \theta$ die Anfangswerte $z_1(x_1), \ldots, z_n(x_1)$ annimmt, an der Stelle $\varphi = \theta'$ zu bestimmen, haben wir wieder den in der ersten Vorlesung entwickelten Algorithmus anzuwenden. Da die absoluten Beträge der Koeffizienten $r_i \delta_{i\varkappa} + \sqrt{-1}\, \varepsilon e^{\varphi\sqrt{-1}} \Phi_{i\varkappa}$ eine nur von $\varepsilon$ abhängige obere Grenze $\gamma$ be-

sitzen, ist die Ungleichung (IIb) der ersten Vorlesung (S. 7) hier anwendbar; wir haben demnach:

$$|z_\varkappa(x_3) - z_\varkappa(x_1)| < \gamma e^{n\gamma|\theta'-\theta|} |\theta' - \theta| \sum_{\varkappa=1}^{n} |z_\varkappa(x_1)|.$$

Da nur solche im Punkte $x = a$ endende Wege in Betracht kommen, die einen von $a$ aus nach der Begrenzung der Umgebung $\mathfrak{A}$ hin gelegten Schnitt nicht überschreiten, ist

$$|\theta' - \theta| < 2\pi;$$

es folgt somit:

$$|z_\varkappa(x_3) - z_\varkappa(x_1)| < \gamma e^{2n\gamma\pi} 2\pi \sum_{\varkappa=1}^{n} |z_\varkappa(x_1)|.$$

Mit Rücksicht auf die Ungleichung (8) können wir also sagen, daß die Differenzen

$$|z_\varkappa(x_3) - z_\varkappa(x_1)|$$

durch Verkleinerung von $\varepsilon$ beliebig klein gemacht werden können, und nach (9) gilt dasselbe für die Differenzen

$$|z_\varkappa(x_2) - z_\varkappa(x_3)|,$$

wodurch unsere Behauptung vollständig bewiesen ist.

Wir haben also die folgenden Sätze:

**I. Theorem von Fuchs.** Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß die Lösungen der linearen homogenen Differentialgleichung $n$-ter Ordnung (P), deren Koeffizienten $p_1, \ldots, p_n$ in der Umgebung der isolierten singulären Stelle $x = a$ eindeutig sind, in $x = a$ nicht unbestimmt seien, besteht darin, daß die $p_1, p_2, \ldots, p_n$ in $x = a$ beziehungsweise höchstens einen Pol erster, zweiter, ..., $n$-ter Ordnung besitzen.

**II. Theorem von Sauvage.*)** Wenn die Koeffizienten eines homogenen linearen Differentialsystems in dem Punkte $x = a$ höchstens einen Pol erster Ordnung besitzen, so ist dieser Punkt für die Lösungen kein Punkt der Unbestimmtheit.

Während die kanonische Form eines Differentialsystems sich als hinreichend erwiesen hat dafür, daß die Lösungen in $x = a$ nicht unbestimmt werden, ist diese Form jedoch nicht notwendig. Man kann nämlich leicht Beispiele bilden, wo die Koeffizienten eines Differentialsystems in $x = a$ Pole von höherer als der ersten Ordnung be-

*) Annales de l'École Normale (3), III (1886); vergl. Poincaré, Acta Mathem. IV (1884), S. 215.

sitzen, und wo der Punkt $x = a$ doch kein Punkt der Unbestimmtheit für die Lösungen ist. Wir erhalten ein solches Beispiel, wenn wir die Differentialgleichung $n$-ter Ordnung (P), deren Koeffizienten die Form (Q) besitzen, in der Form eines Differentialsystems für die $n$ Funktionen

$$z, \frac{dz}{dx}, \ldots, \frac{d^{n-1}z}{dx^{n-1}}$$

schreiben. Dagegen können wir, nach den Ergebnissen der vorigen Vorlesung, jedes Differentialsystem, dessen Lösungen in $x = a$ nicht unbestimmt sind, durch eine Transformation von der Form (32) der vorigen Vorlesung (S. 155) in ein Differentialsystem überführen, das in der Umgebung von $x = a$ die Normalform hat, also kanonisch ist. — Es muß aber besonders hervorgehoben werden, daß nicht jedes in $x = a$ kanonische System auch in diesem Punkte die Normalform haben muß. Die Richtigkeit dieser Bemerkung wird sich aus den Auseinandersetzungen ergeben, die wir jetzt noch an den besonders wichtigen Fall der im Punkte $x = a$ kanonischen Systeme (A) anknüpfen wollen.

* * *

Es seien die Funktionen $\psi_{i\varkappa}$ in der Umgebung von $x = a$ in der Form

(10) $$\psi_{i\varkappa} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \alpha_{i\varkappa}^{(\nu)} (x-a)^{\nu}$$

entwickelt. Wir bezeichnen, wie in der vorigen Vorlesung, mit $(v_{i\varkappa})$ diejenige Cauchysche Matrix, zu der die kanonische Integralmatrix $(\eta_{i\varkappa})$ von (A) im Punkte $x = a$ gehört (S. 146), so daß also

(11) $$(\eta_{i\varkappa}) = (v_{i\varkappa})\,(\varphi_{i\varkappa}),$$

wo $(\varphi_{i\varkappa})$ eine in der Umgebung von $x = a$ holomorphe Matrix bedeutet, in der die Elemente, die den einem Elementarteiler der determinierenden Matrix

(12) $$(r_{i\varkappa}) = (x-a)\,D_x(v_{i\varkappa})$$

entsprechenden Zeilen angehören, nicht sämtlich für $x = a$ verschwinden.

Es sei in der Umgebung von $x = a$

(13) $$\varphi_{i\varkappa} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \varepsilon_{i\varkappa}^{(\nu)} (x-a)^{\nu};$$

dann erhalten wir durch Einsetzen in das Differentialsystem (A), wie in der vorigen Vorlesung (S. 149), die Rekursionsformel

$$(14)\begin{cases}(\varepsilon_{ix}^{(0)})(A_{ix})-(r_{ix})(\varepsilon_{ix}^{(0)})=0,\\ (\varepsilon_{ix}^{(\mu+1)})(A_{ix}-\delta_{ix}(\mu+1))-(r_{ix})(\varepsilon_{ix}^{(\mu+1)})=-(\varepsilon_{ix}^{(0)})(\alpha_{ix}^{(\mu)})-\cdots-(\varepsilon_{ix}^{(\mu)})(\alpha_{ix}^{(0)}).\\ \qquad (\mu=0,1,2,\cdots)\end{cases}$$

Wir können aber jetzt nicht von vornherein voraussetzen, daß die Determinante der Anfangsglieder $|\varepsilon_{ix}^{(0)}|$ einen von Null verschiedenen Wert besitzt, und dürfen daher aus der ersten der Gleichungen (14) nicht ohne weiteres schließen, daß die Residuenmatrix $(A_{ix})$ mit der determinierenden Matrix $(r_{ix})$ ähnlich ist. Die Diskussion des Gleichungssystems (14) gestaltet sich vielmehr auf folgende Weise.

Es sei $(r-r_\nu)^\sigma$ ein Elementarteiler von $(r_{ix})$ und

$$(15)\quad\begin{cases}\varrho_{\nu\sigma}=\begin{pmatrix} r_{\tau\tau} & 0 & \cdots 0 & 0\\ 1 & r_{\tau+1,\tau+1} & \cdots 0 & 0\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ 0 & 0 & \cdots 1 & r_{\tau+\sigma-1,\tau+\sigma-1}\end{pmatrix},\\ r_{\tau\tau}=r_{\tau+1,\tau+1}=\cdots=r_{\tau+\sigma-1,\tau+\sigma-1}=r_\nu,\end{cases}$$

die entsprechende Teilmatrix von $(r_{ix})$. Wir betrachten dann die den Zeilen $\tau, \tau+1, \cdots, \tau+\sigma-1$ entsprechenden Gleichungen der Rekursionsformel (14).

Zunächst haben wir für die $\varepsilon_{ix}^{(0)}$ die Gleichungen

$$(16)\quad\begin{cases}\sum_{\lambda=1}^{n}\varepsilon_{\tau\lambda}^{(0)}(A_{\lambda x}-\delta_{\lambda x}r_\nu)=0,\\ \sum_{\lambda=1}^{n}\varepsilon_{\tau+1,\lambda}^{(0)}(A_{\lambda x}-\delta_{\lambda x}r_\nu)-\varepsilon_{\tau x}^{(0)}=0,\\ \sum_{\lambda=1}^{n}\varepsilon_{\tau+2,\lambda}^{(0)}(A_{\lambda x}-\delta_{\lambda x}r_\nu)-\varepsilon_{\tau+1,x}^{(0)}=0,\\ \cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\end{cases}$$

Da $(r_{ix})$ als diejenige Cauchysche Matrix bestimmt war, zu der $(\eta_{ix})$ im Punkte $a$ gehört, sind (S. 146) die Größen

$$(17)\qquad \varepsilon_{ix}^{(0)}\qquad (i=\tau,\tau+1,\cdots,\tau+\sigma-1;\ x=1,2,\cdots,n)$$

nicht sämtlich gleich Null. Es folgt also aus den Gleichungen (16), daß die Determinante $|A_{ix}-\delta_{ix}r_\nu|$ verschwindet, d. h. daß $r_\nu$ jedenfalls eine Wurzel der Residuengleichung

$$(18)\qquad |A_{ix}-\delta_{ix}\varrho|=0$$

ist. — Setzen wir

$$(19)\qquad \begin{cases} (A_{i\varkappa} - \delta_{i\varkappa} r_\nu) = (B_{i\varkappa}), \\ (A_{i\varkappa} - \delta_{i\varkappa} r_\nu)^2 = (B_{i\varkappa}^{(2)}), \\ (A_{i\varkappa} - \delta_{i\varkappa} r_\nu)^3 = (B_{i\varkappa}^{(3)}), \\ \cdots\cdots\cdots \end{cases}$$

so ist nach (16)

$$(20)\qquad \begin{cases} \sum_{\lambda=1}^{n} \varepsilon_{\tau\lambda}^{(0)} B_{\lambda\varkappa} = 0, \\ \sum_{\lambda=1}^{n} \varepsilon_{\tau+1,\lambda}^{(0)} B_{\lambda\varkappa}^{(2)} = 0, \\ \sum_{\lambda=1}^{n} \varepsilon_{\tau+2,\lambda}^{(0)} B_{\lambda\varkappa}^{(3)} = 0, \\ \cdots\cdots\cdots \end{cases}$$

Nun genügt offenbar jedes Lösungssystem der Gleichungen

$$(21)\qquad \sum_{\lambda=1}^{n} \xi_\lambda B_{\lambda\varkappa} = 0 \qquad (\varkappa = 1, 2, \cdots, n)$$

auch den Gleichungen

$$(22)\qquad \sum_{\lambda=1}^{n} \xi_\lambda B_{\lambda\varkappa}^{(2)} = 0 \qquad (\varkappa = 1, 2, \cdots, n)$$

usw., während das Umgekehrte natürlich nicht der Fall sein muß; es kann nämlich der Rang der Matrix $(B_{i\varkappa}^{(2)})$ kleiner sein als der Rang von $(B_{i\varkappa})$ usw.*). —

Wir machen zunächst die Annahme, daß $r_\nu$ eine einfache Wurzel der Residuengleichung (18) sei; (wie wir zu Beginn dieser Vorlesung bemerkt haben, kann man durch eine Transformation des Differentialsystems (A) stets erreichen, daß die Residuengleichung lauter einfache Wurzeln besitzt). Dann ist also das System $(B_{i\varkappa})$ vom Range $n - 1$,

*) Die Rangzahlen der sukzessiven Potenzen

$$(A_{i\varkappa} - \delta_{i\varkappa} r_\nu),\ (A_{i\varkappa} - \delta_{i\varkappa} r_\nu)^2,\ (A_{i\varkappa} - \delta_{i\varkappa} r_\nu)^3, \cdots$$

nehmen nicht zu und bestimmen die zu der Wurzel $r_\nu$ der Gleichung

$$| A_{i\varkappa} - \delta_{i\varkappa} \varrho | = 0$$

gehörigen Elementarteiler der Matrix $(A_{i\varkappa} - \delta_{i\varkappa} r)$; vergl. Weyr, Monatshefte der Math. und Physik I; Schlesinger, Crelles Journal, Bd. 114, S. 143.

und ebenso sind alle Potenzen $(B_{i\varkappa}^{(2)})$, $(B_{i\varkappa}^{(3)})$, $\cdots$ vom Range $n-1$; die Gleichungssysteme (21), (22), $\cdots$ haben also ein und dasselbe, von einem allen $\xi_\lambda$ gemeinsamen Faktor abgesehen, vollkommen bestimmte Lösungssystem. Zufolge der Gleichungen (20) können sich also die $\varepsilon_{\tau\lambda}^{(0)}$, $\varepsilon_{\tau+1,\lambda}^{(0)}$, $\varepsilon_{\tau+2,\lambda}^{(0)}$, $\cdots$ nur durch einen von $\lambda$ unabhängigen Faktor voneinander unterscheiden, d. h. es ist

$$\gamma_0 \varepsilon_{\tau\lambda}^{(0)} = \gamma_1 \varepsilon_{\tau+1,\lambda}^{(0)} = \gamma_2 \varepsilon_{\tau+2,\lambda}^{(0)} = \cdots = \gamma_{\sigma-1} \varepsilon_{\tau+\sigma-1,\lambda}^{(0)}.$$
$$(\lambda = 1, 2, \cdots, n).$$

Dies ist aber mit den Gleichungen (16)*) und mit der Tatsache, daß nicht alle Größen (17) gleichzeitig verschwinden, nur so vereinbar, daß alle

$$\varepsilon_{i\varkappa}^{(0)} \qquad (i = \tau, \cdots, \tau+\sigma-2;\ \varkappa = 1, 2, \cdots, n)$$

verschwinden und nur unter den

$$\varepsilon_{\tau+\sigma-1,\varkappa}^{(0)} \qquad (\varkappa = 1, 2, \cdots, n)$$

mindestens eines von Null verschieden ist. Dann lauten**) die den Zeilen $\tau, \tau+1, \cdots, \tau+\sigma-2$ entsprechenden Gleichungen der Rekursionsformel (14) für $\mu = 1$:

$$(23) \qquad \begin{cases} \sum\limits_{\lambda=1}^{n} \varepsilon_{\tau\lambda}^{(1)} (A_{\lambda\varkappa} - \delta_{\lambda\varkappa}(r_\nu + 1)) = 0, \\ \sum\limits_{\lambda=1}^{n} \varepsilon_{\tau+1,\lambda}^{(1)} (A_{\lambda\varkappa} - \delta_{\lambda\varkappa}(r_\nu + 1)) - \varepsilon_{\tau\lambda}^{(1)} = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases}$$

Es muß also, wenn nicht alle Größen

$$(24) \qquad \varepsilon_{i\varkappa}^{(1)} \qquad (i = \tau, \tau+1, \cdots, \tau+\sigma-1;\ \varkappa = 1, 2, \cdots, n)$$

verschwinden, auch $r_\nu + 1$ eine Wurzel der Residuengleichung (18) sein. Sind die Größen (24) sämtlich gleich Null, so folgt, wenn wir die Rekursionsformel für $\mu = 2$ heranziehen, daß $r_\nu + 2$ eine Wurzel der Gleichung (18) sein muß, wenn unter den

$$\varepsilon_{i\varkappa}^{(2)} \qquad (i = \tau, \tau+1, \cdots, \tau+\sigma-2;\ \varkappa = 1, 2, \cdots, n)$$

mindestens eines von Null verschieden ist, usw. — Wenn also $\sigma > 1$

*) Während nämlich die Gleichungen (20) eine Folge der Gleichungen (16) sind, ist das Umgekehrte nicht der Fall.

**) Natürlich vorausgesetzt, daß $\sigma > 1$, also $(r - r_\nu)^\sigma$ kein einfacher Elementarteiler ist.

ist, so muß die Residuengleichung (18) außer der einfachen Wurzel $r_\nu$ noch $\sigma - 1$ Wurzeln von der Form

$$r_\nu + g_1, \cdots, r_\nu + g_{\sigma-1}$$

haben, wo die $g_1, \cdots, g_{\sigma-1}$ ganze Zahlen bedeuten. — Wir ziehen hieraus zunächst den folgenden Schluß:

Wenn die Wurzeln der Residuengleichung (18) alle voneinander verschieden sind und sich auch unter diesen Wurzeln keine solchen befinden, deren Differenz eine ganze Zahl ist, so hat die determinierende Matrix $(r_{i\varkappa})$ lauter einfache und voneinander verschiedene Elementarteiler

$$(r - r_1), (r - r_2), \cdots, (r - r_n),$$

und die $r_1, r_2, \cdots, r_n$ sind Wurzeln der Residuengleichung (18). In diesem Falle ist also die Residuenmatrix $(A_{i\varkappa})$ mit $(r_{i\varkappa})$ ähnlich, sie kann demnach selbst als determinierende Matrix gelten, und das System (A) hat bei $x = a$ die Normalform.

Im allgemeinen Falle, wo die Residuengleichung (18) auch mehrfache Wurzeln besitzt, bietet die erschöpfende Diskussion der Rekursionsformel (14) auch keine weiteren prinzipiellen Schwierigkeiten dar; wir gehen auf eine detaillierte Ausführung der Diskussion nicht ein*), sondern heben als Resultat nur das Folgende hervor:

1) Die Wurzeln der Residuengleichung unterscheiden sich von den Wurzeln der determinierenden Fundamentalgleichung nur um ganze Zahlen.

2) Wenn wir die Rekursionsformel (14) ansetzen, so läßt sich die Bestimmung der Matrix $(r_{i\varkappa})$ und der Koeffizientenmatrizen $(\varepsilon_{i\varkappa}^{(\nu)})$ stets auf rein algebraische Weise ausführen, und die so gebildeten Reihen

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \varepsilon_{i\varkappa}^{(\nu)} (x-a)^\nu$$

sind in derselben Umgebung von $x = a$ konvergent, wo die Konvergenz der Reihen (10) feststeht.

* * *

Wir hatten bisher noch kein praktisch brauchbares Kriterium gefunden, das für ein vorgelegtes Differentialsystem, dessen Koeffizienten im Punkte $x = a$ den Charakter rationaler Funktionen besitzen, zu ent-

*) Man vergl. die bereits S. 149 angeführte Abhandlung von Horn, ferner Sauvage, Annales de la Faculté de Toulouse VIII, IX (1895).

scheiden gestattet, ob für die Lösungen $x = a$ ein Punkt der Unbestimmtheit ist oder nicht. Natürlich bedarf es eines solchen Kriteriums nur in dem Falle, wo mindestens einer der Koeffizienten in $x = a$ einen Pol von höherer als der ersten Ordnung besitzt. — Das einfachste Verfahren zur Entscheidung dieser Frage ist wohl das folgende*). Wir bilden uns eine lineare homogene Funktion der Unbekannten $y_1, \cdots, y_n$ des vorgelegten Differentialsystems:

$$z = u_{11} y_1 + u_{21} y_2 + \cdots + u_{n1} y_n,$$

deren Koeffizienten $u_{11}, \cdots, u_{n1}$ in $x = a$ den Charakter rationaler Funktionen besitzen und die so beschaffen ist, daß $z$ einer linearen Differentialgleichung von nicht niedrigerer als der $n$-ten Ordnung genügt. Unter Umständen kann man z. B. die $u_{11}, \cdots, u_{n1}$ auch als Konstanten wählen. Wenn dann

$$\frac{dz}{dx} = u_{12} y_1 + u_{22} y_2 + \cdots + u_{n2} y_n,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{d^{n-1} z}{dx^{n-1}} = u_{1n} y_1 + u_{2n} y_2 + \cdots + u_{nn} y_n$$

ist, so hat die Determinante

$$|u_{i\varkappa}|, \qquad (i, \varkappa = 1, 2, \cdots, n)$$

die nichts anderes ist als der Koeffizient der $n$-ten Derivierten in der linearen Differentialgleichung, der $z$ genügt, einen von Null verschiedenen Wert. Wir können folglich die $y_1, \cdots, y_n$ auch linear und homogen durch

$$z, \frac{dz}{dx}, \cdots, \frac{d^{n-1} z}{dx^{n-1}}$$

darstellen. Damit die Lösungen des vorgelegten Differentialsystems in $x = a$ nicht unbestimmt werden, ist also notwendig und hinreichend, daß das allgemeine Integral der Differentialgleichung $n$-ter Ordnung, der $z$ genügt, die gleiche Eigenschaft besitzt; ob das zutrifft, wird aber zufolge des Fuchsschen Satzes durch die Form der Koeffizienten in der Umgebung von $x = a$ unmittelbar erkannt.

* * *

Wir wollen jetzt voraussetzen, daß die Koeffizienten $a_{i\varkappa}$ unseres Differentialsystems

*) Vergl. Sauvage a. a. O.

(A) $$\frac{dy_\varkappa}{dx} = \sum_{\lambda=1}^{n} y_\lambda a_{\lambda\varkappa} \qquad (\varkappa = 1, 2, \cdots, n)$$

in der Umgebung des unendlich fernen Punktes $x = \infty$ eindeutig sind und für $x = \infty$ den Charakter rationaler Funktionen besitzen; es sei

(25) $$a_{i\varkappa} = \sum_{\nu=-\infty}^{\tau} \alpha_{i\varkappa}^{(-\nu)} x^\nu,$$

wo $\tau$ eine ganze Zahl bedeutet. Machen wir in (A) die Substitution

(26) $$x = \frac{1}{\xi},$$

so erhalten wir das System

(A′) $$\frac{dy_\varkappa}{d\xi} = -\sum_{\lambda=1}^{n} y_\lambda \sum_{\nu=-\tau}^{\infty} a_{\lambda\varkappa}^{(\nu)} \xi^{\nu-2}.$$

Für dieses System ist der Punkt $\xi = 0$ ein regulärer Punkt, wenn

$$\tau \leqq -2$$

ist, wir sagen in diesem Falle, der unendlich ferne Punkt sei für das System (A) ein regulärer Punkt; wenn

$$\tau = -1$$

ist, so hat das System (A′) in $\xi = 0$ die kanonische Form, wir sagen dann von dem Systeme (A), daß es in $x = \infty$ kanonisch sei. — In analoger Weise mögen auch alle für den im Endlichen gelegenen singulären Punkt $\xi = 0$ des Systems (A′) eingeführten Begriffe und Bezeichnungen auf den unendlich fernen Punkt des Systems (A) übertragen werden.

Wenn das System (A) für $x = \infty$ kanonisch ist, d. h. wenn die $a_{i\varkappa}$ in der Umgebung von $x = \infty$ in der Form

(27) $$a_{i\varkappa} = \frac{a_{i\varkappa}^{(1)}}{x} + \frac{a_{i\varkappa}^{(2)}}{x^2} + \cdots \text{ in inf.}$$

in konvergente nach fallenden Potenzen von $x$ fortschreitende Reihen entwickelbar sind, so sind die Lösungen von (A) im Punkte $x = \infty$ nicht unbestimmt. Wenn wir jetzt den Fall vor Augen halten, wo die Residuengleichung

(28) $$|-a_{i\varkappa}^{(1)} - \delta_{i\varkappa} r| = 0^{*})$$

*) Im Sinne unserer obigen Festsetzungen und in Übereinstimmung mit dem in der Funktionentheorie üblichen Sprachgebrauche ist

$$-a_{i\varkappa}^{(1)} = \operatorname{Res}_x a_{i\varkappa}.$$

$n$ voneinander verschiedene Wurzeln $r_1, \ldots, r_n$ besitzt, die keine ganzzahligen Differenzen aufweisen, so folgt aus unserer allgemeinen Theorie die Existenz der $n$ Integralsysteme

$$(29)\qquad \left\{\begin{aligned} &\eta_{i\varkappa} = x^{-r_\varkappa}\varphi_{i\varkappa}, \\ &\varphi_{i\varkappa} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \varepsilon_{i\varkappa}^{(\nu)}\left(\frac{1}{x}\right)^\nu \end{aligned}\right\}, \qquad (i,\varkappa = 1, 2, \cdots, n)$$

wo die Reihenentwickelungen $\varphi_{i\varkappa}$ in derselben Umgebung von $x = \infty$ konvergent sind, in der die Reihen (27) konvergieren.

Der nächst einfachste Fall wäre der, wo in der Umgebung von $x = \infty$

$$(30)\qquad a_{i\varkappa} = a_{i\varkappa}^{(0)} + \frac{a_{i\varkappa}^{(1)}}{x} + \frac{a_{i\varkappa}^{(2)}}{x^2} + \cdots \text{ in inf.}$$

ist. Wir setzen in das Differentialsystem (A) die Ausdrücke

$$(31)\qquad y_\varkappa = e^\omega \cdot \eta_\varkappa^{(0)}$$

ein und erhalten nach Division mit $e^\omega$ für die $\eta_1^{(0)}, \ldots, \eta_n^{(0)}$ die Gleichungen

$$(32)\qquad \frac{d\eta_\varkappa^{(0)}}{dx} = \sum_{\lambda=1}^{n} \eta_\lambda^{(0)}\left\{a_{\lambda\varkappa}^{(0)} - \delta_{\lambda\varkappa}\frac{d\omega}{dx} + \frac{a_{\lambda\varkappa}^{(1)}}{x} + \frac{a_{\lambda\varkappa}^{(2)}}{x^2} + \cdots\right\}. \qquad (\varkappa = 1, 2, \cdots, n)$$

Bestimmen wir dann $\omega$ so, daß diese Funktion der Differentialgleichung erster Ordnung und $n$-ten Grades

$$(33)\qquad \left|a_{i\varkappa}^{(0)} - \delta_{i\varkappa}\frac{d\omega}{dx}\right| = 0 \qquad (i,\varkappa = 1, 2, \cdots, n)$$

genügt, so ist, wenn wir mit $\alpha_i$ eine Wurzel der Gleichung

$$(34)\qquad |a_{i\varkappa}^{(0)} - \delta_{i\varkappa}\alpha| = 0$$

bezeichnen,

$$(35)\qquad \omega_i = \alpha_i x$$

eine Lösung von (33). Wir setzen dann

$$(36)\qquad y_{i\varkappa} = e^{\alpha_i x}\eta_{i\varkappa}^{(0)}, \qquad (\varkappa = 1, 2, \cdots, n)$$

so daß die $\eta_{i1}^{(0)}, \ldots, \eta_{in}^{(0)}$ dem Differentialsysteme

$$(37)\qquad \frac{d\eta_{i\varkappa}^{(0)}}{dx} = \sum_{\lambda=1}^{n} \eta_{i\lambda}^{(0)}\left\{a_{\lambda\varkappa}^{(0)} - \delta_{\lambda\varkappa}\alpha_i + \frac{a_{\lambda\varkappa}^{(1)}}{x} + \frac{a_{\lambda\varkappa}^{(2)}}{x^2} + \cdots\right\}$$

Genüge leisten. Setzen wir hierin für $\eta_{i\varkappa}^{(0)}$ die Ausdrücke

$$\eta_{i\varkappa}^{(0)} = x^{\varrho_i} \sum_{\nu=0}^{\infty} \varepsilon_{i\varkappa}^{(\nu)} \left(\frac{1}{x}\right)^{\nu} \tag{38}$$

ein, so zeigt die Rechnung, auf deren Ausführung wir in der folgenden Vorlesung ausführlich zurückkommen, daß sich die Größen

$$\varrho_i, \ \varepsilon_{i\varkappa}^{(0)}, \ \varepsilon_{i\varkappa}^{(1)}, \ldots \qquad (\varkappa = 1, 2, \cdots, n)$$

stets so bestimmen lassen, daß die Ausdrücke (38) dem System (37) formell genügen. Die so gebildeten Reihen

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \varepsilon_{i\varkappa}^{(\nu)} \left(\frac{1}{x}\right)^{\nu} \tag{39}$$

sind aber nicht notwendig konvergent. — Wenn sie sich als in einer gewissen Umgebung von $x = \infty$ konvergent erweisen, so haben wir in (38) ein Lösungssystem von (37), das in $x = \infty$ keinen Punkt der Unbestimmtheit besitzt und dementsprechend in den Größen (36) ein Lösungssystem des Differentialsystems (A), das in $x = \infty$ einen Punkt der Unbestimmtheit besitzt, wenn $\alpha_i \neq 0$ ist. Ist insbesondere noch $\alpha_i = 0$, so ist das Differentialsystem (37) mit (A) identisch, und (A) besitzt — die Konvergenz der Reihen (39) stets vorausgesetzt — selbst ein Lösungssystem, das in $x = \infty$ nicht unbestimmt wird; als besonderer Fall ordnet sich hier derjenige ein, wo die sämtlichen Lösungen des Differentialsystems in $x = \infty$ nicht unbestimmt werden. — Es kann aber vorkommen, und das ist sozusagen der allgemeine Fall, daß die Reihen (39) für keinen endlichen Wert von $x$ konvergieren. — Es ist dies eine in der Theorie der Differentialgleichungen äußerst wichtige Tatsache, daß nach fallenden Potenzen von $x$ fortschreitende Reihen, die der Differentialgleichung formell genügen, nicht zu konvergieren brauchen, wenn der Punkt $x = \infty$ ein singulärer Punkt der Differentialgleichung ist. In unserer Theorie, d. h. für die linearen Differentialgleichungen können wir sagen, daß die nach fallenden Potenzen von $x$ fortschreitenden Reihen, die einem linearen Differentialsysteme formell Genüge leisten, stets konvergieren, wenn der Punkt $x = \infty$ ein regulärer Punkt oder ein singulärer Punkt von der Beschaffenheit ist, daß die Lösungen in $x = \infty$ nicht unbestimmt sind; wenn dagegen $x = \infty$ eine Unbestimmtheitsstelle der Lösungen ist, so können formell das Differentialsystem befriedigende Reihen vorhanden sein, die für keinen endlichen Wert von $x$ konvergent sind. Die Bedeutung dieser

divergenten Reihen werden wir in der nächsten Vorlesung zu untersuchen haben.

Wenn in der Umgebung von $x = \infty$

$$a_{i\varkappa} = a_{i\varkappa}^{(-1)} x + a_{i\varkappa}^{(0)} + \frac{a_{i\varkappa}^{(1)}}{x} + \frac{a_{i\varkappa}^{(2)}}{x^2} + \cdots$$

ist, so setzen wir

$$y_\varkappa = e^\omega \eta_\varkappa^{(1)}$$

in das Differentialsystem (A) ein und erhalten nach Division mit $e^\omega$

$$\frac{d\eta_\varkappa^{(1)}}{dx} = \sum_{\lambda=1}^{n} \eta_\lambda^{(1)} \left\{ x\left(a_{\lambda\varkappa}^{(-1)} - \delta_{\lambda\varkappa} \frac{d\omega}{dx} \frac{1}{x}\right) + a_{\lambda\varkappa}^{(0)} + \frac{a_{\lambda\varkappa}^{(1)}}{x} + \frac{a_{\lambda\varkappa}^{(2)}}{x^2} + \cdots \right\}.$$

Bedeutet $\beta_i$ eine Lösung der Gleichung

$$| a_{i\varkappa}^{(-1)} - \delta_{i\varkappa} \beta | = 0$$

und wählen wir $\omega$ so, daß

$$\frac{1}{x} \frac{d\omega}{dx} = \beta_i,$$

also $\omega$ gleich

$$\omega_i = \frac{\beta_i}{2} x^2,$$

so ist

$$y_{i\varkappa} = e^{\frac{\beta_i}{2} x^2} \eta_{i\varkappa}^{(1)}, \qquad (\varkappa = 1, 2, \cdots, n)$$

und die $\eta_{i\varkappa}^{(1)}$ genügen dem Differentialsysteme

$$\frac{d\eta_{i\varkappa}^{(1)}}{dx} = \sum_{\lambda=1}^{n} \eta_{i\lambda}^{(1)} \left\{ (a_{\lambda\varkappa}^{(-1)} - \delta_{\lambda\varkappa}\beta_i) x + a_{\lambda\varkappa}^{(0)} + \frac{a_{\lambda\varkappa}^{(1)}}{x} + \cdots \right\}.$$

Dieses Differentialsystem wird formell befriedigt durch Ausdrücke von der Form

$$\eta_{i\varkappa}^{(1)} = e^{\alpha_i x} x^{\varrho_i} \sum_{\nu=0}^{\infty} \varepsilon_{i\varkappa}^{(\nu)} \left(\frac{1}{x}\right)^\nu, \qquad (\varkappa = 1, 2, \cdots, n)$$

die aber allgemein gesprochen keine analytische Bedeutung haben, da die auftretenden Reihen nicht zu konvergieren brauchen.

So weiter schließend finden wir, wenn die $a_{i\varkappa}$ in der Umgebung von $x = \infty$ in der Form

(40) $$a_{i\varkappa} = a_{i\varkappa}^{(-p)} x^p + \cdots + a_{i\varkappa}^{(0)} + \frac{a_{i\varkappa}^{(1)}}{x} + \cdots$$

entwickelbar sind, Ausdrücke

(41) $$y_{i\varkappa} = e^{\alpha_i^{(p+1)} \frac{x^{p+1}}{p+1} + \cdots + \alpha_i^{(1)} x} x^{\varrho_i} \sum_{\nu=0}^{\infty} \varepsilon_{i\varkappa}^{(\nu)} \left(\frac{1}{x}\right)^\nu, \quad (\varkappa = 1, 2, \cdots, n)$$

die dem Differentialsystem formell Genüge leisten, und wo der Koeffizient $\alpha_i^{(p+1)}$ der höchsten $x$-Potenz im Exponenten von $e$ eine Wurzel der Gleichung

(42) $$|a_{i\varkappa}^{(-p)} - \delta_{i\varkappa}\alpha| = 0$$

ist. Wenn in den Entwickelungen der Koeffizienten $a_{i\varkappa}$ des Differentialsystems (A) die höchste wirklich auftretende Potenz von $x$ die $p$-te ist, so sagen wir nach Poincaré*), daß das System (A) in $x = \infty$ vom Range $p+1$ sei; die formell genügenden Ausdrücke (41) nennen wir im Anschlusse an L. W. Thomé, dem man die Entdeckung derselben für den Fall einer linearen Differentialgleichung $n$-ter Ordnung verdankt**), Normalreihen vom Range $p+1$, und in dem speziellen Falle, wo die in diesen Ausdrücken auftretenden Reihen

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \varepsilon_{i\varkappa}^{(\nu)} \left(\frac{1}{x}\right)^\nu$$

in einer gewissen Umgebung von $x = \infty$ konvergieren, Normalintegrale vom Range $p+1$. Wenn die Gleichung (42) $n$ voneinander verschiedene Wurzeln

$$\alpha_1^{(p+1)}, \ldots, \alpha_n^{(p+1)}$$

besitzt, so haben wir $n$ Systeme von Normalreihen vom Range $p+1$; in dem Falle, wo diese Gleichung mehrfache Wurzeln besitzt, treten an die Stelle gewisser der Ausdrücke (41) Ausdrücke von etwas anderer Form***). Es können nämlich im Exponenten an Stelle der ganzen Potenzen gebrochene Potenzen von $x$, oder an Stelle der nach fallenden Potenzen von $x$ fortschreitenden Reihen ganze rationale Funktionen von $\log x$ auftreten, deren Koeffizienten solche nach fallenden Potenzen

*) Acta Mathematica VIII, S. 328.

**) Crelles Journal Bd. 83 ff.

***) Fabry, Thèses (Paris, 1885).

von $x$ fortschreitende Reihen sind. Man spricht dann von anormalen Reihen, beziehungsweise von logarithmischen Normalreihen.*)

Wir werden uns im folgenden auf den Fall beschränken, wo das Differentialsystem vom Range Eins ist, und wo die Gleichung (34) $n$ voneinander verschiedene Wurzeln besitzt. Selbstverständlich können analoge Untersuchungen wie die, die wir hier für $x = \infty$ angedeutet haben, auch für einen beliebigen im Endlichen gelegenen Punkt $x = a$ angestellt werden, der für die Koeffizienten des Differentialsystems ein Pol ist.

*) In bezug auf lineare Differentialsysteme vergl. E. Cunningham, Philosoph. Transactions, Ser. A, Vol. 205 (1905).

# Elfte Vorlesung.

**Differentialsysteme vom Range Eins. Charakteristische Gleichung. Divergenz der Normalreihen. Allgemeines über asymptotische Darstellungen. Das Poincarésche Lemma. Riccatische Differentialsysteme. Aufstellung eines Integralsystems. Reduktion eines Differentialsystems bei Kenntnis eines partikularen Lösungssystems.**

Wir wollen in dieser und in der folgenden Vorlesung den Fall einer genaueren Untersuchung unterziehen, wo das Differentialsystem (A) in $x = \infty$ vom Range Eins ist. Wir haben dann für die Koeffizienten $a_{i\varkappa}$ die Entwickelungen (30) der vorigen Vorlesung, d. h.

(1) $$a_{i\varkappa} = a_{i\varkappa}^{(0)} + \frac{a_{i\varkappa}^{(1)}}{x} + \frac{a_{i\varkappa}^{(2)}}{x^2} + \cdots \text{ in inf.}$$

Die Gleichung

(2) $$| a_{i\varkappa}^{(0)} - \delta_{i\varkappa}\alpha | = 0, \qquad (i, \varkappa = 1, 2, \cdots, n)$$

die wir die charakteristische Gleichung nennen wollen, möge $n$ voneinander verschiedene Wurzeln $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ besitzen. Setzen wir dann

(3) $$y_{i\varkappa} = e^{\alpha_i x}\eta_{i\varkappa},$$

so haben wir wie in der vorigen Vorlesung für die

(4) $$\eta_{i1}, \cdots, \eta_{in}$$

das Differentialsystem

(5) $$\frac{d\eta_{i\varkappa}}{dx} = \sum_{\lambda=1}^{n} \eta_{i\lambda} \left\{ a_{\lambda\varkappa}^{(0)} - \delta_{\lambda\varkappa}\alpha_i + \frac{a_{\lambda\varkappa}^{(1)}}{x} + \frac{a_{\lambda\varkappa}^{(2)}}{x^2} + \cdots \right\}. \qquad (\varkappa = 1, 2, \cdots, n)$$

Wir setzen:

(6) $$\eta_{i\varkappa} = x^{\varrho_i} \sum_{\nu=0}^{\infty} \varepsilon_{i\varkappa}^{(\nu)} \frac{1}{x^\nu}$$

und stellen uns zunächst die Aufgabe, die Größen

$$\varrho_i,\ \varepsilon_{i\varkappa}^{(0)},\ \varepsilon_{i\varkappa}^{(1)}, \ldots$$

so zu bestimmen, daß die Ausdrücke (6) dem Differentialsysteme (5) formell genügen.

Zur Vereinfachung der Rechnung dient die folgende Transformation. Aus den Gleichungen

$$(7) \qquad \sum_{\lambda=1}^{n} \alpha_{i\lambda}(a_{\lambda x}^{(0)} - \delta_{\lambda x}\alpha_i) = 0 \qquad (i, x = 1, 2, \cdots, n)$$

denken wir uns die Größen $\alpha_{ix}$ ausgerechnet; dann ist, da die $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ als voneinander verschieden vorausgesetzt wurden, die Determinante

$$|\alpha_{ix}| \neq 0, \quad (i, x = 1, 2, \cdots, n)$$

und wir haben

$$(7a) \qquad (\alpha_{ix})(a_{ix}^{(0)}) = (\alpha_i \alpha_{ix}).$$

Machen wir nun in dem Differentialsysteme (A) die Substitution

$$(8) \qquad y_x = \sum_{\lambda=1}^{n} z_\lambda \alpha_{\lambda x},$$

setzen

$$(9) \qquad (\alpha_{ix})(a_{ix}^{(r)})(\alpha_{ix})^{-1} = (b_{ix}^{(r)}) \qquad (r = 1, 2, \cdots)$$

und beachten ferner, daß nach (7a)

$$(\alpha_{ix})(a_{ix}^{(0)})(\alpha_{ix})^{-1} = (\alpha_i \delta_{ix})$$

ist, so lautet das transformierte Differentialsystem für die Unbekannten $z_1, \ldots, z_n$:

$$(A') \qquad \frac{dz_x}{dx} = \alpha_x z_x + \sum_{\lambda=1}^{n} z_\lambda \left( \frac{b_{\lambda x}^{(1)}}{x} + \frac{b_{\lambda x}^{(2)}}{x^2} + \cdots \right).$$

Bezeichnen wir die Inverse der Matrix $(\alpha_{ix})$ mit $(\alpha'_{ix})$, so folgt aus (8):

$$z_x = \sum_{\lambda=1}^{n} y_\lambda \alpha'_{\lambda x};$$

setzen wir also:

$$(10) \qquad z_{ix} = \sum_{\lambda=1}^{n} y_{i\lambda} \alpha'_{\lambda x} = e^{\alpha_i x} \sum_{\lambda=1}^{n} \eta_{i\lambda} \alpha'_{\lambda x},$$

so befriedigen die Größen

$$(11) \qquad \zeta_{ix} = \sum_{\lambda=1}^{n} \eta_{i\lambda} \alpha'_{\lambda x}$$

die Gleichungen

$$(12) \qquad \frac{d\zeta_{ix}}{dx} = \zeta_{ix}(\alpha_x - \alpha_i) + \sum_{\lambda=1}^{n} \zeta_{i\lambda} \left( \frac{b_{\lambda x}^{(1)}}{x} + \frac{b_{\lambda x}^{(2)}}{x^2} + \cdots \right).$$

Dem Ansatze (6) entsprechend, setzen wir nunmehr

$$\zeta_{i\varkappa} = x^{\varrho_i}\left(c_{i\varkappa}^{(0)} + \frac{c_{i\varkappa}^{(1)}}{x} + \cdots\right) = \sum_{\nu=0}^{\infty} c_{i\varkappa}^{(\nu)} x^{\varrho_i - \nu}; \tag{13}$$

wenn wir diese Ausdrücke in die Gleichungen (12) einführen und mit $x^{\varrho_i}$ dividieren, so kommt

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} (\varrho_i - \nu) c_{i\varkappa}^{(\nu)} x^{-\nu-1} = (\alpha_\varkappa - \alpha_i) \sum_{\nu=0}^{\infty} c_{i\varkappa}^{(\nu)} x^{-\nu} + \sum_{\lambda=1}^{n} \sum_{\mu=1}^{\infty} \frac{b_{\lambda\varkappa}^{(\mu)}}{x^{\mu}} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{c_{i\lambda}^{(\nu)}}{x^{\nu}}.$$

Die Vergleichung der absoluten Glieder liefert dann

$$(\alpha_\varkappa - \alpha_i) c_{i\varkappa}^{(0)} = 0,$$

also

$$c_{i\varkappa}^{(0)} = 0 \quad \text{für } i \neq \varkappa.$$

Die Vergleichung der Koeffizienten von $x^{-1}$ ergibt weiter

$$\varrho_i c_{i\varkappa}^{(0)} = (\alpha_\varkappa - \alpha_i) c_{i\varkappa}^{(1)} + \sum_{\lambda=1}^{n} c_{i\lambda}^{(0)} b_{\lambda\varkappa}^{(1)}, \tag{14}$$

also für $\varkappa = i$ und mit Rücksicht darauf, daß $c_{ii}^{(0)}$ notwendig von Null verschieden sein muß,

$$\varrho_i = b_{ii}^{(1)}. \tag{15}$$

Die Vergleichung der Koeffizienten der höheren Potenzen von $x^{-1}$ liefert dann Gleichungen, die zur Bestimmung der $c_{i\varkappa}^{(\nu)}$ dienen. Die $c_{ii}^{(0)}$ können als willkürliche, von Null verschiedene Konstanten betrachtet werden, wir können z. B. $c_{ii}^{(0)} = 1$ wählen.

Für $i \neq \varkappa$ ergibt sich aus den Gleichungen (14)

$$c_{i\varkappa}^{(1)} = \frac{b_{i\varkappa}^{(1)}}{\alpha_i - \alpha_\varkappa}. \tag{16}$$

Wir finden also auf diese Weise die dem Differentialsysteme (A) formell Genüge leistenden Reihen

$$y_{i\varkappa} = e^{\alpha_i x} x^{\varrho_i} \left(\varepsilon_{i\varkappa}^{(0)} + \varepsilon_{i\varkappa}^{(1)} \frac{1}{x} + \cdots\right); \tag{17}$$

in diesen Ausdrücken sind die $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ die Wurzeln der charakteristischen Gleichung (2), die $\varrho_1, \ldots, \varrho_n$ werden durch die Gleichungen (15) gegeben, in denen

$$(b_{i\varkappa}^{(1)}) = (\alpha_{i\varkappa})(a_{i\varkappa}^{(1)})(\alpha_{i\varkappa})^{-1}$$

zu nehmen ist, während die $(\alpha_{i\varkappa})$ durch die Gleichungen (7) bestimmt sind, und endlich ist nach (8)

$$(\varepsilon_{i\varkappa}^{(0)}) = (c_{i\varkappa}^{(0)})(\alpha_{i\varkappa}),$$

also, da im Sinne unserer Festsetzung $c_{ii}^{(0)} = 1$ ist,

$$\varepsilon_{ix}^{(0)} = \alpha_{ix}.$$

Man kann, indem man Beispiele von Differentialsystemen der Form (5) betrachtet, zeigen, daß die Reihen (17) im allgemeinen für keinen endlichen Wert von $x$ konvergent sind. Wir nehmen etwa die von Picard angegebene Differentialgleichung

$$\frac{d^2u}{dx^2} + \left(\alpha_1 + \frac{\alpha_0}{x}\right)\frac{du}{dx} + \frac{\beta_0}{x^2}\,u = 0, \tag{18}$$

die, wenn wir

$$u = u_1,\ \frac{du}{dx} = u_2$$

setzen, dem Systeme

$$\frac{du_1}{dx} = \qquad\qquad u_2,$$

$$\frac{du_2}{dx} = -\frac{\beta_0}{x^2}\,u_1 - \left(\alpha_1 + \frac{\alpha_0}{x}\right)u_2$$

äquivalent ist. Setzen wir in (18) für $u$ die Reihe

$$c_0 + \frac{c_1}{x} + \frac{c_2}{x^2} + \cdots \tag{19}$$

ein, so ergibt sich die Rekursionsformel

$$c_\nu(\nu(\nu+1) - \nu\alpha_0 + \beta_0) - (\nu+1)\alpha_1 c_{\nu+1} = 0, \quad (\nu = 0, 1, \cdots)$$

aus der für den Gliederquotienten der Reihe (19) der Ausdruck

$$\frac{c_{\nu+1}}{c_\nu}\,\frac{1}{x} = \left(\frac{\nu}{\alpha_1} - \frac{\nu}{\nu+1}\,\frac{\alpha_0}{\alpha_1} + \frac{\beta_0}{\alpha_1}\,\frac{1}{\nu+1}\right)\frac{1}{x}$$

folgt; dieser Quotient wächst also für jeden endlichen Wert von $x$ mit $\nu$ ins Unendliche, so daß sich die Reihe (19) in der Tat als divergent erweist.

Wie wir schon oben bemerkt haben, kann es sich in besonderen Fällen ereignen, daß die Reihen (17) konvergieren; sie stellen dann Lösungen (sogenannte Normalintegrale) des Differentialsystems (17) dar, die in $x = \infty$ einen Punkt der Unbestimmtheit besitzen, wenn $\alpha_i \neq 0$ ist.

Wir gehen in diesen Vorlesungen auf die Untersuchung der Bedingungen, unter denen die Konvergenz der Reihen (17) eintritt, nicht ein, sondern wollen für den allgemeinen Fall ihrer Divergenz die Frage erörtern, welche Bedeutung diesen Reihen zukommt. Diese Bedeutung hat allgemein zuerst Poincaré erkannt; sie besteht darin, daß sich mit Hilfe der in Rede stehenden Reihen das Verhalten gewisser Lösungen des Differentialsystems vom Range Eins angeben läßt,

wenn die unabhängige Variable $x$ in bestimmter Weise sich der Unbestimmtheitsstelle $x = \infty$ annähert. Wir schicken zunächst einige allgemeine Bemerkungen voraus, die sich auf den Nutzen beziehen, den man in manchen Fällen aus divergenten Reihen ziehen kann, wenn es sich darum handelt, Funktionen in der Nähe einer Unbestimmtheitsstelle zu untersuchen.

* * *

Es sei $f(x)$ eine monogene Funktion der komplexen Variabeln, die in $x = \infty$ einen isolierten Punkt der Unbestimmtheit besitzt. Es möge $x$ mit einem bestimmten Argumente, d. h. so ins Unendliche rücken, daß, wenn wir

$$x = \varrho e^{\theta\sqrt{-1}}, \qquad \varrho = |x|$$

setzen, für hinreichend große Werte von $\varrho$ der reale Winkel $\theta$ einen konstanten Wert beibehält. Ohne dadurch die Allgemeinheit zu beschränken, können wir z. B. den Fall ins Auge fassen, wo $\theta = 0$ ist, d. h. wo $x$ sich längs der positiven realen Achse dem Unendlichen annähert.

Es kann sich dann ereignen, daß

$$\lim f(x) = c_0$$

ist,*) wo $c_0$ eine bestimmte endliche Größe bedeutet; es besteht also die Gleichung

$$\lim (f(x) - c_0) = 0.$$

Es kann nun weiter vorkommen, daß

$$\lim x\,(f(x) - c_0) = c_1,$$
$$\lim x^2\left(f(x) - c_0 - \frac{c_1}{x}\right) = c_2,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

allgemein

$$(\alpha) \qquad \lim x^n\left(f(x) - c_0 - \frac{c_1}{x} - \cdots - \frac{c_{n-1}}{x^{n-1}}\right) = c_n$$

ist, für jeden positiven ganzzahligen Wert von $n$. Wenn dann der Punkt $x = \infty$ wirklich ein Punkt der Unbestimmtheit für die Funktion $f(x)$ ist, so ist zwar die Reihe

$$(\beta) \qquad c_0 + \frac{c_1}{x} + \frac{c_2}{x^2} + \cdots \text{ in inf.}$$

---

*) Durch das Zeichen lim bezeichnen wir im folgenden kurz den Grenzwert für ein als positive reale Größe ins Unendliche wachsendes $x$.

im allgemeinen divergent, ihre Teilsummen

$$c_0 + \frac{c_1}{x} + \frac{c_2}{x^2} + \cdots + \frac{c_n}{x^n} = s_n$$

stellen aber trotzdem die Werte von $f(x)$ für große reale und positive Werte von $x$ mit beliebiger Genauigkeit dar, indem zufolge der Definition der Koeffizienten $c_0, c_1, c_2, \ldots$

$$f(x) = s_n + \frac{\varepsilon_n}{x^n}$$

gesetzt werden kann, wo $\varepsilon_n$ eine Funktion von $x$ bedeutet, für die

$$\lim \varepsilon_n = 0$$

ist. Man sagt von einer solchen divergenten Reihe ($\beta$), daß sie **halb-** oder **semikonvergent** sei (**Legendre**), und die Funktion $f(x)$ für große reale positive Werte von $x$ **asymptotisch** darstellt (**Poincaré**); diese Eigenschaft, die also das Bestehen der unendlich vielen Bedingungen ($\alpha$) für $n = 1, 2, \ldots$ in sich begreift, wird durch das Zeichen

$$f(x) \backsim c_0 + \frac{c_1}{x} + \frac{c_2}{x^2} + \cdots \text{ in inf.}$$

ausgedrückt. — Was nun die Eigenschaften solcher asymptotischer Darstellungen anlangt, so gelten die folgenden Bemerkungen.

Zunächst ist evident, daß, wenn $f(x)$ überhaupt einer asymptotischen Darstellung fähig ist, dies nur **auf eine Weise** möglich sein kann. Umgekehrt kann aber eine semikonvergente Reihe die asymptotische Darstellung von unendlich vielen Funktionen liefern; denn da offenbar

$$e^{-x} \backsim 0 + \frac{0}{x} + \frac{0}{x^2} + \cdots \text{ in inf.}$$

ist, so wird durch die semikonvergente Reihe ($\beta$) nicht nur $f(x)$, sondern z. B. auch jede Funktion von der Form $f(x) + \text{const.}\, e^{-x}$ asymptotisch dargestellt.

Ferner gelten nach **Poincaré** die folgenden Rechnungsregeln*).

1. Wenn für zwei Funktionen $f(x)$, $g(x)$ asymptotische Darstellungen

$$f(x) \backsim c_0 + \frac{c_1}{x} + \cdots \text{ in inf.},$$

$$g(x) \backsim d_0 + \frac{d_1}{x} + \cdots \text{ in inf.}$$

*) Vgl. etwa **Borel**, Leçons sur les séries divergentes (Paris 1900), S. 26 ff.

vorhanden sind, d. h. wenn für

$$\sum_{\nu=0}^{n} \frac{c_\nu}{x^\nu} = s_n, \qquad \sum_{\nu=0}^{n} \frac{d_\nu}{x^\nu} = t_n,$$

$$f(x) = s_n + \frac{\varepsilon_n}{x^n}, \qquad g(x) = t_n + \frac{\delta_n}{x^n}$$

$$\lim \varepsilon_n = 0, \qquad \lim \delta_n = 0$$

ist, so ist offenbar

$$f(x) + g(x) = s_n + t_n + \frac{\varepsilon_n + \delta_n}{x}$$

oder mit dem eingeführten Zeichen:

$$f(x) + g(x) \backsim c_0 + d_0 + \frac{c_1 + d_1}{x} + \frac{c_2 + d_2}{x^2} + \cdots \text{ in inf.}$$

Wir sagen kurz: **asymptotische Darstellungen dürfen addiert werden.**

2. Multiplizieren wir die beiden Reihen, die zur asymptotischen Darstellung von $f(x)$ bezw. $g(x)$ dienen, nach den gewöhnlichen für konvergente Reihen gültigen Regeln und bezeichnen die Summe der $n+1$ ersten Glieder der so entstehenden Reihe mit $\sigma_n$, so wird die Differenz

$$s_n t_n - \sigma_n$$

nur Potenzen von $x^{-1}$ enthalten, deren Exponenten größer als $n$ sind, so daß also

$$\lim x^n (s_n t_n - \sigma_n) = 0$$

ist. Wir haben folglich

$$\lim x^n (f(x)\, g(x) - \sigma_n) = 0,$$

d. h. **asymptotische Darstellungen dürfen nach der gewöhnlichen Regel multipliziert werden.**

3. Es sei ferner

$$F(z) = B_0 + B_1 z + \cdots \text{ in inf.}$$

eine für $|z| < R$ konvergente Reihe, und

$$F(f(x)) = \varphi(x).$$

Wenn dann $|c_0| < R$ ist, so konvergiert die Reihe

$$B_0 + B_1 f(x) + B_2 (f(x))^2 + \cdots$$

für hinlänglich große positive reale Werte von $x$ und stellt die Funktion $\Phi(x)$ dar. Setzen wir in dieser Reihe an Stelle von $f(x)$ die

asymptotische Darstellung der letzteren Funktion ein und ordnen nach Potenzen von $\frac{1}{x}$, so erhalten wir eine Reihe

$$(\gamma) \qquad \varphi_0 + \varphi_1 \frac{1}{x} + \varphi_2 \frac{1}{x^2} + \cdots \text{ in inf.},$$

für deren Koeffizienten offenbar die Gleichungen

$$\lim (\Phi(x) - \varphi_0) = 0$$
$$\lim x\left(\Phi(x) - \varphi_0 - \frac{\varphi_1}{x}\right) = 0$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

bestehen. Die Reihe $(\gamma)$ ist also semikonvergent und liefert die asymptotische Darstellung von $\Phi(x)$. D. h. man kann asymptotische Darstellungen in konvergente Reihen einsetzen und dann nach Potenzen von $x^{-1}$ ordnen, wenn nur das Anfangsglied der asymptotischen Darstellung dem Konvergenzbezirk der konvergenten Reihe angehört.

4. Wenn in der asymptotischen Darstellung von $f(x)$ der Anfangskoeffizient $c_0$ von Null verschieden ist, so setzen wir

$$\frac{f(x)}{c_0} - 1 = \varphi(x).$$

Dann ist, für $|\varphi(x)| < 1$,

$$\frac{1}{f(x)} = \frac{1}{c_0} \frac{1}{1+\varphi(x)} = \frac{1}{c_0}(1 - \varphi(x) + \varphi(x)^2 - \cdots);$$

wir erhalten also, da $\lim \varphi(x) = 0$ ist, zufolge des vorhergehenden Satzes die asymptotische Darstellung von $\frac{1}{f(x)}$, indem wir nach den für konvergente Reihen geltenden Regeln den reziproken Wert der asymptotischen Darstellung von $f(x)$ bilden. Man kann also, wenn in einer asymptotischen Darstellung der Anfangskoeffizient von Null verschieden ist, eine andere asymptotische (oder konvergente) Darstellung durch die erstere dividieren.

5. Wir denken uns die Funktion

$$f(x) - c_0 - \frac{c_1}{x} = \frac{c_2}{x^2} + \cdots + \frac{c_n}{x^n} + \frac{\varepsilon_n}{x^n}, \qquad \lim \varepsilon_n = 0,$$

zwischen den Grenzen $x$ und $b$ integriert:

$$\int_x^b \left(f(x) - c_0 - \frac{c_1}{x}\right) dx = \int_x^b \left(\frac{c_2}{x^2} + \cdots + \frac{c_n}{x^n}\right) dx + \int_x^b \frac{\varepsilon_n\, dx}{x^n};$$

die rechter Hand auftretenden Integrale haben einen Sinn, wenn wir $b = \infty$ nehmen, es ist also

$$\int_x^\infty \left(f(x) - c_0 - \frac{c_1}{x}\right) dx = \frac{c_2}{x} + \frac{1}{2}\,\frac{c_3}{x^2} + \cdots + \frac{1}{n-1}\,\frac{c_n}{x^{n-1}} + \frac{\eta_n}{x^{n-1}},$$

wo

$$\left|\frac{\eta_n}{x^{n-1}}\right| = \left|\int_x^\infty \frac{\varepsilon_n\,dx}{x^n}\right| < \frac{\delta_n}{n-1}\,\frac{1}{x^{n-1}},$$

wenn wir mit $\delta_n$ einen Mittelwert der Funktion $\varepsilon_n$ bezeichnen.

Es ist demnach

$$\eta_n = \theta\,\frac{\delta_n}{n-1},$$

wo $|\theta| < 1$ und folglich

$$\lim \eta_n = 0;$$

wir haben also für die Funktion

$$\int_x^\infty \left(f(x) - c_0 - \frac{c_1}{x}\right) dx$$

eine asymptotische Darstellung.

Es sei nun $x_0$ ein positiver Wert, dann ist

$$\int_{x_0}^x \left(f(x) - c_0 - \frac{c_1}{x}\right) dx = C - \left(\frac{c_2}{x} + \cdots + \frac{\eta_n}{x^{n-1}}\right),$$

$$C = \int_{x_0}^\infty \left(f(x) - c_0 - \frac{c_1}{x}\right) dx,$$

wir erhalten also:

$$(\delta) \qquad \int_{x_0}^x f(x)\,dx = c_0 x + c_1 \log x + \bar{C} - \frac{c_2}{x} - \frac{1}{2}\,\frac{c_3}{x^2} - \cdots - \frac{\eta_n}{x^{n-1}},$$

wo

$$\bar{C} = C - c_0 x_0 - c_1 \log x_0$$

ist. Die Gleichung ($\delta$) kann als asymptotische Darstellung

$$\int_{x_0}^x f(x)\,dx \sim c_0 x + c_1 \log x + \bar{C} - \frac{c_2}{x} - \frac{1}{2}\,\frac{c_3}{x^2} - \cdots \text{ in inf.}$$

geschrieben werden, wenn wir diese Bezeichnung auf eine durch die auftretenden Zusatzglieder

$$c_0 x + c_1 \log x$$

ergänzte Potenzreihe übertragen. In diesem Sinne können wir also sagen, daß eine asymptotische Darstellung gliedweise integriert werden darf.

Wir bemerken gleich, daß wir im folgenden den Begriff der asymptotischen Darstellung auch auf solche Fälle erweitern werden, wo zu der nach fallenden Potenzen von $x$ fortschreitenden Reihe nicht nur eine Funktion von $x$ additiv hinzutritt (wie hier der Ausdruck $c_0 x + c_1 \log x$), sondern auch die so ergänzte Reihe noch mit einer Funktion von $x$ multipliziert wird. — Wenn $x$ nicht als positive reale Größe, sondern mit einem von Null verschiedenen Argumente $\theta$ ins Unendliche rückt, so haben wir nur an Stelle von $x$ das Produkt $xe^{-\theta i}$ als neue unabhängige Variable einzuführen, um diesen Fall auf den behandelten zurückzuführen. Es ist aber wichtig, sich vor Augen zu halten, daß eine und dieselbe semikonvergente Reihe verschiedene Funktionen asymptotisch darstellen kann, wenn $x$ mit verschiedenen Argumenten ins Unendliche geht.

Man darf eine asymptotische Darstellung im allgemeinen nicht gliedweise differentiieren; dies ist nur dann zulässig, wenn von anderer Seite her feststeht, daß die Derivierte der Funktion $f(x)$ selbst einer asymptotischen Darstellung fähig ist. In den Fällen, mit denen wir es im folgenden zu tun haben werden, wird diese Bedingung stets erfüllt sein.

* * *

Die von Poincaré entdeckte Bedeutung der Reihen (17), die dem Differentialsysteme vom Range Eins formell genügen, besteht nun darin, daß sie, wenn $x$ mit einem bestimmten Argumente dem Unendlichen zustrebt, allemal die Elemente einer Integralmatrix asymptotisch darstellen. Den Nachweis für diese Tatsache werden wir so führen, daß wir zunächst zeigen, daß die logarithmischen Derivierten der Lösungen eines Differentialsystems vom Range Eins bestimmten Grenzwerten zustreben, wenn $x$ mit festem Argumente ins Unendliche rückt, — diesen Satz bezeichnen wir als das Poincarésche Lemma*) — und dann, einer von Horn**) für lineare Differentialgleichungen $n^{\text{ter}}$ Ordnung

*) American Journal, Bd. VII (1887), S. 202.
**) Acta Mathematica, Bd. 24 (1901), S. 289.

angegebenen Methode folgend, auf Grund des Poincaréschen Lemmas direkt die asymptotische Darstellung dieser Lösungen herleiten.

Wir denken uns $x$ als positive reale Variable und setzen voraus, daß die Wurzeln $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ der charakteristischen Gleichung nicht nur voneinander verschieden sind, sondern daß auch ihre realen Teile verschieden sind. Wenn wir in üblicher Weise mit $\Re(a)$ den realen Teil der komplexen Größe $a$ bezeichnen, so möge die Bezeichnung der Wurzeln $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ so gewählt sein, daß

(20) $$\Re(\alpha_1) > \Re(\alpha_2) > \cdots > \Re(\alpha_n)$$

ist. Das Differentialsystem (A′) wollen wir in der Form

(A″) $$\frac{dz_\varkappa}{dx} = z_\varkappa \alpha_\varkappa + \sum_{\lambda=1}^{n} z_\lambda Q_{\lambda\varkappa} \qquad (\varkappa = 1, 2, \cdots, n)$$

schreiben, wo also

(21) $$Q_{\lambda\varkappa} = \frac{b_{\lambda\varkappa}^{(1)}}{x} + \frac{b_{\lambda\varkappa}^{(2)}}{x^2} + \cdots; \qquad (\lambda, \varkappa = 1, 2, \cdots, n)$$

fürs erste wird es aber genügen, über die $Q_{\lambda\varkappa}$ keine weitere Voraussetzung zu machen als, daß

(22) $$\lim Q_{\lambda\varkappa} = 0$$

sei.

Aus den Gleichungen (A″) folgt

$$\frac{d \log z_\varkappa}{dx} = \alpha_\varkappa + \sum_{\lambda=1}^{n} \frac{z_\lambda}{z_\varkappa} Q_{\lambda\varkappa}, \qquad (\varkappa = 1, 2, \cdots, n)$$

also, indem wir die erste Gleichung von allen folgenden abziehen,

(23) $$\frac{d \log \frac{z_\varkappa}{z_1}}{dx} = \alpha_\varkappa - \alpha_1 + Q_{\varkappa\varkappa} - Q_{11} + \sum_{\lambda \neq \varkappa} \frac{z_\lambda}{z_\varkappa} Q_{\lambda\varkappa} - \sum_{\lambda > 1} \frac{z_\lambda}{z_1} Q_{\lambda 1}. \qquad (\varkappa = 2, \cdots, n)$$

Es sei nun für einen bestimmten realen positiven Wert von $x$

(24) $$\left|\frac{z_\lambda}{z_\varkappa}\right| < \frac{1}{\varepsilon}, \quad \left|\frac{z_\lambda}{z_1}\right| < \frac{1}{\varepsilon}, \qquad \lambda \neq \varkappa \quad \lambda > 1$$

wo $\varepsilon$ eine positive Größe bedeutet. Wenn dann

$$|Q_{\lambda\varkappa}| < \delta$$

ist, so folgt aus (23), indem wir beachten, daß

$$0 > \Re(\alpha_\varkappa - \alpha_1) > \Re(\alpha_2 - \alpha_1), \qquad (\varkappa = 3, \cdots, n)$$

und daß der reale Teil einer komplexen Größe nicht größer ist als ihr absoluter Betrag,

$$(25)\quad \Re\left(\frac{d\log\frac{z_\varkappa}{z_1}}{dx}\right) = \frac{d\log\left|\frac{z_\varkappa}{z_1}\right|}{dx} < \Re(\alpha_2-\alpha_1) + 2\delta + 2(n-1)\frac{\delta}{\varepsilon}.$$

Nun ist nach (22)

$$\lim \delta = 0;$$

setzen wir also

$$(26)\qquad \Re(\alpha_2-\alpha_1) + 2\delta + 2(n-1)\frac{\delta}{\varepsilon} = -g$$

und wählen $g$ als positive Größe so, daß

$$g < \Re(\alpha_1-\alpha_2) - 2\delta,$$

so bestimmt sich $\varepsilon$ aus der Gleichung (26) als positive Größe, für die

$$\lim \varepsilon = 0$$

ist. Im folgenden möge $\varepsilon$ stets die für ein gegebenes $\delta$ und ein geeignet gewähltes $g$ auf diese Weise bestimmte Größe bedeuten.

Es sei nun für einen bestimmten Wert von $x$

$$|z_{i_1}| \geqq |z_{i_2}| \geqq \cdots,$$

wo $i_1, i_2, \ldots$ eine Permutation der Zahlen $2, \ldots, n$ bedeutet; wir dividieren durch $|z_1|$ und setzen

$$\left|\frac{z_{i_1}}{z_1}\right| = M,$$

dann ist also

$$M = \left|\frac{z_{i_1}}{z_1}\right| \geqq \left|\frac{z_{i_2}}{z_1}\right| \geqq \cdots.$$

Der betrachtete Wert von $x$ bestimmt seinerseits ein gewisses $\delta$, mit diesem und einem geeigneten $g$ wird wieder ein $\varepsilon$ bestimmt; wir wollen nun annehmen, daß

$$(27)\qquad \varepsilon < M < \frac{1}{\varepsilon}$$

ist; dann haben wir

$$\left|\frac{z_\lambda}{z_1}\right| < \frac{1}{\varepsilon}, \qquad (\lambda = 2, 3, \cdots, n)$$

und, da $M > \varepsilon$,

$$(28)\qquad \left|\frac{z_1}{z_{i_1}}\right| < \frac{1}{\varepsilon}.$$

Da aber $\varepsilon$ mit wachsendem $x$ gegen Null konvergiert, so können wir

annehmen, daß für den $x$-Wert, den wir untersuchen, $\frac{1}{\varepsilon} > 1$ ist; wir haben also, da

$$|z_\lambda| \leqq |z_{i_1}| \qquad (\lambda = 2, \cdots, n)$$

ist, mit Rücksicht auf (28) die Ungleichung

(29)
$$\left|\frac{z_\lambda}{z_{i_1}}\right| < \frac{1}{\varepsilon}. \qquad (\lambda = 1, \cdots, i_1 - 1, i_1 + 1, \cdots, n)$$

Unter der Voraussetzung (27) bestehen also die Ungleichungen (24) für $\varkappa = i_1$, wir erhalten demnach zufolge von (25) die Ungleichung

(30)
$$\frac{d \log M}{dx} < -g.$$

Wenn also für einen bestimmten Wert von $x$ die Ungleichungen (27) erfüllt sind, so nimmt nach (30) die Funktion $M$ von $x$ an dieser Stelle ab, d. h. sie wird kleiner, wenn $x$ von dieser Stelle aus (natürlich immer als reale positive Größe) wächst. Es sei nun $\overline{M}(h)$ der größte Wert, den die Funktion $M$ annehmen kann, wenn $x > h$ ist wir behaupten, daß dann stets

(31)
$$\overline{M}(h) \leqq \varepsilon$$

sein muß. In der Tat haben wir gesehen, daß $M$ abnimmt, solange $M > \varepsilon$ ist; sollte nun $M$ wieder mit wachsendem $x$ zunehmen, so könnte dies nur so lange stattfinden, bis diese Funktion den Wert $\varepsilon$ erreicht hat, da, sowie $M > \varepsilon$ geworden ist, wieder ein Abnehmen eintreten muß. — Da nun aber $\lim \varepsilon = 0$ ist, so folgt aus (31), daß

$$\lim M = 0$$

sein muß, d. h. wenn für einen bestimmten (großen positiven) Wert von $x$ die Ungleichungen

(32)
$$\varepsilon < \left|\frac{z_\varkappa}{z_1}\right| < \frac{1}{\varepsilon} \qquad (\varkappa = 2, 3, \cdots, n)$$

erfüllt sind, so ist

(33)
$$\lim \frac{z_\varkappa}{z_1} = 0. \qquad (\varkappa = 2, 3, \cdots, n)$$

Sollten die Ungleichungen (32) für keinen Wert von $x$ erfüllt sein, so sind die $\left|\frac{z_\varkappa}{z_1}\right|$ entweder stets kleiner als $\varepsilon$ oder stets größer als $\frac{1}{\varepsilon}$. Im ersteren Falle wäre

$$\lim \frac{z_\varkappa}{z_1} = 0,$$

im letzteren

(34)
$$\lim \frac{z_\varkappa}{z_1} = \infty.$$

Wir können also sagen, daß im allgemeinen für ein Integralsystem $z_1, \ldots, z_n$ des Differentialsystems (A″) die Gleichungen (33) bestehen, daß aber für gewisse partikuläre Integralsysteme auch die Gleichungen (34) gelten können. Daß es wirklich immer Lösungssysteme $z_1, \ldots, z_n$ gibt, für die die Gleichungen (33) richtig sind, folgt einfach daraus, daß wir ja für ein hinreichend großes positives $x$ die Anfangswerte so vorschreiben können, daß die Ungleichungen (32) erfüllt werden. Dieser Satz ist das Poincarésche Lemma.

Wir stellen nun ein Differentialsystem her, dem die Quotienten $\frac{z_\varkappa}{z_1}$ Genüge leisten.

* * *

Hat man allgemein das System

$$\frac{dy_\varkappa}{dx} = \sum_{\lambda=1}^{n} y_\lambda a_{\lambda\varkappa}, \qquad (\varkappa = 1, 2, \cdots, n)$$

so ist

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{y_\varkappa}{y_1}\right) = \sum_{\lambda=1}^{n} \frac{y_\lambda}{y_1} a_{\lambda\varkappa} - \frac{y_\varkappa}{y_1} \sum_{\lambda=1}^{n} \frac{y_\lambda}{y_1} a_{\lambda 1}; \qquad (\varkappa = 2, 3, \cdots, n)$$

die Quotienten

$$\frac{y_\varkappa}{y_1} = u_\varkappa \qquad (\varkappa = 2, 3, \cdots, n)$$

befriedigen folglich das Differentialsystem zweiten Grades

$$\frac{du_\varkappa}{dx} + u_\varkappa \sum_{\lambda>1} u_\lambda a_{\lambda 1} + u_\varkappa a_{11} = \sum_{\lambda>1} u_\lambda a_{\lambda\varkappa} + a_{1\varkappa},$$

$$(\varkappa = 2, 3, \cdots, n)$$

das man wohl als Riccatisches System bezeichnen kann, weil es sich für $n = 2$ auf die Riccatische Differentialgleichung

$$\frac{du}{dx} + a_{21} u^2 + (a_{11} - a_{22}) u - a_{12} = 0$$

reduziert. Wenn die Lösungen des Riccatischen Systems bekannt sind, so ergeben sich die Lösungen des linearen Differentialsystems $y_1, \ldots, y_n$ mit Hilfe von Quadraturen.

* * *

Für unser Differentialsystem (A″) ist

$$\left.\begin{aligned} a_{\iota\varkappa} &= Q_{\iota\varkappa}, \qquad (\iota \neq \varkappa) \\ a_{\varkappa\varkappa} &= \alpha_\varkappa + Q_{\varkappa\varkappa}; \end{aligned}\right\} \qquad (\iota, \varkappa = 1, 2, \cdots, n)$$

das Riccatische System, dem die Quotienten

$$\frac{z_\varkappa}{z_1} = u_\varkappa \qquad (\varkappa = 2, 3, \cdots, n)$$

genügen, lautet also:

$$(\mathrm{A}''') \quad \frac{du_\varkappa}{dx} + u_\varkappa \sum_{\lambda > 1} u_\lambda Q_{\lambda 1} = (\alpha_\varkappa - \alpha_1) u_\varkappa + \sum_{\lambda > 1} u_\lambda (Q_{\lambda\varkappa} - \delta_{\lambda\varkappa} Q_{11}) + Q_{1\varkappa}. \quad (\varkappa = 2, 3, \cdots, n)$$

Wir können somit den Inhalt des Poincaréschen Lemmas auch in der folgenden Form aussprechen: Ein Riccatisches Differentialsystem

$$(\mathrm{A}^{\mathrm{IV}}) \qquad \frac{du_\varkappa}{dx} + u_\varkappa \sum_\lambda u_\lambda R_{\lambda 1} = \beta_\varkappa u_\varkappa + \sum_\lambda u_\lambda R_{\lambda\varkappa} + R_{1\varkappa}, \quad (\varkappa, \lambda = 2, 3, \cdots, n)$$

worin

$$\Re(\beta_\varkappa) < 0, \qquad \lim R_{\lambda 1} = \lim R_{1\varkappa} = \lim R_{\lambda\varkappa} = 0$$

ist, besitzt stets ein Lösungssystem $u_2, \ldots, u_n$, für das

$$\lim u_\varkappa = 0. \qquad (\varkappa = 2, \cdots, n)$$

Zu einem Riccatischen Systeme ($\mathrm{A}^{\mathrm{IV}}$) gehört immer ein lineares homogenes Differentialsystem von der Form (A″), dessen Lösungsquotienten $\frac{z_\varkappa}{z_1}$ dem Riccatischen Systeme Genüge leisten.

Wir denken uns nunmehr die $Q_{i\varkappa}$ in dem Systeme (A″) wieder als Funktionen, die durch Reihen von der Form

$$(35) \qquad \frac{b_{i\varkappa}^{(1)}}{x} + \frac{b_{i\varkappa}^{(2)}}{x^2} + \cdots \text{ in inf.}$$

dargestellt sind; diese Reihen können jedoch entweder in einer gewissen Umgebung von $x = \infty$ konvergent sein, oder aber, sie können als semikonvergente Reihen vorausgesetzt werden, die die $Q_{i\varkappa}$ für große reale positive Werte von $x$ asymptotisch darstellen. — Es gibt dann, wie wir gesehen haben, stets Reihen

$$(36) \qquad z_{i\varkappa} = e^{\alpha_i x} x^{\varrho_i} \left( c_{i\varkappa}^{(0)} + \frac{c_{i\varkappa}^{(1)}}{x} + \cdots \text{ in inf.} \right),$$

die dem Differentialsystem (A″) formell Genüge leisten, und wo

$$\varrho_i = b_{ii}^{(1)}, \qquad c_{i\varkappa}^{(0)} = \delta_{i\varkappa}$$

ist. Insbesondere ergibt sich für $i = 1$, wenn wir formell die Quotienten $\frac{z_{1\varkappa}}{z_{11}}$ bilden,

$$(37)\qquad \frac{z_{1\varkappa}}{z_{11}}=\frac{\frac{c_{1\varkappa}^{(1)}}{x}+\frac{c_{1\varkappa}^{(2)}}{x^2}+\cdots}{1+\frac{c_{11}^{(1)}}{x}+\frac{c_{11}^{(2)}}{x^2}+\cdots}=\frac{\gamma_{1\varkappa}^{(1)}}{x}+\frac{\gamma_{1\varkappa}^{(2)}}{x^2}+\cdots \text{ in inf.}, \quad (\varkappa=2,3,\cdots,n)$$

wo zufolge der Gleichung (16) (S. 185)

$$(38)\qquad \gamma_{1\varkappa}^{(1)}=c_{1\varkappa}^{(1)}=\frac{b_{1\varkappa}^{(1)}}{\alpha_1-\alpha_\varkappa};$$

die Reihen (37) haben natürlich auch nur formalen Charakter. Jedenfalls können wir aber sagen, daß, wenn in dem Riccatischen Systeme die $R_{\lambda\varkappa}$ in der Form von Reihen

$$(39)\qquad R_{\lambda\varkappa}:\qquad \frac{\beta_{\lambda\varkappa}^{(1)}}{x}+\frac{\beta_{\lambda\varkappa}^{(2)}}{x^2}+\cdots \text{ in inf.}$$

konvergent oder asymptotisch dargestellt sind, stets Reihen

$$(40)\qquad u_\varkappa=\frac{\gamma_\varkappa^{(1)}}{x}+\frac{\gamma_\varkappa^{(2)}}{x^2}+\cdots \text{ in inf.} \qquad (\varkappa=2,3,\cdots,n)$$

gefunden werden können, die jenem Riccatischen Systeme formell Genüge leisten.

Wir setzen jetzt

$$(41)\qquad R_{\lambda\varkappa}=\frac{\beta_{\lambda\varkappa}^{(1)}}{x}+\cdots+\frac{\beta_{\lambda\varkappa}^{(p+1)}}{x^{p+1}}+\frac{B_{\lambda\varkappa}}{x^{p+1}},$$

wo $p$ eine beliebige, aber fest gewählte positive ganze Zahl bedeutet. Dann ist, gleichgültig ob die Reihen (39) konvergieren oder die $R_{\lambda\varkappa}$ nur asymptotisch darstellen, für die Funktionen $B_{\lambda\varkappa}$ von $x$

$$\lim B_{\lambda\varkappa}=0.$$

In ähnlicher Weise setzen wir

$$u_\varkappa=\frac{\gamma_\varkappa^{(1)}}{x}+\frac{\gamma_\varkappa^{(2)}}{x^2}+\cdots+\frac{\gamma_\varkappa^{(p+1)}}{x^{p+1}}+\frac{\Gamma_\varkappa}{x^{p+1}},$$

führen diese Ausdrücke in das Riccatische Differentialsystem ein und bilden die Differentialgleichungen, denen die Funktionen $\Gamma_\varkappa$ genügen. Wir finden

$$\frac{d\Gamma_\varkappa}{dx}+\Gamma_\varkappa\sum_{\lambda=2}^{n}\Gamma_\lambda S_{\lambda 1}=\beta_\varkappa\Gamma_\varkappa+\sum_{\lambda=2}^{n}\Gamma_\lambda S_{\lambda\varkappa}+S_{1\varkappa}, \quad (\varkappa=2,\cdots,n)$$

wo

$$S_{\lambda 1}=\frac{R_{\lambda 1}}{x^{p+1}};\qquad S_{\lambda\varkappa}=R_{\lambda\varkappa}-R_{\lambda 1}U_\varkappa, \qquad (\lambda\neq\varkappa)$$

$$S_{\varkappa\varkappa} = R_{\varkappa\varkappa} - R_{\varkappa 1} U_\varkappa - (R_{21} U_2 + \cdots + R_{n1} U_n) + \frac{p+1}{x},$$

$$U_\varkappa = \frac{\gamma_\varkappa^{(1)}}{x} + \cdots + \frac{\gamma_\varkappa^{(p+1)}}{x^{p+1}};$$

die komplizierteren Ausdrücke für die $S_{1\varkappa}$ schreiben wir nicht explizite hin, sondern bemerken, worauf es uns allein ankommt, daß

$$\lim S_{1\varkappa} = 0$$

ist. — Dieses Differentialsystem für die $\Gamma_2, \ldots, \Gamma_n$ ist nun ein Riccatisches von der Form $(A^{IV})$; es besitzt demnach zufolge des Poincaréschen Lemmas ein Lösungssystem, für das

$$\lim \Gamma_\varkappa = 0$$

ist. Wir können also das Resultat aussprechen: Für jede positive ganze Zahl $p$ besitzt das Riccatische System $(A^{IV})$ ein Lösungssystem von der Form

$$\left.\begin{aligned} u_\varkappa = \frac{\gamma_\varkappa^{(1)}}{x} + \cdots + \frac{\gamma_\varkappa^{(p+1)}}{x^{p+1}} + \frac{\Gamma_\varkappa}{x^{p+1}}, \\ \lim \Gamma_\varkappa = 0 \end{aligned}\right\} \qquad (\varkappa = 2, 3, \cdots, n)$$

wo

ist. — Damit ist natürlich noch nicht bewiesen, daß die Reihen (40) ein Lösungssystem von $(A^{IV})$ asymptotisch darstellen, da sich das eben ausgesprochene Resultat auf eine zwar beliebige, aber feste ganze Zahl $p$ bezieht. Ehe wir weiter gehen, sehen wir zu, was aus dem bisher Erlangten für das lineare Differentialsystem $(A'')$ beziehungsweise für unser ursprüngliches Differentialsystem (A) folgt.

Das Differentialsystem (A), dessen Koeffizienten von der Form (1) (S. 183) vorausgesetzt wurden, schreiben wir jetzt in der Form

$$(\bar{A}) \qquad \frac{dy_\varkappa}{dx} = \sum_{\lambda=1}^{n} y_\lambda (a_{\lambda\varkappa}^{(0)} + P_{\lambda\varkappa});$$

hierin können die $P_{i\varkappa}$ durch die Reihen

$$\frac{a_{i\varkappa}^{(1)}}{x} + \frac{a_{i\varkappa}^{(2)}}{x^2} + \cdots \text{ in inf.}$$

entweder — wie es für unser Differentialsystem von vornherein vorausgesetzt war — konvergent oder auch nur asymptotisch dargestellt sein. Aus $(\bar{A})$ folgt zunächst:

$$\frac{d \log y_\varkappa}{dx} = \sum_{\lambda=1}^{n} \frac{y_\lambda}{y_\varkappa} a_{\lambda\varkappa}^{(0)} + \sum_{\lambda=1}^{n} \frac{y_\lambda}{y_\varkappa} P_{\lambda\varkappa};$$

wenn wir hierin den Gleichungen (8) gemäß

$$\frac{y_\lambda}{y_\varkappa} = \frac{z_1\alpha_{1\lambda} + \cdots + z_n\alpha_{n\lambda}}{z_1\alpha_{1\varkappa} + \cdots + z_n\alpha_{n\varkappa}}$$

einsetzen, so ergibt sich

$$\frac{d\log y_\varkappa}{dx} = \frac{1}{z_1\alpha_{1\varkappa} + \cdots + z_n\alpha_{n\varkappa}}\left\{\sum_\lambda\sum_i z_i\alpha_{i\lambda}a_{\lambda\varkappa}^{(0)} + \sum_\lambda\sum_i z_i\alpha_{i\lambda}P_{\lambda\varkappa}\right\}.$$

Da aber nach (7a)

$$\sum_\lambda \alpha_{i\lambda}a_{\lambda\varkappa}^{(0)} = \alpha_i\alpha_{i\varkappa}$$

ist, so haben wir

$$(42)\qquad \frac{d\log y_\varkappa}{dx} = \frac{z_1\alpha_1\alpha_{1\varkappa} + \cdots + z_n\alpha_n\alpha_{n\varkappa}}{z_1\alpha_{1\varkappa} + \cdots + z_n\alpha_{n\varkappa}} + \frac{\sum_\lambda\sum_i z_i\alpha_{i\lambda}P_{\lambda\varkappa}}{z_1\alpha_{1\varkappa} + \cdots + z_n\alpha_{n\varkappa}}.$$

Man kann ohne wesentliche Beschränkung der Allgemeinheit voraussetzen, daß die

$$\alpha_{11},\ \alpha_{12},\ \ldots,\ \alpha_{1n}$$

von Null verschieden sind. Sollte dies nämlich von vornherein nicht zutreffen, so läßt es sich stets dadurch erreichen, daß man die $y_1, \ldots, y_n$ einer passenden linearen Substitution unterwirft.*) Unter dieser Vor-

*) Wir bemerken, daß die folgenden Erwägungen mutatis mutandis auch dann anwendbar bleiben, wenn unter den $\alpha_{1\varkappa}$ gewisse gleich Null sind. So hat man z. B. für das Differentialsystem (A′) selbst

$$\frac{d\log z_\varkappa}{dx} = \alpha_\varkappa + \frac{b_{\varkappa\varkappa}^{(1)}}{x} + \cdots + \sum_{\lambda \neq \varkappa}\frac{z_\lambda}{z_\varkappa}\left(\frac{b_{\lambda\varkappa}^{(1)}}{x} + \cdots +\right),$$

also für das Integralsystem $z_{11}, \ldots, z_{1n}$

$$\frac{d\log z_{11}}{dx} = \alpha_1 + \frac{b_{11}^{(1)}}{x} + \cdots + \sum_{\lambda>1}\frac{\frac{c_{1\lambda}^{(1)}}{x} + \cdots}{1 + \frac{c_{11}^{(1)}}{x} + \cdots}\left(\frac{b_{\lambda 1}^{(1)}}{x} + \cdots\right),$$

$$= \alpha_1 + \frac{\tau_1^{(1)}}{x} + \cdots + \frac{\tau_1^{(p)}}{x^p} + \frac{T_1}{x^p},$$

und für $\varkappa > 1$

$$\frac{d\log z_{1\varkappa}}{dx} = \alpha_\varkappa + \frac{b_{\varkappa\varkappa}^{(1)}}{x} + \cdots + \sum_{\lambda \neq \varkappa}\frac{\delta_{1\lambda} + \frac{c_{1\lambda}^{(1)}}{x} + \cdots}{\frac{c_{1\varkappa}^{(1)}}{x} + \cdots}\left(\frac{b_{\lambda\varkappa}^{(1)}}{x} + \cdots\right),$$

aussetzung können wir auf der rechten Seite von (42) in Zähler und Nenner durch $z_1 \alpha_{1\varkappa}$ dividieren und finden:

$$(43)\quad \frac{d\log y_\varkappa}{dx} = \frac{\alpha_1 + \alpha_2 \frac{\alpha_{2\varkappa}}{\alpha_{1\varkappa}}\frac{z_2}{z_1} + \cdots + \alpha_n \frac{\alpha_{n\varkappa}}{\alpha_{1\varkappa}}\frac{z_n}{z_1}}{1 + \frac{\alpha_{2\varkappa}}{\alpha_{1\varkappa}}\frac{z_2}{z_1} + \cdots + \frac{\alpha_{n\varkappa}}{\alpha_{1\varkappa}}\frac{z_n}{z_1}} + \frac{\sum\limits_\lambda \sum\limits_i \frac{z_i}{z_1}\frac{\alpha_{i\lambda}}{\alpha_{1\varkappa}} p_{\lambda\varkappa}}{1 + \frac{\alpha_{2\varkappa}}{\alpha_{1\varkappa}}\frac{z_2}{z_1} + \cdots + \frac{\alpha_{n\varkappa}}{\alpha_{1\varkappa}}\frac{z_n}{z_1}}.$$

Wenn wir nunmehr in diesen Gleichungen für die Quotienten $\frac{z_i}{z_1}$ die gefundenen Ausdrücke

$$\frac{\gamma_i^{(1)}}{x} + \cdots + \frac{\gamma_i^{(p+1)}}{x^{p+1}} + \frac{\Gamma_i}{x^{p+1}} \qquad (i = 2, \cdots, n)$$

einsetzen und nach fallenden Potenzen von $x$ ordnen, so ergibt sich

$$\frac{d\log y_\varkappa}{dx} = \alpha_1 + \frac{\sigma_\varkappa^{(0)}}{x} + \frac{\sigma_\varkappa^{(1)}}{x^2} + \cdots + \frac{\sigma_\varkappa^{(p)}}{x^{p+1}} + \frac{\Sigma_\varkappa}{x^{p+1}},$$

wo

$$\lim \Sigma_\varkappa = 0$$

ist. Integrieren wir diese Gleichungen in bezug auf $x$, so erhalten wir

$$\log y_\varkappa = \alpha_1 x + \sigma_\varkappa^{(0)} \log x - \frac{\sigma_\varkappa^{(1)}}{x} - \cdots - \frac{\sigma_\varkappa^{(p)}}{p x^p} + \int_\infty^x \frac{\Sigma_\varkappa dx}{x^{p+1}} + \text{const.},$$

und indem wir zu den Numeris übergehen,

$$(44)\qquad y_\varkappa = e^{\alpha_1 x} x^{\sigma_\varkappa^{(0)}} \left( \varepsilon_{1\varkappa}^{(0)} + \frac{\varepsilon_{1\varkappa}^{(1)}}{x} + \cdots + \frac{\varepsilon_{1\varkappa}^{(p)}}{x^p} + \frac{E_{1\varkappa}^{(p)}}{x^p} \right).$$

---

$$\frac{d\log z_{1\varkappa}}{dx} = \alpha_\varkappa + \frac{b_{\varkappa\varkappa}^{(1)}}{x} + \cdots + \frac{1 + \frac{c_{11}^{(1)}}{x} + \cdots}{\frac{c_{1\varkappa}^{(1)}}{x} + \cdots}\left(\frac{b_{1\varkappa}^{(1)}}{x} + \cdots\right)$$

$$+ \sum_{\substack{\lambda > 1 \\ \lambda \neq \varkappa}} \frac{c_{1\lambda}^{(1)} + \cdots}{c_{1\varkappa}^{(1)} + \cdots}\left(\frac{b_{\lambda\varkappa}^{(1)}}{x} + \cdots\right),$$

also da nach Gleichung (38)

$$c_{1\varkappa}^{(1)} = \frac{b_{1\varkappa}^{(1)}}{\alpha_1 - \alpha_\varkappa}$$

ist,

$$\frac{d\log z_{1\varkappa}}{dx} = \alpha_1 + \frac{\tau_\varkappa^{(1)}}{x} + \cdots + \frac{\tau_\varkappa^{(p)}}{x^p} + \frac{T_\varkappa}{x^p}. \qquad (\varkappa = 1, 2, \cdots, n)$$

Hierin ist, wie man ohne weiteres übersieht,

$$\sigma_{\varkappa}^{(0)} = \varrho_1 = b_{11}^{(1)},$$

und die $\varepsilon_{1\varkappa}^{(0)}, \varepsilon_{1\varkappa}^{(1)}, \ldots, \varepsilon_{1\varkappa}^{(p)}$ stimmen mit den ebenso bezeichneten Größen in den Reihen (17) (S. 185) überein. Ferner zeigt man durch das beim Beweise der Sätze 3. und 5. über asymptotische Darstellungen angewandte Verfahren, daß

$$\lim E_{1\varkappa}^{(p)} = 0. \tag{45}$$

Das Integralsystem, das in der Form (44) darstellbar ist, und dessen Existenz wir jetzt bewiesen haben, bezeichnen wir mit

$$y_{11}, \ldots, y_{1n}.$$

Wir zeigen jetzt durch vollständige Induktion, daß noch weitere $n-1$ Integralsysteme vorhanden sind, die zu den übrigen $n-1$ formell aufgestellten Reihensystemen (17) ebenso gehören, wie das eben gefundene zu dem ersten dieser Reihensysteme gehört. Um diesen Nachweis zu führen, bedürfen wir eines Satzes, der ein spezieller Fall des zweiten Satzes der siebenten Vorlesung (S. 115, 116) ist, und den wir hier in der Form einschalten wollen, wie wir ihn nachher unmittelbar gebrauchen werden.

* * *

Es sei

$$\frac{dy_\varkappa}{dx} = \sum_{\lambda=1}^{n} y_\lambda a_{\lambda\varkappa} \qquad (\varkappa = 1, 2, \cdots, n) \tag{I}$$

ein Differentialsystem mit $n$ Unbekannten und

$$y_{11}, \ldots, y_{1n}$$

ein partikulares Lösungssystem. Setzen wir dann

$$y_\varkappa = y_{1\varkappa} \cdot \mathfrak{y}_\varkappa,$$

so ist

$$y_{1\varkappa} \frac{d\mathfrak{y}_\varkappa}{dx} + \frac{dy_{1\varkappa}}{dx} \mathfrak{y}_\varkappa = \sum_{\lambda=1}^{n} y_{1\lambda} \mathfrak{y}_\lambda a_{\lambda\varkappa},$$

also, da

$$\frac{dy_{1\varkappa}}{dx} = \sum_{\lambda=1}^{n} y_{1\lambda} a_{\lambda\varkappa}$$

ist,

$$y_{1\varkappa} \frac{d\mathfrak{y}_\varkappa}{dx} = \sum_{\lambda} y_{1\lambda} \mathfrak{y}_\lambda a_{\lambda\varkappa} - \sum_{\lambda} \mathfrak{y}_\varkappa y_{1\lambda} a_{\lambda\varkappa},$$

oder

$$\frac{d\mathfrak{y}_x}{dx} = \sum_{\lambda \neq x} \frac{y_{1\lambda}}{y_{1x}} \mathfrak{y}_\lambda a_{\lambda x} - \mathfrak{y}_x \sum_{\lambda \neq x} \frac{y_{1\lambda}}{y_{1x}} a_{\lambda x}.$$

Dieses Differentialsystem besitzt das Lösungssystem

$$\mathfrak{y}_1 = 1, \cdots, \mathfrak{y}_n = 1,$$

was sich dadurch kundgibt, daß in jeder Gleichung die Summe der Koeffizienten der $\mathfrak{y}_x$ verschwindet. Setzen wir

$$\text{(II)} \quad \left\{ \begin{array}{l} \left. \begin{array}{l} \frac{y_{1\lambda}}{y_{1x}} a_{\lambda x} = f_{\lambda x}, \ (\lambda \neq x), \ -\sum_{\lambda \neq x} \frac{y_{1\lambda}}{y_{1x}} a_{\lambda x} = f_{xx}, \\ f_{1x} + f_{2x} + \cdots + f_{nx} = 0, \end{array} \right\} \quad (x = 1, 2, \cdots, n) \\ \mathfrak{y}_x - \mathfrak{y}_1 = u_x, \quad (x = 2, \cdots, n) \end{array} \right.$$

so ist

$$\text{(III)} \quad \frac{d\mathfrak{y}_1}{dx} = f_{21} u_2 + \cdots + f_{n1} u_n,$$

$$\text{(IV)} \quad \frac{du_x}{dx} = (f_{2x} - f_{21}) u_2 + \cdots + (f_{nx} - f_{n1}) u_n. \quad (x = 2, \cdots, n)$$

Wenn dann ein Lösungssystem $u_2, \ldots, u_n$ des Differentialsystems (IV) bekannt ist, so haben wir nach (III)

$$\mathfrak{y}_1 = \int (u_2 f_{21} + \cdots + u_n f_{n1}) dx$$

und folglich nach (II)

$$\mathfrak{y}_1 = -\int \sum_{\lambda=2}^{n} u_\lambda a_{\lambda 1} \frac{y_{1\lambda}}{y_{11}} dx.$$

Indem wir diesen Ausdruck in

$$\mathfrak{y}_x = u_x + \mathfrak{y}_1 \quad (x = 2, \cdots, n)$$

einsetzen, erhalten wir aus

$$y_x = y_{1x} \mathfrak{y}_x$$

die Darstellung

$$\text{(V)} \quad y_x = y_{1x} \left( u_x + \int \sum_{\lambda=2}^{n} u_\lambda a_{\lambda 1} \frac{y_{1\lambda}}{y_{11}} dx \right), \quad (x = 1, 2, \cdots, n)$$

worin $u_1 = 0$ zu nehmen ist. Die Integration des Differentialsystems (I) für $n$ Unbekannte, läßt sich also, wenn ein Lösungssystem bekannt ist, auf die Integration eines Differentialsystems für $n - 1$ Unbekannte (IV) und auf Quadraturen zurückführen.

---

# Zwölfte Vorlesung.

**Fortsetzung der Untersuchung der Differentialsysteme vom Range Eins. Nachweis der asymptotischen Darstellung für reale positive Annäherung der unabhängigen Variabeln an die Unbestimmtheitsstelle und für Annäherung mit beliebigem festen Argument.**

Den in der vorigen Vorlesung in Aussicht genommenen Nachweis wollen wir der Einfachheit halber nicht an das Differentialsystem (A), sondern an das System (A′) knüpfen. Für dieses System bezw. für das System (A″) (S. 193) steht die Existenz eines Lösungssystems

$$z_{1\varkappa} = e^{\alpha_1 x} x^{\varrho_1}\left(\delta_{1\varkappa} + \frac{c_{1\varkappa}^{(1)}}{x} + \cdots + \frac{c_{1\varkappa}^{(p)}}{x^p} + \frac{C_{1\varkappa}}{x^p}\right) \qquad (\varkappa = 1, 2, \cdots, n)$$

fest, wo

$$\lim C_{1\varkappa} = 0$$

ist, und wo überdies

$$\varrho_1 = b_{11}^{(1)}, \; c_{1\varkappa}^{(1)} = \frac{b_{1\varkappa}^{(1)}}{\alpha_1 - \alpha_\varkappa} \qquad (\varkappa > 1)$$

gefunden wurde. Wir benutzen nun dieses Lösungssystem zur Reduktion des Differentialsystems (A″) mit $n$ Unbekannten auf ein solches mit $n-1$ Unbekannten, indem wir den am Schlusse der vorigen Vorlesung bewiesenen Hilfssatz zur Anwendung bringen. Es sei also

$$(1) \qquad u_\varkappa = \frac{z_\varkappa}{z_{1\varkappa}} - \frac{z_1}{z_{11}} \qquad (\varkappa = 2, 3, \cdots, n)$$

und

$$(2) \qquad \frac{du_\varkappa}{dx} = u_2 B_{2\varkappa} + \cdots + u_n B_{n\varkappa} \qquad (\varkappa = 2, 3, \cdots, n)$$

das Differentialsystem mit $n-1$ Unbekannten, dem die $u_2, \ldots, u_n$ genügen. Für die Koeffizienten dieses Systems finden wir nach den Gleichungen (II), (IV) der vorigen Vorlesung und mit Rücksicht auf die Form der Koeffizienten des Differentialsystems (A″) (S. 193):

$$B_{\lambda\varkappa} = f_{\lambda\varkappa} - f_{\lambda 1}, \qquad (\lambda, \varkappa = 2, 3, \cdots, n)$$

wo

$$f_{\lambda\varkappa} = \frac{z_{1\lambda}}{z_{1\varkappa}}\left(\delta_{\lambda\varkappa}\alpha_\varkappa + \frac{b_{\lambda\varkappa}^{(1)}}{x} + \cdots\right) = \frac{\delta_{1\lambda} + \frac{c_{1\lambda}^{(1)}}{x} + \cdots}{\delta_{1\varkappa} + \frac{c_{1\varkappa}^{(1)}}{x} + \cdots}\left(\delta_{\lambda\varkappa}\alpha_\varkappa + \frac{b_{\lambda\varkappa}^{(1)}}{x} + \cdots\right),$$

$$f_{\varkappa\varkappa} = -\sum_{(\lambda \neq \varkappa)} \frac{z_{1\lambda}}{z_{1\varkappa}}(\delta_{\lambda\varkappa}\alpha_\varkappa + \cdots) = -\sum_{\lambda \neq \varkappa} \frac{\delta_{1\lambda} + \frac{c_{1\lambda}^{(1)}}{x} + \cdots}{\delta_{1\varkappa} + \frac{c_{1\varkappa}^{(1)}}{x} + \cdots}\left(\delta_{\lambda\varkappa}\alpha_\varkappa + \frac{b_{\lambda\varkappa}^{(1)}}{x} + \cdots\right),$$

also

$$f_{\lambda\varkappa} = \frac{c_{1\lambda}^{(1)} + \cdots}{c_{1\varkappa}^{(1)} + \cdots} \cdot \frac{1}{x}\,(b_{\lambda\varkappa}^{(1)} + \cdots), \qquad (\lambda, \varkappa = 2, 3, \cdots, n;\ \lambda \neq \varkappa)$$

$$f_{\lambda 1} = \frac{\frac{c_{1\lambda}^{(1)}}{x} + \cdots}{1 + \frac{c_{11}^{(1)}}{x} + \cdots} \cdot \frac{1}{x}\,(b_{\lambda 1}^{(1)} + \cdots), \qquad (\lambda = 2, 3, \cdots, n)$$

$$f_{\varkappa\varkappa} = -\frac{1 + \frac{c_{11}^{(1)}}{x} + \cdots}{\frac{c_{1\varkappa}^{(1)}}{x} + \cdots}\left(\frac{b_{1\varkappa}^{(1)}}{x} + \cdots\right) - \cdots = -\frac{b_{1\varkappa}^{(1)}}{c_{1\varkappa}^{(1)}} + \frac{1}{x}\,\{\cdots\},$$

$$(\varkappa = 2, 3, \cdots, n)$$

oder da

$$c_{1\varkappa}^{(1)} = \frac{b_{1\varkappa}^{(1)}}{\alpha_1 - \alpha_\varkappa}$$

ist,

$$f_{\varkappa\varkappa} = \alpha_\varkappa - \alpha_1 + \frac{1}{x}\left\{\cdots\right\}. \qquad (\varkappa = 2, 3, \cdots, n)$$

Das Differentialsystem (2) hat also die folgende Form:

$$(3) \qquad \frac{du_\varkappa}{dx} = (\alpha_\varkappa - \alpha_1)u_\varkappa + \sum_{\lambda=2}^{n} u_\lambda T_{\lambda\varkappa}, \qquad (\varkappa = 2, \cdots, n)$$

wo die $T_{i\varkappa}$ nach Potenzen von $x^{-1}$ fortschreitende Reihen bedeuten, deren absolute Glieder fehlen, so daß

$$\lim T_{i\varkappa} = 0;$$

unser Differentialsystem ist also von derselben Beschaffenheit wie das Differentialsystem (A″), nur daß an Stelle der in (A″) auftretenden $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ die Differenzen $\alpha_2 - \alpha_1, \ldots, \alpha_n - \alpha_1$ erscheinen.

Wir wollen für das System (A″) nachweisen, daß außer dem Lösungssystem $z_{11}, \ldots, z_{1n}$ noch $n-1$ Lösungssysteme von der Form

$$z_{i\varkappa} = e^{\alpha_i x} x^{\varrho_i}\left(\delta_{i\varkappa} + \frac{c_{i\varkappa}^{(1)}}{x} + \cdots + \frac{c_{i\varkappa}^{(p)}}{x^p} + \frac{C_{i\varkappa}}{x^p}\right)$$
$$(i = 2, \cdots, n;\ \varkappa = 1, 2, \cdots, n)$$

vorhanden sind, für die

$$\lim C_{i\varkappa} = 0.$$

Wir setzen die Richtigkeit unserer Behauptung für Differentialsysteme mit $n-1$ Unbekannten voraus und zeigen, daß sie dann auch für Systeme mit $n$ Unbekannten zutrifft. Für $n = 1$ ist der in Rede stehende Satz nämlich unmittelbar evident. In der Tat folgt für

$$(4)\qquad \frac{dz}{dx} = \left(\alpha + \frac{b^{(1)}}{x} + \cdots + \frac{b^{(p+1)}}{x^{p+1}} + \frac{B}{x^{p+1}}\right) z, \quad \lim B = 0,$$

ohne weiteres

$$z = e^{\int\left(\alpha + \frac{b^{(1)}}{x} + \cdots\right)dx} = e^{\alpha x} x^{b^{(1)}}\left(c_0 + \frac{c_1}{x} + \cdots + \frac{c_p}{x^p} + \frac{C}{x^p}\right),$$
$$\lim C = 0.$$

Das Differentialsystem (3) mit $n-1$ Unbekannten besitzt der Voraussetzung nach $n-1$ Integralsysteme von der Form

$$u_{i\varkappa} = e^{(\alpha_i - \alpha_1)x} x^{\sigma_i}\left(\delta_{i\varkappa} + \frac{g_{i\varkappa}^{(1)}}{x} + \cdots + \frac{g_{i\varkappa}^{(p)}}{x^p} + \frac{G_{i\varkappa}}{x^p}\right),$$
$$\lim G_{i\varkappa} = 0.$$
$$(i, \varkappa = 2, 3, \cdots, n)$$

Von diesen gehen wir vermittels der Formeln (V) der vorigen Vorlesung zu $n-1$ Lösungssystemen des Differentialsystems (A″) über:

$$z_{i\varkappa} = z_{1\varkappa}\left(u_{i\varkappa} + \int_{\infty}^{x} \sum_{\lambda=2}^{n} u_{i\lambda}\frac{z_{1\lambda}}{z_{11}}\left(\delta_{\lambda 1} + \frac{b_{\lambda 1}^{(1)}}{x} + \cdots\right)dx\right)$$
$$(i, = 2, 3, \cdots, n;\ \varkappa = 1, 2, \cdots, n;\ u_{i1} = 1)$$

und berechnen zuvörderst das in der Klammer auftretende Integral.

Die unter dem Integralzeichen stehende Summe hat die folgende Form:

$$e^{(\alpha_i - \alpha_1)x} x^{\sigma_i} \sum_{\lambda=2}^{n}\left(\delta_{i\lambda} + \frac{g_{i\lambda}^{(1)}}{x} + \cdots\right)\frac{\delta_{1\lambda} + \frac{c_{1\lambda}^{(1)}}{x} + \cdots}{\delta_{11} + \frac{c_{11}^{(1)}}{x} + \cdots}\left(\delta_{\lambda 1} + \frac{b_{\lambda 1}^{(1)}}{x} + \cdots\right),$$

hierin sind die durch Punkte $\cdots$ bezeichneten Reihen so beschaffen, daß sie mit der $p$-ten Potenz von $\frac{1}{x}$ abbrechen und noch Restglieder

von der Form $\frac{\varepsilon}{x^p}$ enthalten, wo für die Funktionen $\varepsilon$ von $x$, $\lim \varepsilon = 0$ ist. Führt man die angedeuteten Divisionen und Multiplikationen durch und beachtet, daß

$$\delta_{1\lambda} = \delta_{\lambda 1} = 0, \quad \delta_{11} = 1$$

ist, so erhält man unter dem Integralzeichen:

$$e^{(\alpha_i - \alpha_1)x} x^{\sigma_i} \left( \frac{g_i^{(2)}}{x^2} + \cdots + \frac{g_i^{(p)}}{x^p} + \frac{G_i}{x^p} \right), \tag{5}$$

worin

$$\lim G_i = 0 \quad \text{und sogar} \quad \lim x G_i = 0$$

ist. Um diesen Ausdruck weiter umformen zu können, gehen wir von der Identität

$$d(e^{\beta x} x^{\sigma - \nu}) = \left( \beta + \frac{\sigma - \nu}{x} \right) e^{\beta x} x^{\sigma - \nu} dx$$

aus. Indem wir diese Gleichung von $\infty$ bis $x$ integrieren, erhalten wir

$$\beta \int_\infty^x e^{\beta x} x^{\sigma - \nu} dx + (\sigma - \nu) \int_\infty^x e^{\beta x} x^{\sigma - \nu - 1} dx = e^{\beta x} x^{\sigma - \nu}$$

und können nun mit Hilfe dieser Formel die Integrale

$$\int_\infty^x e^{(\alpha_i - \alpha_1)x} x^{\sigma_i} \frac{g_i^{(\nu)}}{x^\nu} dx \qquad (\nu = 2, 3, \cdots, p)$$

durch das Integral

$$\int_\infty^x e^{(\alpha_i - \alpha_1)x} x^{\sigma_i - p - 1} dx$$

ausdrücken. Das von $\infty$ bis $x$ genommene Integral des Ausdrucks (5) erscheint demnach in der Form:

$$e^{(\alpha_i - \alpha_1)x} x^{\sigma_i} \left( \frac{h_i^{(2)}}{x^2} + \cdots + \frac{h_i^{(p)}}{x^p} \right) + h \int_\infty^x e^{(\alpha_i - \alpha_1)x} x^{\sigma_i - p - 1} dx$$
$$+ \int_\infty^x e^{(\alpha_i - \alpha_1)x} x^{\sigma_i - p} G_i dx,$$

wo $h$ eine Konstante bedeutet, oder, wenn wir

$$\tau_i(x) = G_i x + h$$

setzen, in der Form

$$e^{(\alpha_i - \alpha_1)x} x^{\sigma_i} \left( \frac{h_i^{(2)}}{x^2} + \cdots + \frac{h_i^{(p)}}{x^p} \right) + \int_\infty^x e^{(\alpha_i - \alpha_1)x} x^{\sigma_i - p - 1} \tau_i(x) dx;$$

für die hierin auftretende Funktion $\tau_i(x)$ besitzt

$$\lim \tau_i(x)$$

jedenfalls einen endlichen Wert.

Wir setzen nunmehr:

$$H_i = e^{-(\alpha_i-\alpha_1)x} x^{-\sigma_i+p} \int_{\infty}^{x} e^{(\alpha_i-\alpha_1)\xi} \xi^{\sigma_i-p-1} \tau_i(\xi)\, d\xi,$$

und wollen zuvörderst nachweisen, daß

$$\lim H_i = 0$$

ist. — Führen wir nämlich durch die Gleichung

$$\xi = x + \eta = x\left(1 + \frac{\eta}{x}\right)$$

$\eta$ als neue Integrationsvariable ein, so erhalten wir

$$H_i = -\frac{}{x}\int_0^{\infty} e^{(\alpha_i-\alpha_1)\eta}\left(1+\frac{\eta}{x}\right)^{\sigma_i-p-1} \tau_i(x+\eta)\, d\eta.$$

Nun ist $\eta$ positiv; ferner können wir annehmen, daß $x$ größer ist als Eins; es ist folglich

$$(\sigma_i - p - 1)\log\left(1 + \frac{\eta}{x}\right) < M \log(1+\eta),$$

wo $M$ eine positive Größe bedeutet. Wenn $x$ hinreichend groß ist, so wird der absolute Betrag von $\tau_i(x)$ und a potiori der absolute Betrag von $\tau_i(x+\eta)$ kleiner sein als eine bestimmte endliche Größe $g$; wir haben also

$$|H_i| < \frac{g}{x}\int_0^{\infty} e^{\Re(\alpha_i-\alpha_1)\eta + M\log(1+\eta)}\, d\eta;$$

da das rechter Hand stehende Integral konvergent ist, so folgt daraus in der Tat, daß $\lim H_i = 0$ sein muß.

Das in dem Ausdrucke für $z_{i\varkappa}$ in der Klammer auftretende Integral (S. 206) hat demnach die Form

$$e^{(\alpha_i-\alpha_1)x} x^{\sigma_i}\left(\frac{k_i^{(2)}}{x^2} + \cdots + \frac{k_i^{(p)}}{x^p} + \frac{K_i}{x^p}\right),$$

wo

$$\lim K_i = 0$$

ist, wir finden also schließlich für $z_{i\varkappa}$

$$z_{i\varkappa} = e^{\alpha_i x} x^{\varrho_i}\left(\delta_{i\varkappa} + \frac{c_{i\varkappa}^{(1)}}{x} + \cdots + \frac{c_{i\varkappa}^{(p)}}{x^p} + \frac{C_{i\varkappa}}{x^p}\right),$$

mit

$$\lim C_{i\varkappa} = 0,$$

was zu beweisen war.

Indem wir dieses für das Differentialsystem (A″) erlangte Resultat auf das Differentialsystem (A) bezw. $(\bar{A})$ (S. 199) übertragen, können wir sagen, daß für das letztere Differentialsystem die Existenz von $n$ Integralsystemen $y_{i\varkappa}$ erwiesen ist,

$$(6) \qquad y_{i\varkappa} = e^{\alpha_i x} x^{\varrho_i} \left( \varepsilon_{i\varkappa}^{(0)} + \frac{\varepsilon_{i\varkappa}^{(1)}}{x} + \cdots + \frac{\varepsilon_{i\varkappa}^{(p)}}{x^p} + \frac{E_{i\varkappa}}{x^p} \right), \quad (i, \varkappa = 1, 2, \cdots, n)$$

für die

$$\lim E_{i\varkappa} = 0$$

ist, und wo $p$ eine beliebige, aber feste, positive ganze Zahl bedeutet.

Wir zeigen jetzt vor allem, daß diese $n$ Integralsysteme eine Integralmatrix konstituieren.

Aus der Darstellung (6) folgt, daß die $y_{i\varkappa}$ in der Form

$$(7) \qquad y_{i\varkappa} = \varepsilon_{i\varkappa}^{(0)} x^{\varrho_i} e^{\alpha_i x + \varepsilon_{i\varkappa}}$$

geschrieben werden können, wo

$$\lim \varepsilon_{i\varkappa} = 0$$

ist; wenn einzelne der $\varepsilon_{i\varkappa}^{(0)}$ verschwinden sollten, so bewirkt dies in dem Ausdrucke des betreffenden $y_{i\varkappa}$ einfach eine Änderung des Exponenten $\varrho_i$, auf die folgenden Schlüsse ist dies ohne Einfluß. Übrigens läßt sich durch Anwendung einer linearen Transformation auf die $y_1, \cdots, y_n$ stets bewirken, daß alle $\varepsilon_{i\varkappa}^{(0)}$ von Null verschieden ausfallen. — Nehmen wir nun an, daß eine Relation der Form

$$(8) \qquad C_1 y_{1\varkappa} + C_2 y_{2\varkappa} + \cdots + C_n y_{n\varkappa} = 0 \qquad (\varkappa = 1, 2, \cdots, n)$$

mit konstanten Koeffizienten $C_1, \ldots, C_n$ bestünde; dann folgt, indem wir diese Relationen mit $e^{-\alpha_1 x} x^{-\varrho_1}$ multiplizieren, und mit Rücksicht auf (7)

$$(9) \qquad C_1 \varepsilon_{1\varkappa}^{(0)} e^{\varepsilon_{1\varkappa}} + \sum_{i=2}^{n} C_i \varepsilon_{i\varkappa}^{(0)} e^{(\alpha_i - \alpha_1)x} x^{\varrho_i - \varrho_1} e^{\varepsilon_{i\varkappa}} = 0.$$

Zufolge unserer Voraussetzung ist

$$\Re(\alpha_i - \alpha_1) < 0;$$

wenn also $x$ als positive reale Größe ins Unendliche wächst, so konvergiert $e^{(\alpha_i - \alpha_1)x}$ gegen die Null, und wir erhalten aus (9)

$$C_1 \varepsilon_{1\varkappa}^{(0)} = 0.$$

Die $\varepsilon_{1\varkappa}^{(0)}$ können nicht sämtlich gleich Null sein, da ja (S. 186)

$$\varepsilon_{i\varkappa}^{(0)} = \alpha_{i\varkappa}$$

und die Determinante $|\alpha_{i\varkappa}|$ von Null verschieden ist. Wir finden also

$$C_1 = 0.$$

Multipliziert man jetzt die Relation

$$C_2 y_{2\varkappa} + \cdots + C_n y_{n\varkappa} = 0$$

mit $e^{-\alpha_2 x} x^{-\varrho_2}$ und läßt wieder $x$ ins Unendliche wachsen, so folgt ebenso

$$C_2 = 0$$

usw.; schließlich ergibt sich, daß alle $C_1, \ldots, C_n$ in der Relation (8) gleich Null sein müssen. Die durch die Formeln (6) gegebenen $y_{i\varkappa}$ bilden also in der Tat eine Integralmatrix, und es ist folglich jedes Lösungssystem $y_1, \ldots, y_n$ unseres Differentialsystems in der Form

$$(10) \qquad y_\varkappa = c_1 y_{1\varkappa} + c_2 y_{2\varkappa} + \cdots + c_n y_{n\varkappa} \qquad (\varkappa = 1, 2, \cdots, n)$$

mit konstanten $c_1, \ldots, c_n$ darstellbar.

Wir können hieraus sogleich einen Schluß ziehen, der sich auf das Verhalten eines beliebigen Lösungssystems bei Annäherung von $x$ an den unendlich fernen Punkt bezieht. Wenn nämlich in der Darstellung (10) des Lösungssystems $y_1, \ldots, y_n$ etwa $c_1, \ldots, c_{i-1}$ gleich Null, aber

$$c_i \neq 0$$

ist, so haben wir nach (6)

$$y_\varkappa = c_i e^{\alpha_i x} x^{\varrho_i} \left( \varepsilon_{i\varkappa}^{(0)} + \cdots + \frac{\varepsilon_{i\varkappa}^{(p)}}{x^p} + \frac{E_{i\varkappa}}{x^p} \right) + \cdots$$
$$+ c_n e^{\alpha_n x} x^{\varrho_n} \left( \varepsilon_{n\varkappa}^{(0)} + \cdots + \frac{\varepsilon_{n\varkappa}^{(p)}}{x^p} + \frac{E_{n\varkappa}}{x^p} \right).$$

Setzen wir

$$\overline{E}_{i\varkappa} = E_{i\varkappa} + \sum_{\lambda = i+1}^{n} \frac{c_\lambda}{c_1} e^{(\alpha_\lambda - \alpha_i)x} x^{\varrho_\lambda - \varrho_i + p} \left( \varepsilon_{\lambda\varkappa}^{(0)} + \cdots + \frac{\varepsilon_{\lambda\varkappa}^{(p)}}{x^p} + \frac{E_{\lambda\varkappa}}{x^p} \right),$$

so folgt mit Rücksicht darauf, daß

$$\Re(\alpha_\lambda - \alpha_i) < 0 \qquad (\lambda = i+1, \cdots, n)$$

ist, daß

$$\lim \overline{E}_{i\varkappa} = 0$$

sein muß, und wir finden für $y_\varkappa$ die Darstellung

(11) $$y_\varkappa = c_i e^{\alpha_i x} x^{\varrho_i}\left(\varepsilon_{i\varkappa}^{(0)} + \cdots + \frac{\varepsilon_{i\varkappa}^{(p)}}{x^p} + \frac{\overline{E}_{i\varkappa}}{x^p}\right).$$
$$(\varkappa = 1, 2, \cdots, n)$$

Jetzt können wir auch ohne Schwierigkeit den Nachweis dafür erbringen, daß die durch die Formeln (6) gegebenen $y_{i\varkappa}$ durch die zu Anfang der vorigen Vorlesung aufgestellten formalen Reihen (17) (S. 185) asymptotisch dargestellt werden. — Die durch die Formeln (6) gegebenen $y_{i\varkappa}$ gehören zu der festen ganzen Zahl $p$. Es sei nun $p'$ eine ganze Zahl, die größer ist als $p$, und es mögen zu $p'$ die Elemente einer Integralmatrix

(12) $$y'_{i\varkappa} = e^{\alpha_i x} x^{\varrho_i}\left(\varepsilon_{i\varkappa}^{(0)} + \cdots + \frac{\varepsilon_{i\varkappa}^{(p')}}{x^{p'}} + \frac{E'_{i\varkappa}}{x^{p'}}\right) \qquad (i, \varkappa = 1, 2, \cdots, n)$$

in derselben Weise gebildet werden, wie die $y_{i\varkappa}$ für die ganze Zahl $p$ gebildet worden sind; natürlich ist in (12) auch

$$\lim E'_{i\varkappa} = 0.$$

Denken wir uns dann die $y_{i\varkappa}$ durch die $y'_{i\varkappa}$ ausgedrückt, so ergibt sich nach dem Vorhergehenden eine Darstellung von der Form

$$y_{i\varkappa} = y'_{i\varkappa} + c_{i+1} y'_{i+1,\varkappa} + \cdots + c_n y'_{n\varkappa}, \qquad (\varkappa = 1, 2, \cdots, n)$$

woraus

(13) $$y_{i\varkappa} = e^{\alpha_i x} x^{\varrho_i}\left(\varepsilon_{i\varkappa}^{(0)} + \cdots + \frac{\varepsilon_{i\varkappa}^{(p')}}{x^{p'}} + \frac{\overline{E}'_{i\varkappa}}{x^{p'}}\right)$$

mit

$$\lim \overline{E}'_{i\varkappa} = 0$$

hervorgeht. Da jetzt die Darstellung (13) für jedes $p' > p$ gültig ist, so ist damit im Sinne der in der vorigen Vorlesung aufgestellten Definition in der Tat nachgewiesen, daß die asymptotische Darstellung

(14) $$y_{i\varkappa} \backsim e^{\alpha_i x} x^{\varrho_i}\left(\varepsilon_{i\varkappa}^{(0)} + \frac{\varepsilon_{i\varkappa}^{(1)}}{x} + \cdots \text{ in inf.}\right)$$

besteht. Hieraus fließt in Verbindung mit den Gleichungen (11) das folgende Theorem:

Wenn für die Wurzeln $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ der charakteristischen Gleichung (2) der vorigen Vorlesung die Ungleichungen

$$\Re(\alpha_1) > \Re(\alpha_2) > \cdots > \Re(\alpha_n)$$

bestehen, so existiert eine Integralmatrix $y_{i\varkappa}$, für die, wenn

$x$ **als reale positive Größe dem Unendlichen zustrebt, die asymptotischen Darstellungen**

$$y_{i\varkappa} \backsim e^{a_i x} x^{\varrho_i}\left(\varepsilon_{i\varkappa}^{(0)} + \frac{\varepsilon_{i\varkappa}^{(1)}}{x} + \frac{\varepsilon_{i\varkappa}^{(2)}}{x^2} + \cdots \text{ in inf.}\right)$$

**bestehen. Ein Integralsystem $y_1, \cdots, y_n$, das durch die Integralmatrix $y_{i\varkappa}$ in der Form**

$$y_\varkappa = c_1 y_{1\varkappa} + \cdots + c_n y_{n\varkappa} \quad (c_i \neq 0)$$

**ausgedrückt werden kann, besitzt die asymptotische Darstellung**

$$y_\varkappa \backsim c_i e^{a_i x} x^{\varrho_i}\left(\varepsilon_{i\varkappa}^{(0)} + \frac{\varepsilon_{i\varkappa}^{(1)}}{x} + \frac{\varepsilon_{i\varkappa}^{(2)}}{x^2} + \cdots \text{ in inf.}\right).$$

Wenn wir die asymptotischen Reihen (14) in die rechten Seiten unseres Differentialsystems (A) einsetzen, so erhalten wir zufolge der über das Rechnen mit solchen Reihen aufgestellten Sätze asymptotische Darstellungen für die Derivierten der $y_{i\varkappa}$. Da die Reihen (14) jedoch dem Differentialsysteme formell Genüge leisten, so folgt, daß die Reihen, die die Derivierten der $y_{i\varkappa}$ asymptotisch darstellen, durch formelle (gliedweise) Differentiation aus den Reihen (14) hervorgehen. Wir können also sagen, **daß die einem linearen Differentialsysteme genügenden asymptotischen Reihen gliedweise differentiiert werden dürfen.**

Wir wollen jetzt die unabhängige Variable $x$ mit einem von Null verschiedenen Argumente $\theta$ ins Unendliche rücken lassen; es sei

$$x = \xi \cdot e^{\theta\sqrt{-1}}, \qquad \xi = |x|.$$

Wenn wir in unser Differentialsystem (A)

$$\frac{dy_\varkappa}{dx} = \sum_{\lambda=1}^{n} y_\lambda\left(a_{\lambda\varkappa}^{(0)} + \frac{a_{\lambda\varkappa}^{(1)}}{x} + \frac{a_{\lambda\varkappa}^{(2)}}{x^2} + \cdots \text{ in inf.}\right) \qquad (\varkappa = 1, 2, \cdots, n)$$

$\xi$ als neue unabhängige Variable einführen, so erhalten wir

$$(15) \qquad \frac{dy_\varkappa}{d\xi} = \sum_{\lambda=1}^{n} y_\lambda\left(a_{\lambda\varkappa}^{(0)} e^{\theta\sqrt{-1}} + \frac{a_{\lambda\varkappa}^{(1)} e^{\theta\sqrt{-1}}}{\xi e^{\theta\sqrt{-1}}} + \frac{a_{\lambda\varkappa}^{(2)} e^{\theta\sqrt{-1}}}{\xi^2 e^{2\theta\sqrt{-1}}} + \cdots \text{ in inf.}\right).$$

In diesem Differentialsysteme vom Range Eins geht die unabhängige Variable $\xi$ wieder als reale positive Größe nach dem Unendlichen;

wir können folglich das eben ausgesprochene Theorem zur Anwendung bringen. Die charakteristische Gleichung lautet jetzt:

$$|a_{\lambda\varkappa}^{(0)} e^{\theta\sqrt{-1}} - \delta_{\lambda\varkappa}\alpha| = 0$$

oder

$$|a_{\lambda\varkappa}^{(0)} - \delta_{\lambda\varkappa}\alpha e^{-\theta\sqrt{-1}}| = 0;$$

ihre Wurzeln sind also

(16) $$\alpha_1 e^{\theta\sqrt{-1}}, \ldots, \alpha_n e^{\theta\sqrt{-1}}.$$

Wir denken uns die $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ jetzt so geordnet, daß die realen Teile der Größen (16) eine abnehmende Folge bilden; sei diese Anordnung

$$\alpha_{\theta_1}, \ldots, \alpha_{\theta_n}.$$

Dann haben wir also wieder dieselben semikonvergenten Reihen

$$e^{\alpha_i x} x^{\varrho_i}\left(\varepsilon_{i\varkappa}^{(0)} + \frac{\varepsilon_{i\varkappa}^{(1)}}{x} + \cdots \text{ in inf.}\right)$$

wie vorhin, und diese Reihen stellen wieder die Elemente einer Integralmatrix $y'_{i\varkappa}$ asymptotisch dar, wenn $x$ mit dem Argumente $\theta$ ins Unendliche rückt. Während jedoch das allgemeine Lösungssystem unseres Differentialsystems,

$$y_\varkappa = c_1 y_{1\varkappa} + \cdots + c_n y_{n\varkappa}, \qquad (\varkappa = 1, 2, \cdots, n)$$

wo $c_1, \ldots, c_n$ willkürliche Konstanten bedeuten, also $c_1 \neq 0$ vorausgesetzt werden kann, für reale positive $x$ durch die Reihen

$$c_1 e^{\alpha_1 x} x^{\varrho_1}\left(\varepsilon_{1\varkappa}^{(0)} + \frac{\varepsilon_{1\varkappa}^{(1)}}{x} + \cdots \text{ in inf.}\right)$$

dargestellt wird, lautet die asymptotische Darstellung dieses allgemeinen Integralsystems, wenn

$$y_\varkappa = c_1' y'_{\theta_1\varkappa} + \cdots + c_n' y'_{\theta_n\varkappa}$$

ist, für mit dem Argumente $\theta$ behaftete große Werte von $x$

$$c_1' e^{\alpha_{\theta_1} x} x^{\varrho_{\theta_1}}\left(\varepsilon_{\theta_1\varkappa}^{(0)} + \frac{\varepsilon_{\theta_1\varkappa}^{(1)}}{x} + \cdots \text{ in inf.}\right).$$

Wir sind hiernach imstande, die asymptotische Darstellung eines beliebigen Integralsystems anzugeben, wenn $x$ mit einem bestimmten Argumente $\theta$ dem Unendlichen zustrebt. Eine Ausnahme bilden diejenigen Argumente $\theta$, für die die realen Teile der Größen (16) nicht sämtlich voneinander verschieden sind. Auf eine Diskussion dieser Ausnahmefälle gehen wir hier nicht ein, ebensowenig wie auf eine Diskussion der Fälle, wo die charakteristische Gleichung (2) der vorigen

Vorlesung mehrfache Wurzeln besitzt.*) Wir bemerken nur noch, daß die gefundenen asymptotischen Darstellungen nicht nur dann gültig sind, wenn die Annäherung von $x$ an den unendlich fernen Punkt mit einem bestimmten Argumente erfolgt, sondern daß ihre Gültigkeit sich im allgemeinen auf einen ganzen Sektor der $x$-Ebene ausdehnen läßt. Hierauf bezügliche Untersuchungen, die auf Grund der asymptotischen Darstellungen zu Aufschlüssen über das Verhalten der Integrale in der ganzen Umgebung der Unbestimmtheitsstelle $x = \infty$ führen, haben Kneser und Horn angestellt.**)

*) Vgl. in bezug auf diese Fälle Poincaré, Acta Mathem. Bd. 8, S. 295; Horn, Crelles Journal, Bd. 118, S. 257.

**) Siehe Kneser, Crelles Journal Bde. 116, S. 178; 117, S. 72; 120, S. 267; Mathem. Annalen Bd. 49, S. 383; Horn, Mathem. Annalen Bde. 49, S. 453; 50, S. 525; vergl. auch A. Hamburger, Inauguraldissertation, Berlin 1905.

---

# Dreizehnte Vorlesung.

**Differentialsysteme mit rationalen Koeffizienten. Der Fuchssche Typus. Differentialsysteme $n$-ter Ordnung und schlechthin kanonische Differentialsysteme. Bedeutung der Fundamentalsubstitutionen für das Integrationsproblem. Kogrediens. Artbegriff. Klassenbegriff. Das Riemannsche Problem. Das Fundamentallemma. Historisches.**

Wir wollen uns jetzt mit der Untersuchung linearer Differentialsysteme beschäftigen, deren Koeffizienten rationale Funktionen der unabhängigen Variabeln sind. Es seien also in

$$\text{(A)} \qquad \frac{dy_\varkappa}{dx} = \sum_{\lambda=1}^{n} y_\lambda a_{\lambda\varkappa} \qquad (\varkappa = 1, 2, \ldots, n)$$

die $a_{i\varkappa}$ rationale Funktionen von $x$, ferner sei $x_0$ ein regulärer Punkt, und

$$\text{(1)} \qquad (y_{i\varkappa}) = \overset{x}{\underset{x_0}{\widehat{\int}}} (a_{i\varkappa}dx + \delta_{i\varkappa}).$$

Wenn wir über das analytische Verhalten der Funktionen $y_{i\varkappa}$ in der ganzen Ebene der komplexen Variabeln $x$ Aufschluß erhalten wollen, so müssen wir zunächst die singulären Stellen dieser Funktionen aufzufinden suchen. Bezeichnen wir mit $a_1, \ldots, a_\tau$ diejenigen Punkte, in denen irgendeine der rationalen Funktionen $a_{i\varkappa}$ einen Pol besitzt, so wissen wir, daß die im Endlichen gelegenen Singularitäten der $y_{i\varkappa}$ nur unter diesen Punkten zu suchen sind. Es wird sich dann in erster Linie darum handeln, festzustellen, von welcher Art das Verhalten der $y_{i\varkappa}$ in der Umgebung einer jeden einzelnen der Stellen $a_1, \ldots, a_\tau$ ist. Wir werden, allgemein genommen, die folgenden Möglichkeiten ins Auge zu fassen haben.

1. Ein Punkt $a_\nu$ kann so beschaffen sein, daß die $y_{i\varkappa}$ bei einer Umkreisung dieses Punktes eine von $(\delta_{i\varkappa})$ verschiedene Substitution $(c_{i\varkappa}^{(\nu)})$ erfahren; ein solcher Punkt ist dann ein Verzweigungspunkt der Integrale.

2. Die $y_{i\varkappa}$ können in der Umgebung von $x = a_\nu$ zwar eindeutig sein, aber in $a_\nu$ einen Punkt der Unbestimmtheit besitzen.

3. Der Punkt $a_\nu$ kann ein Pol der $y_{i\varkappa}$ sein, d. h. die $y_{i\varkappa}$ werden in $a_\nu$ wie rationale Funktionen unendlich.

4. Es kann $a_\nu$ ein außerwesentlich singulärer Punkt sein, d. h. die $y_{i\varkappa}$ sind in der Umgebung von $a_\nu$ holomorph, aber die Determinante $|y_{i\varkappa}|$ verschwindet in $a_\nu$ von endlicher ganzzahliger Ordnung.

In den Fällen 3. und 4. ist der betreffende Punkt sicher kein Punkt der Unbestimmtheit; wir können also auf Grund der in der neunten und zehnten Vorlesung entwickelten Methoden durch rein algebraische Prozesse entscheiden, ob einer der Punkte $a_1, \ldots, a_\tau$ und, wie wir gleich hinzufügen können, der Punkt $x = \infty$ in die Kategorie 3. oder 4. gehört. — Dagegen läßt es sich im allgemeinen durch algebraische Prozesse nicht feststellen, ob einer der Punkte $a_1, \ldots, a_\tau, \infty$ in die Kategorie 2. gehört, und für die Zugehörigkeit eines dieser Punkte zur Kategorie 1. haben wir nur in dem Falle algebraische Kriterien, wenn dieser Punkt kein Punkt der Unbestimmtheit für die Integrale ist. Ob dieser Fall eintritt, läßt sich, wie wir wissen, aus dem analytischen Verhalten der Koeffizienten $a_{i\varkappa}$ in der Umgebung dieses Punktes entscheiden.

Wir werden hiernach, allgemein genommen, dann und nur dann imstande sein, durch algebraische Prozesse über die Zugehörigkeit der singulären Punkte $a_1, \ldots, a_\tau, \infty$ zu einer der aufgestellten vier Kategorien eine Entscheidung zu treffen, wenn unser Differentialsystem so beschaffen ist, daß seine Lösungen überhaupt keinen Punkt der Unbestimmtheit besitzen.

Wir sagen dann, daß das Differentialsystem dem Fuchsschen Typus angehört. Für solche Differentialsysteme ist das Auftreten von singulären Punkten der zweiten Kategorie ausgeschlossen; wir sind demnach in der Lage, zunächst aus der Reihe der Punkte $a_1, \ldots, a_\tau, \infty$ die Pole der Integrale und die außerwesentlich singulären Stellen auszuscheiden, und behalten dann in den übrigbleibenden die wirklichen Verzweigungspunkte.

Wenn wir auf diese Weise für die Differentialsysteme des Fuchsschen Typus die in erster Linie zu lösende Aufgabe erledigt haben, so können wir aber gleich noch einen Schritt weiter gehen. Es möge sich, und zwar vorerst für ein beliebiges Differentialsystem mit rationalen Koeffizienten, herausgestellt haben, daß die Punkte $a_1, \ldots, a_\sigma, \infty$ diejenigen sind, in deren Umgebung sich die Integrale verzweigen. Wir denken uns dann, den in der fünften Vorlesung eingeführten Festsetzungen und Bezeichnungen gemäß, diese Punkte aus der Ebene aus-

geschlossen und erhalten auf diese Weise einen $(\sigma + 1)$-fach zusammenhängenden Bereich $T$, innerhalb dessen die Integrale den Charakter rationaler Funktionen haben, oder wie man sagt, meromorph sind. Legen wir dann von $a_1, \ldots, a_\sigma$ nach dem Unendlichen hin die Schnitte $l_1, \ldots, l_\sigma$, so ist in dem so entstehenden einfach zusammenhängenden Bereiche $\overline{T}$ ein Zweigsystem

(2) $$(\overline{y}_{i\varkappa}) = (\overline{T})\int_{x_0}^{x}(a_{i\varkappa}\,dx + \delta_{i\varkappa})$$

der Integralmatrix $(y_{i\varkappa})$ eindeutig determiniert. Es handelt sich dann um die Bestimmung der Fundamentalsubstitutionen, d. h. der konstanten Matrizen

(3) $$(\mathsf{A}_{i\varkappa}^{(\nu)}) = s_\nu\int_{x_0}^{x_0}(a_{i\varkappa}\,dx + \delta_{i\varkappa}), \qquad (\nu = 1, 2, \cdots, \sigma)$$

die das Zweigsystem $(\overline{y}_{i\varkappa})$ erfährt, wenn die unabhängige Variable $x$ die Schnitte $l_\nu$ einmal in der Richtung vom positiven Ufer nach dem negativen Ufer hin überschreitet; $s_\nu$ bedeutet dabei (vergl. die fünfte Vorlesung S. 81, wo die Substitutionen (3) mit $(c_{i\varkappa}^{(\nu)})$ bezeichnet wurden) einen von $x_0$ ausgehenden geschlossenen Weg, der den Schnitt $l_\nu$ einmal in der angegebenen Weise passiert, d. h. wie wir sagen wollen, eine von $x_0$ aus um $a_\nu$ herumgelegte einfache Schleife.

Für ein System des Fuchsschen Typus, wo also die Punkte

$$a_1, \ldots, a_\sigma, \infty$$

keine Unbestimmtheitsstellen der Integrale sind, können wir nun durch algebraische Prozesse zu jedem dieser Punkte die zugehörige kanonische Integralmatrix

(4) $$(\eta_{i\varkappa}^{(\nu)}) = (\mathfrak{y}_{i\varkappa}^{(\nu)})(\varphi_{i\varkappa}^{(\nu)}) \qquad (\nu = 1, 2, \cdots, \sigma + 1)\ ^{*})$$

herstellen, wo $(\mathfrak{y}_{i\varkappa}^{(\nu)})$ eine Cauchysche Matrix, $(\varphi_{i\varkappa}^{(\nu)})$ eine in der Umgebung von $x = a_\nu$ holomorphe Matrix bedeutet. Die Substitution, die $(\mathfrak{y}_{i\varkappa}^{(\nu)})$ und folglich auch $(\eta_{i\varkappa}^{(\nu)})$ erfährt, wenn $x$ den Schnitt $l_\nu$ überschreitet, bezw. für $\nu = \sigma + 1$, wenn $x$ einen Umlauf im positiven Sinne um den Punkt $x = \infty$ vollzieht, können wir dann unmittelbar angeben, wir bezeichnen sie mit $(\omega_{i\varkappa}^{(\nu)})$. — Denken wir uns die Integralmatrix $(\overline{y}_{i\varkappa})$ durch die Matrizen $(\eta_{i\varkappa}^{(\nu)})$ dargestellt, so ist

*) Wir bezeichnen im folgenden den unendlich fernen Punkt oft durch $a_{\sigma+1}$ und demgemäß die zu diesem Punkte gehörige kanonische Integralmatrix mit $(\eta_{i\varkappa}^{(\sigma+1)})$.

(5) $$(\bar{y}_{ix}) = (c_{ix}^{(\nu)})(\eta_{ix}^{(\nu)}), \qquad (\nu = 1, 2, \cdots, \sigma + 1)$$

wo die $(c_{ix}^{(\nu)})$ konstante Matrizen mit nicht verschwindender Determinante bedeuten; es ist dann

(6) $$(\mathsf{A}_{ix}^{(\nu)}) = (c_{ix}^{(\nu)})(\omega_{ix}^{(\nu)})(c_{ix}^{(\nu)})^{-1} \qquad (\nu = 1, 2, \cdots, \sigma)$$

und, wenn wir mit $(\mathsf{A}_{ix}^{(\sigma+1)})$ die Substitution bezeichnen, die $(\bar{y}_{ix})$ erfährt, wenn $x$ den unendlich fernen Punkt im positiven Sinne umkreist,

(6a) $$(\mathsf{A}_{ix}^{(\sigma+1)}) = (c_{ix}^{(\sigma+1)})(\omega_{ix}^{(\sigma+1)})(c_{ix}^{(\sigma+1)})^{-1}.$$

Nun entspricht aber im Sinne der in der fünften Vorlesung getroffenen Festsetzungen (vergl. die Figur 3, S. 68) eine Umkreisung des Punktes $x = \infty$ im positiven Sinne dem Überschreiten der Schnitte $l_1, l_2, \ldots, l_\sigma$ in der Richtung vom negativen nach dem positiven Ufer hin in der angegebenen Reihenfolge; es ist folglich

$$(\mathsf{A}_{ix}^{(\sigma+1)}) = (\mathsf{A}_{ix}^{(1)})^{-1} \cdots (\mathsf{A}_{ix}^{(\sigma)})^{-1} = ((\mathsf{A}_{ix}^{(\sigma)}) \cdots (\mathsf{A}_{ix}^{(1)}))^{-1}.$$

Wir sind demnach für die Systeme des Fuchsschen Typus in der Lage, durch elementare Prozesse die kanonischen Formen der Fundamentalsubstitutionen

$$(\mathsf{A}_{ix}^{(1)}), \ldots, (\mathsf{A}_{ix}^{(\sigma)}),$$

nämlich die $(\omega_{ix}^{(\nu)})$ $(\nu = 1, 2, \cdots, \sigma)$, und auch die kanonische Form der Substitution

$$(\mathsf{A}_{ix}^{(1)})^{-1} \cdots (\mathsf{A}_{ix}^{(\sigma)})^{-1} = (\mathsf{A}_{ix}^{(\sigma+1)}),$$

nämlich $(\omega_{ix}^{(\sigma+1)})$, anzugeben. — Damit ist freilich das Problem der Auffindung der Fundamentalsubstitutionen auch für die Systeme des Fuchsschen Typus noch nicht gelöst, wir haben aber immerhin einen wesentlichen Schritt zur Lösung getan, der es gerechtfertigt erscheinen läßt, daß wir uns im folgenden vorwiegend mit den Systemen dieses Typus, als den am leichtesten zugänglichen, beschäftigen wollen. Diese Beschränkung wird sich späterhin noch weiter begründen lassen; wir werden auch in der sechzehnten Vorlesung einen Satz aufstellen, der die Frage der Bestimmung der Fundamentalsubstitutionen für ein beliebiges Differentialsystem mit rationalen Koeffizienten in gewissem Sinne auf die analoge Frage für ein System des Fuchsschen Typus zurückzuführen gestattet. — Daß wir die Aufgabe der Bestimmung der Fundamentalsubstitutionen in der Weise in den Vordergrund rücken, bedarf jedoch vielleicht selbst noch einiger Rechtfertigung.

Wir erinnern zu dem Ende an die Methoden, die Riemann für die analytische Untersuchung der Funktionen einer komplexen Variabeln geschaffen und insbesondere für die algebraischen Funktionen und ihre Integrale (Abelsche Integrale) ausgebildet hat. Es handelt sich bei

diesen Methoden im wesentlichen darum, eine Funktion durch ihr qualitatives Verhalten in der Umgebung ihrer singulären Stellen zu definieren. Für eine algebraische Funktion wird die Art, wie sich ihre Zweige bei Umkreisung der Verzweigungspunkte ineinander fortsetzen, durch die sogenannte Riemannsche Fläche gegeben; diese Fläche dient auch zur Bestimmung der zugehörigen Abelschen Integrale, indem nämlich, wenn der die variable Größe repräsentierende Punkt der Riemannschen Fläche geschlossene Wege beschreibt, ein solches Integral sich um gewisse Konstanten (Periodizitätsmoduln) vermehrt, die ihrerseits jenes Integral in seiner analytischen Eigenart bestimmen. — Riemann geht nun geradezu von einer irgendwie gegebenen Riemannschen Fläche aus und untersucht — losgelöst von jedem Zusammenhange mit einer bestimmten algebraischen Gleichung — einerseits die auf dieser Fläche eindeutigen Funktionen ohne Unbestimmtheitsstellen, andererseits diejenigen Funktionen, die bei geschlossenen Wegen auf der Fläche sich um gewisse Periodizitätsmoduln vermehren. Die ersteren erweisen sich als algebraische Funktionen, die letzteren als Abelsche Integrale. Diese Auffassung leitet Riemann unmittelbar dazu, die Gesamtheit der zu einer bestimmten Riemannschen Fläche gehörigen, d. h. auf ihr eindeutigen Funktionen ins Auge zu fassen, er bezeichnet diese Gesamtheit gleichverzweigter algebraischer Funktionen als eine Klasse. — Bei einem linearen Differentialsysteme (A) mit rationalen Koeffizienten*) haben wir, wenn wir die Verzweigungspunkte $a_1, \ldots, a_\sigma, \infty$ ausgesondert haben, in der Fläche $T$ das Analogon der Riemannschen Fläche; die Integralmatrix $(y_{i\varkappa})$ wird, wenn die Variable $x$ geschlossene Wege in $T$ beschreibt, von links her mit konstanten Matrizen $(c_{i\varkappa})$ komponiert; diese werden als den Periodizitätsmoduln analog aufzufassen sein, wenn wir die Integralmatrix als Analogon der Abelschen Integrale (oder auch speziell der Integrale rationaler Funktionen) betrachten. Die letztere Auffassung entspricht vollständig dem in diesen Vorlesungen gewählten Ausgangspunkte, wonach die Integralmatrix eines linearen Differentialsystems für $n$ Unbekannte als die Verallgemeinerung zwar nicht der gewöhnlichen Quadratur selbst, wohl aber des Ausdrucks

$$e^{\int a\,dx}$$

betrachtet werden sollte, auf den sie sich ja auch für $n = 1$ wirklich reduziert. Wir werden also, im Sinne der Methoden Riemanns, zur

*) Man könnte natürlich auch gleich algebraische Koeffizienten voraussetzen; wir beschränken uns aber in diesen Vorlesungen auf den einfacheren Fall rationaler Koeffizienten.

analytischen Charakterisierung unserer Integralmatrix $(y_{i\varkappa})$ davon auszugehen haben, daß diese eine Matrix von $n^2$ Funktionen ist, die die alleinigen Verzweigungspunkte $a_1, \ldots a_\sigma, \infty$ besitzen, also in der zerschnittenen Fläche $\bar{T}$ eindeutig sind, und daß diese Matrix die Substitutionen $(\mathsf{A}_{i\varkappa}^{(\nu)})$ erleidet, wenn die Variable $x$ die Schnitte

$$l_\nu \qquad (\nu = 1, 2, \cdots, \sigma)$$

überschreitet. — Darin liegt die Bedeutung der Fundamentalsubstitutionen, und wir können jetzt auch sofort an die Frage herantreten, inwieweit die angegebenen Daten, d. h. also die Verzweigungspunkte $a_1, \ldots, a_\sigma, \infty$ und die zu dem ein für allemal fixierten Schnittsysteme $l_\nu$ gehörigen Fundamentalsubstitutionen $(\mathsf{A}_{i\varkappa}^{(\nu)})$, die Funktionalmatrix $(y_{i\varkappa})$ auch wirklich bestimmen.

Denken wir uns gleich zwei Funktionalmatrizen $(y_{i\varkappa})$ und $(z_{i\varkappa})$, denen diese Daten gemeinsam sind, und für die wir natürlich voraussetzen müssen, daß die Determinanten $|y_{i\varkappa}|$, $|z_{i\varkappa}|$ nicht identisch verschwinden. Bilden wir dann die Matrix

$$(y_{i\varkappa})^{-1}(z_{i\varkappa}) = (r_{i\varkappa}),$$

so erfährt diese Matrix beim Überschreiten der Schnitte $l_1, \ldots l_\sigma$ keine Änderung, die $r_{i\varkappa}$ sind folglich schlechthin eindeutige Funktionen von $x$. Wir sagen von den beiden Matrizen $(y_{i\varkappa})$, $(z_{i\varkappa})$, daß sie **kogredient** seien*); kogrediente Matrizen stehen also in der Beziehung

$$(z_{i\varkappa}) = (y_{i\varkappa})(r_{i\varkappa}). \tag{7}$$

Umgekehrt ist aber evident, daß, wenn wir in der Gleichung (7) die $r_{i\varkappa}$ als irgendwelche eindeutige Funktionen wählen, deren Determinante nicht verschwindet, die durch diese Gleichung definierte Funktionalmatrix $(z_{i\varkappa})$ mit $(y_{i\varkappa})$ kogredient sein wird. Unsere Daten bestimmen also, wie wir sagen können, ein System kogredienter Funktionalmatrizen.

Denken wir uns nun die Matrix der Derivierten der $y_{i\varkappa}$ gebildet, dann ist offenbar

$$(y_{i\varkappa})^{-1}\left(\frac{dy_{i\varkappa}}{dx}\right) = (a_{i\varkappa}) \tag{8}$$

ebenfalls eine Matrix eindeutiger Funktionen von $x$; die Gleichung (8) besagt aber nichts anderes, als daß

$$D_x(y_{i\varkappa}) = (a_{i\varkappa})$$

ist, d. h. daß die $(y_{i\varkappa})$ eine Integralmatrix des linearen Differentialsystems

---

*) Vergl. den Begriff der Kogredienz in der Umgebung eines Punktes $x = a$, S. 139; die Bezeichnung ist der Invariantentheorie entlehnt.

$$\text{(A)} \qquad \frac{dy_\varkappa}{dx} = \sum_{\lambda=1}^{n} y_\lambda a_{\lambda\varkappa} \qquad (\varkappa = 1, 2, \cdots, n)$$

mit eindeutigen Koeffizienten konstituieren. Die kogrediente Matrix $(z_{i\varkappa})$ bildet dann ebenso eine Integralmatrix des Differentialsystems

$$\text{(B)} \qquad \frac{dz_\varkappa}{dx} = \sum_{\lambda=1}^{n} z_\lambda b_{\lambda\varkappa},$$

wo die eindeutigen Funktionen $b_{i\varkappa}$ nach der Derivationsregel (IV) der zweiten Vorlesung durch die Gleichung

$$\text{(9)} \qquad (b_{i\varkappa}) = (r_{i\varkappa})^{-1}(a_{i\varkappa})(r_{i\varkappa}) + D_x(r_{i\varkappa})$$

gegeben sind. Wir werden die Differentialsysteme (A) und (B) selbst als kogredient bezeichnen. — Diese Betrachtungen erinnern an die zu Beginn der siebenten Vorlesung angestellten Untersuchungen über Differentialsysteme usw., die zu derselben Art gehören. In der Tat können wir, wenn als Rationalitätsbereich der Bereich aller eindeutigen Funktionen angesehen wird, die Kogredienz als Zugehörigkeit zu derselben Art in bezug auf diesen Bereich auffassen. — Dieser Bereich ist aber nicht derjenige, mit dem wir es im Sinne der zu Beginn dieser Vorlesung getroffenen Annahme, wonach die Koeffizienten unseres Differentialsystems rationale Funktionen von $x$ sein sollten, zu tun haben wollen; wir werden vielmehr, um im Bereiche der rationalen Funktionen zu verbleiben, den Funktionalmatrizen, die wir betrachten, noch die Bedingung auferlegen, daß ihre Elemente keinen Punkt der Unbestimmtheit besitzen sollen, wie es für die Integralmatrix eines Differentialsystems des Fuchsschen Typus tatsächlich der Fall ist.

Sehen wir zu, was wir unter dieser Voraussetzung über die Funktionen $r_{i\varkappa}, a_{i\varkappa}, b_{i\varkappa}$ aussagen können! — Wenn die $y_{i\varkappa}$ keinen Punkt der Unbestimmtheit besitzen, so gilt das gleiche auch für die Determinante $|y_{i\varkappa}|$, folglich auch für ihren reziproken Wert und folglich auch für die Elemente der inversen Matrix $(y_{i\varkappa})^{-1}$. Daraus folgt weiter, wenn $(z_{i\varkappa})$ ebenfalls nur Funktionen enthält, die keinen Punkt der Unbestimmtheit aufweisen, daß das gleiche auch für die eindeutigen Funktionen $r_{i\varkappa}$ gilt. Eindeutige Funktionen ohne Punkt der Unbestimmtheit sind aber notwendig rationale Funktionen von $x$. Da ferner auch die Derivierten der $y_{i\varkappa}, z_{i\varkappa}$ keinen Punkt der Unbestimmtheit besitzen können, so gilt das gleiche auch für die eindeutigen Funktionen $a_{i\varkappa}, b_{i\varkappa}$; d. h. unter der jetzt festgehaltenen Voraussetzung sind die $a_{i\varkappa}, b_{i\varkappa}, r_{i\varkappa}$ rationale Funktionen von $x$.

Fixieren wir also als Rationalitätsbereich den Bereich aller rationalen Funktionen von $x$, so können wir sagen, daß die kogredienten Funktionalmatrizen $(y_{i\varkappa})$, $(z_{i\varkappa})$, deren Elemente keinen Punkt der Unbestimmtheit besitzen, in bezug auf diesen Bereich zu derselben Art gehören, und daß jede solche Funktionalmatrix die Integralmatrix eines linearen Differentialsystems mit rationalen Koeffizienten des Fuchsschen Typus konstituiert.

Wir sehen hier aufs neue die Bedeutung des Fuchsschen Typus in schärfster Weise hervortreten, und es eröffnet sich uns zugleich eine Perspektive auf diejenigen Probleme, die sich an die Differentialsysteme dieses Typus anknüpfen lassen. Wir fassen vorerst das für uns wesentliche Ergebnis der bisher angestellten Erwägungen wie folgt zusammen.

Bedeutet (A) ein Differentialsystem mit rationalen Koeffizienten des Fuchsschen Typus, sind $a_1, \ldots, a_\sigma, \infty$ die alleinigen Verzweigungspunkte der Lösungen und $(A_{i\varkappa}^{(\nu)})$ $(\nu = 1, 2, \cdots, \sigma)$ die zu einem bestimmten Schnittsysteme $l_1, \ldots, l_\sigma$ gehörigen Fundamentalsubstitutionen der Integralmatrix

$$(\bar{y}_{i\varkappa}) = (\bar{T}) \overset{x}{\widehat{\int_{x_0}}} (a_{i\varkappa} dx + \delta_{i\varkappa}),$$

dann lassen sich die mit $(y_{i\varkappa})$ zu derselben Art gehörigen Funktionalmatrizen und die mit (A) zu derselben Art gehörigen Differentialsysteme dadurch charakterisieren, daß man den ersteren die Bedingungen auferlegt, mit $(y_{i\varkappa})$ gleichverzweigt, d. h. kogredient zu sein und keinen Punkt der Unbestimmtheit zu besitzen, wodurch dann jede solche Funktionalmatrix als Integralmatrix eines mit (A) zu derselben Art gehörigen Differentialsystems (das natürlich auch wieder dem Fuchsschen Typus angehören wird) erscheint.

Wir bemerken noch, daß wir im folgenden, wenn von einem Differentialsystem schlechthin die Rede sein wird, stets ein solches vom Fuchsschen Typus und, wenn von einer Art die Rede ist, stets den Rationalitätsbereich aller rationalen Funktionen im Sinne haben.

Wir wollen nun zuvörderst eine Art von Differentialsystemen genauer zu charakterisieren suchen und namentlich die Invarianten der Art aufstellen.

In bezug auf die letztere Aufgabe können wir sofort das Folgende aussagen. Die Invarianten einer Art, d. h. die allen Differentialsystemen einer Art gemeinsamen und für die Art charakteristischen Bestimmungsstücke sind einmal die Verzweigungspunkte $a_1, \ldots, a_\sigma, \infty$,

das anderemal die zu dem Schnittsysteme $l_1, \ldots, l_\sigma$ gehörigen Fundamentalsubstitutionen, die eine Integralmatrix beim Überschreiten dieser Schnitte erfährt. Dabei ist zu bemerken, daß es bei der Betrachtung der Differentialsysteme selbst nicht wesentlich ist, die einer bestimmten Integralmatrix entsprechenden Fundamentalsubstitutionen anzugeben, daß wir vielmehr die beim Übergange von einer Integralmatrix zu einer andern auftretende transformierende lineare Substitution $(c_{i\varkappa})$, deren Elemente willkürliche Konstanten sind,*) als irrelevant ansehen können. In diesem Sinne werden also Systeme von Fundamentalsubstitutionen wie

$$(\mathsf{A}_{i\varkappa}^{(1)}), \ldots, (\mathsf{A}_{i\varkappa}^{(\sigma)})$$

und

$$(c_{i\varkappa})(\mathsf{A}_{i\varkappa}^{(1)})(c_{i\varkappa})^{-1}, \ldots, (c_{i\varkappa})(\mathsf{A}_{i\varkappa}^{(\sigma)})(c_{i\varkappa})^{-1},$$

die auseinander durch Transformation mit einer und derselben willkürlichen linearen Substitution $(c_{i\varkappa})$ hervorgehen, als äquivalent aufzufassen sein.

Nun hängen aber im allgemeinen die Fundamentalsubstitutionen $(\mathsf{A}_{i\varkappa}^{(\nu)})$ in sehr transzendenter Weise von den Größen ab, die in den Koeffizienten $a_{i\varkappa}$ des Differentialsystems der Art auftreten; es wird also wünschenswert sein, neben den Verzweigungspunkten $a_1, \ldots, a_\sigma$, an die Stelle der Artinvarianten $(\mathsf{A}_{i\varkappa}^{(\nu)})$ solche Größen setzen zu können, die sich aus den Koeffizienten eines Differentialsystems der Art in algebraischer Weise zusammensetzen. Um dieses Ziel zu erreichen, werden wir danach trachten, innerhalb jeder Art ein gewisses eindeutig definiertes Differentialsystem aufzustellen, das seinerseits für die Art charakteristisch ist, und dessen Koeffizienten dann unmittelbar als die Artinvarianten aufzufassen sein werden.

* * *

Unter den Differentialsystemen des Fuchsschen Typus sind namentlich zwei Formen von besonderer Wichtigkeit, bei denen die Zugehörigkeit zu diesem Typus unmittelbar an der Gestalt ihrer Koeffizienten erkannt werden kann. Es sind das erstens die linearen Differentialgleichungen $n$-ter Ordnung und zweitens die in der Umgebung jeder singulären Stelle kanonischen Differentialsysteme, die wir als schlechthin kanonische Systeme bezeichnen wollen.

*) Natürlich mit der Bedingung, daß die Determinante $|c_{i\varkappa}|$ nicht verschwindet.

Soll eine lineare Differentialgleichung $n$-ter Ordnung

$$(10) \qquad \frac{d^n y}{dx^n} + p_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \cdots + p_n y = 0$$

dem Fuchsschen Typus angehören, und sind $a_1, \ldots, a_\tau$ die singulären Punkte im Endlichen, d. h. die Pole der Koeffizienten, so müssen die Koeffizienten $p_1, \ldots, p_n$ in der Umgebung jedes Punktes $a_\nu$ und ebenso auch in der Umgebung von $x = \infty$ die charakteristische Form (Q) (S. 160) haben, die sich als notwendig und hinreichend dafür herausgestellt hat, damit der betreffende Punkt keine Unbestimmtheitsstelle der Lösungen sei. Setzen wir also

$$(11) \qquad (x - a_1) \cdots (x - a_\tau) = \varphi(x),$$

so wird, damit jene Form für jeden der singulären Punkte $a_1, \ldots, a_\tau$ vorhanden ist,

$$(12) \qquad p_1 = \frac{G_1(x)}{\varphi(x)}, \quad p_2 = \frac{G_2(x)}{\varphi(x)^2}, \quad \ldots, \quad p_n = \frac{G_n(x)}{\varphi(x)^n}$$

sein müssen, wo die $G_1(x), G_2(x), \ldots, G_n(x)$ ganze rationale Funktionen von $x$ bedeuten. Setzt man dann $x = \frac{1}{\xi}$, führt $\xi$ in der Differentialgleichung als neue unabhängige Variable ein und setzt die Tatsache in Evidenz, daß der Punkt $\xi = 0$ keine Unbestimmtheitsstelle sein soll, so ergibt sich, daß die Produkte

$$x^\varkappa p_\varkappa \qquad (\varkappa = 1, 2, \cdots, n)$$

für hinreichend große Werte von $x$ holomorph, d. h. nach positiven ganzen Potenzen von $\frac{1}{x}$ entwickelbar sein müssen. Daraus folgt aber, daß die ganzen Funktionen

$$G_1(x), \; G_2(x), \; \ldots, \; G_n(x)$$

bezw. vom Grade $\tau - 1$, $2(\tau - 1)$, $\cdots$, $n(\tau - 1)$ sein müssen; natürlich sind diese Zahlen nur obere Schranken für die Gradzahlen, d. h. die Gradzahlen dürfen auch kleiner sein. Diese Form der Koeffizienten der linearen Differentialgleichung $n$-ter Ordnung ist also für die Zugehörigkeit zum Fuchsschen Typus notwendig und hinreichend. — Wir bemerken, daß dieser Satz auch das am bequemsten anwendbare Kriterium dafür liefert, ob ein vorgelegtes lineares Differentialsystem (A) mit rationalen Koeffizienten zum Fuchsschen Typus gehört. Man braucht nämlich nur irgendeine mit (A) zu derselben Art gehörige Differentialgleichung $n$-ter Ordnung aufzustellen, d. h. man setzt (vgl. S. 156)

(13) $$z = y_1 r_{11} + \cdots + y_n r_{n1},$$

wo die $r_{11}, \ldots, r_{n1}$ willkürliche rationale Funktionen bedeuten, bildet die Ausdrücke:

$$r_{\lambda,\varkappa+1} = \frac{dr_{\lambda\varkappa}}{dx} + \sum_{\nu=1}^{n} a_{\lambda\nu} r_{\nu\varkappa} \qquad \begin{pmatrix}\varkappa = 1, 2, \cdots, n-1\\ \lambda = 1, 2, \ldots, n\end{pmatrix}$$

und mit Hilfe der so hergestellten Matrix $(r_{i\varkappa})$ die Matrix

$$(b_{i\varkappa}) = (r_{i\varkappa})^{-1}(a_{i\varkappa})(r_{i\varkappa}) + D_x(r_{i\varkappa}),$$

dann ist

$$b_{i\varkappa} = 0, \qquad b_{\varkappa+1,\varkappa} = 1, \qquad (\varkappa = 1, 2, \cdots, n-1;\ i \neq \varkappa + 1)$$

und $z$ genügt der Differentialgleichung

(14) $$\frac{d^n z}{dx^n} - b_{nn}\frac{d^{n-1}z}{dx^{n-1}} - \cdots - b_{2n}\frac{dz}{dx} - b_{1n} z = 0.$$

In dieser müssen nun, wenn (A) zum Fuchsschen Typus gehören soll, die Koeffizienten die oben angegebene Gestalt besitzen; dies ist notwendig und hinreichend. Die $r_{11}, \ldots, r_{n1}$ können passend gewählt werden, nur muß man dafür sorgen, daß die Determinante $|r_{i\varkappa}|$ nicht identisch verschwindet, ein Fall, der natürlich (vgl. die neunte Vorlesung S. 158) nur dann für spezielle $r_{11}, \ldots, r_{n1}$ eintreten kann, wenn das Differentialsystem (A) reduzibel ist. Läßt man in (13) die $r_{11}, \ldots, r_{n1}$ willkürliche rationale Funktionen bedeuten, so stellt (14) die allgemeinste lineare Differentialgleichung $n$-ter Ordnung dar, die mit (A) zu derselben Art gehört.

Was die schlechthin kanonischen Differentialsysteme anlangt, so muß ein solches System so beschaffen sein, daß für seine Koeffizienten jeder der im Endlichen gelegenen singulären Punkte $a_1, \ldots, a_\tau$ höchstens ein Pol erster Ordnung ist, und daß die Entwicklungen der Koeffizienten nach Potenzen von $\frac{1}{x}$ nur Potenzen von $\frac{1}{x}$ mit wesentlich positiven Exponenten enthalten. Wir erhalten für ein solches schlechthin kanonisches System demnach die Form:

(15) $$\frac{dy_\varkappa}{dx} = \sum_{\lambda=1}^{n} y_\lambda \frac{G_{\lambda\varkappa}(x)}{\varphi(x)}, \qquad (\varkappa = 1, 2, \cdots, n)$$

wo $\varphi(x)$ dieselbe Bedeutung hat wie in Gleichung (11), und wo die $G_{\lambda\varkappa}(x)$ ganze Funktionen von $x$ sind, deren Grad höchstens der $(\tau-1)$-te ist.

Es bietet sich nun die Frage dar, ob jede Art von Differentialsystemen auch schlechthin kanonische Systeme enthalten muß, d. h. ob,

wenn ein Differentialsystem (A) vorgelegt wird, das dem Fuchsschen Typus angehört, die Matrix rationaler Funktionen $(r_{i\varkappa})$ stets so bestimmt werden kann, daß die Ausdrücke

$$(16) \qquad z_\varkappa = \sum_{\lambda=1}^{n} y_\lambda r_{\lambda\varkappa} \qquad (\varkappa = 1, 2, \cdots, n)$$

einem schlechthin kanonischen Systeme genügen, und daß die Determinante $|r_{i\varkappa}|$ nicht identisch verschwindet? Die Antwort fällt offenbar im bejahenden Sinne aus. — Wir denken uns nämlich auf das zum Fuchsschen Typus gehörige Differentialsystem die folgende Reihe von Transformationen angewandt:

Zuerst transformieren wir die $y_1, \ldots, y_n$ so, daß für das transformierte System der Punkt $a_1$ ein Pol erster Ordnung wird; eine solche Transformation hat nach den Erörterungen der neunten Vorlesung (S. 155) die Form

$$(17) \qquad y_\varkappa = \sum_{\lambda=1}^{n} z_\lambda^{(1)} (x - a_1)^{\gamma_{\lambda 1}} h_{\lambda\varkappa}^{(1)},$$

und sie bewirkt sogar, daß das Differentialsystem, dem die $z_1^{(1)}, \ldots, z_n^{(1)}$ genügen, im Punkte $a_1$ die Normalform besitzt. Dann transformieren wir die $z_1^{(1)}, \ldots, z_n^{(1)}$ durch die Gleichungen

$$(18) \qquad z_\varkappa^{(1)} = \sum_{\lambda=1}^{n} z_\lambda^{(2)} (x - a_2)^{\gamma_{\lambda 2}} h_{\lambda\varkappa}^{(2)}$$

so, daß das Differentialsystem, dem die $z_1^{(2)}, \ldots, z_n^{(2)}$ genügen, in $x = a_2$ die Normalform erhält, und fahren so fort, bis die Reihe der singulären Punkte $a_1, \ldots, a_\tau$ erschöpft ist. Auf das letzte System $z_1^{(\tau)}, \ldots, z_n^{(\tau)}$ wenden wir dann eine Transformation an, die bewirkt, daß das so resultierende Differentialsystem, dessen Unbekannte wir mit $z_1, \ldots, z_n$ bezeichnen wollen, für $x = \infty$ die Normalform erhält; diese letzte Transformation hat die Form

$$(19) \qquad z_\varkappa^{(\tau)} = \sum_{\lambda=1}^{n} z_\lambda \left(\frac{1}{x}\right)^{\gamma_{\lambda, \tau+1}} h_{\lambda\varkappa}^{(\tau+1)}.$$

In diesen Transformationen (17), (18), ..., (19) bedeuten die $\gamma_{\lambda\nu}$ nicht negative ganze Zahlen, die $(h_{i\varkappa}^{(\nu)})$ neutrale Matrizen. Wir erkennen hiernach, daß durch die Transformation (18) die Normalform bei $a_1$ nicht alteriert wird, ebensowenig durch die folgende Transformation die Normalform bei $a_1$ und $a_2$ usw.; das Differentialsystem für $z_1, \ldots, z_n$ besitzt folglich für alle Punkte $a_1, \ldots, a_\tau, \infty$ die Normalform und geht offenbar aus dem Differentialsysteme (A) auch durch eine Trans-

formation von der Form (16) hervor, wo die $r_{i\varkappa}$ rationale Funktionen bedeuten, d. h. es gehört mit (A) zu derselben Art. Es kann aber vorkommen, daß durch die letzte Transformation (19) der Punkt $x=0$ entweder als neuer singulärer Punkt eingeführt wird, oder wenn $x=0$ schon unter den Punkten $a_1, \ldots, a_\tau$ enthalten war, die für diesen Punkt bereits erzielte Normalform alteriert wird. Natürlich könnte man in (19) an die Stelle von $\frac{1}{x}$ auch $\frac{1}{x-a}$ setzen, wo $a$ einen beliebigen, für das ursprüngliche Differentialsystem nicht singulären Punkt bedeutet und dadurch diesen Punkt $a$ als neue singuläre Stelle einführen. Es läßt sich dann auch unschwer erreichen, daß das Differentialsystem für $s_1, \ldots, s_n$ in dem Punkte $x=a$ die Normalform erhält; wir können also sagen, daß ein jedes Differentialsystem, das zum Fuchsschen Typus gehört, in ein Differentialsystem von derselben Art transformiert werden kann, das nicht nur schlechthin kanonisch ist, sondern bei jedem seiner singulären Punkte die Normalform besitzt.

Dieses Resultat hat jedoch insofern etwas Unbefriedigendes, als wir im allgemeinen durch unser Verfahren einen neuen singulären Punkt einschmuggeln mußten. In bezug auf diesen steht zwar fest, daß er kein Verzweigungspunkt der Integrale sein kann, sondern entweder ein Pol oder ein außerwesentlich singulärer Punkt sein muß. Es entsteht aber die Frage, ob sich die Einführung eines solchen Punktes nicht vermeiden läßt; ja, wir können sogar noch einen Schritt weiter gehen. — Nehmen wir nämlich an, daß für unser Differentialsystem (A) die Punkte

$$a_1, \ldots, a_\sigma, \infty$$

die Verzweigungspunkte, die Punkte

$$b_1, \ldots, b_\varrho$$

die Pole der Lösungen, und endlich die Punkte

$$c_1, \ldots, c_\nu$$

die außerwesentlich singulären Punkte seien. Man kann dann zuvörderst diejenigen Differentialsysteme der durch (A) bestimmten Art ins Auge fassen, deren Lösungen überhaupt dieselben singulären Punkte besitzen wie für (A), d. h. wo nicht nur die Verzweigungspunkte $a_i$, sondern auch die Pole $b_i$ dieselben sind wie für (A). Von dieser Gesamtheit von Differentialsystemen (bezw. Integralmatrizen) wollen wir nach Riemann sagen, daß sie mit (A) zu derselben Klasse gehören. Wenn wir in den Transformationsgleichungen (16) die $r_{i\varkappa}$ ganze rationale Funktionen bedeuten lassen, oder auch, wenn wir diese $r_{i\varkappa}$ als solche rationale Funktionen wählen, die keine anderen Pole haben als die

Punkte $a_i$, $b_i$, so wird das Differentialsystem, dem die $z_1, \ldots, z_n$ genügen, offenbar mit (A) zu derselben Klasse gehören. Es wäre auch nicht schwierig, die allgemeine Form für die rationalen Funktionen $r_{i\varkappa}$ anzugeben, bei der das Differentialsystem, dem die $z_1, \ldots, z_n$ genügen, mit (A) zu derselben Klasse gehört. — Innerhalb einer Klasse können also nur noch die außerwesentlich singulären Punkte variieren.

Nun ist es leicht, innerhalb der Art eine solche Klasse von Differentialsystemen auszusondern, die neben den Verzweigungspunkten $a_i$ nur noch außerwesentlich singuläre Punkte besitzt. Zu diesem Zwecke braucht man nämlich nur die $y_1, \ldots, y_n$ mit einer ganzen rationalen Funktion von der Form

$$(x-b_1)^{g_1}\cdots(x-b_\varrho)^{g_\varrho}$$

zu multiplizieren, wo die $g_1, \ldots, g_\varrho$ positive ganze Zahlen bedeuten, die nicht kleiner sind als die Ordnungszahl, von der das allgemeine Integralsystem des Differentialsystems (A) für den betreffenden Pol unendlich wird. Die so bestimmte Klasse bezeichnen wir als die Hauptklasse der betreffenden Art.

Wir können nun fragen, ob es innerhalb der Hauptklasse schlechthin kanonische Differentialsysteme gibt, und noch weitergehend, ob unter den schlechthin kanonischen Differentialsystemen der Hauptklasse wohl auch solche vorhanden sind, die überhaupt keinen außerwesentlich singulären Punkt aufweisen.

Ein solches Differentialsystem würde die folgende Form haben:

$$\frac{du_\varkappa}{dx} = \sum_{\lambda=1}^{n} u_\lambda \frac{g_{\lambda\varkappa}(x)}{(x-a_1)\cdots(x-a_\sigma)}, \qquad (\varkappa = 1, 2, \ldots, n)$$

wo die $g_{\lambda\varkappa}(x)$ ganze rationale Funktionen von nicht höherem als dem $(\sigma-1)$-ten Grade bedeuten, oder, wenn wir uns die rationalen Funktionen, die das Koeffizientensystem bilden, in Partialbrüche zerlegt denken, die Form

$$\text{(20)} \qquad \frac{du_\varkappa}{dx} = \sum_{\lambda=1}^{n} u_\lambda \sum_{\nu=1}^{\sigma} \frac{A_{\lambda\varkappa}^{(\nu)}}{x-a_\nu}, \qquad (\varkappa = 1, 2, \ldots, n)$$

wo die $A_{i\varkappa}^{(\nu)}$ jetzt Konstanten bedeuten. Die Existenz solcher Differentialsysteme innerhalb der Art kann zunächst durch eine Konstantenzählung wahrscheinlich gemacht werden.

Denken wir uns nämlich wieder die Fundamentalsubstitutionen $(\mathsf{A}_{i\varkappa}^{(\nu)})$, die die Integralmatrix $(\bar{y}_{i\varkappa})$ des Differentialsystems (A) beim Überschreiten der Schnitte $l_1, \ldots, l_\sigma$ erfährt, so ist die Gesamtanzahl der Elemente

dieser $\sigma$ konstanten Matrizen gleich $n^2\sigma$. Das Differentialsystem (20) wird nun sicher mit (A) zu derselben Art gehören, wenn die Integralmatrix

$$(21) \qquad (\bar{u}_{ix}) = (\bar{T})\int\limits_{x_0}^{x}\left(\sum_{\nu=1}^{\sigma}\frac{A_{ix}^{(\nu)}}{x-a_\nu}\,dx + \delta_{ix}\right)$$

an den Schnitten $l_1, \ldots, l_\sigma$ dieselben Substitutionen $(\mathsf{A}_{ix}^{(\nu)})$ erfährt. Es sind also, wenn wir dies fordern, $n^2\sigma$ Bedingungen zu erfüllen, nämlich die $n^2\sigma$ Gleichungen

$$(22) \qquad (\mathsf{A}_{ix}^{(\mu)}) = s_\mu\int\limits_{x_0}^{x_0}\left(\sum_{\nu=1}^{\sigma}\frac{A_{ix}^{(\nu)}}{x-a_\nu}\,dx + \delta_{ix}\right); \qquad (\mu=1,2,\cdots,\sigma)$$

diesen Bedingungen gemäß haben wir die Koeffizienten des Differentialsystems (20) zu bestimmen, d. h. wir haben die $n^2\sigma$ Gleichungen (22) für die $n^2\sigma$ Partialbruchzähler $A_{ix}^{(\nu)}$ nach diesen Größen aufzulösen. Da die Anzahl der Gleichungen mit der Anzahl der zu bestimmenden Größen übereinstimmt, so ist es wahrscheinlich, daß diese Bestimmung auch wirklich möglich ist. Natürlich ist durch diese Überlegung erst ein Problem formuliert, und zwar ein Problem, das über die oben aufgeworfene Frage, ob es schlechthin kanonische Differentialsysteme der Hauptklasse gibt, die keinen außerwesentlich singulären Punkt besitzen, weit hinausgeht. — Bei der gedachten Frage sind nämlich die $n^2\sigma$ Elemente der Fundamentalsubstitutionen $(\mathsf{A}_{ix}^{(\nu)})$ von vornherein als die Fundamentalsubstitutionen des Differentialsystems (A) gegeben; die eben vorgenommene Konstantenzählung legt aber die Frage nahe, ob sich nicht allgemein die $n^2\sigma$ Partialbruchzähler $A_{ix}^{(\nu)}$ so bestimmen lassen, daß in den Gleichungen (22) die Elemente der Matrizen $(\mathsf{A}_{ix}^{(\nu)})$ willkürlich vorgeschriebene Größen sind. — Wenn es gelingt, auf diese letztere Frage eine bejahende Antwort zu erlangen, so ist damit offenbar auch die frühere Frage im bejahenden Sinne entschieden. Wir werden nun gleich jene allgemeine Frage behandeln, d. h. also uns mit dem folgenden Probleme beschäftigen:

Es seien $\sigma$ Punkte $a_1, \ldots, a_\sigma$ willkürlich gegeben; wir legen die Schnitte $(a_1, \infty)$, $(a_2, \infty)$, $\ldots$, $(a_\sigma, \infty)$ und fragen, ob sich die Partialbruchzähler $A_{ix}^{(\nu)}$ des schlechthin kanonischen Differentialsystems (20) so bestimmen lassen, daß die in der zerschnittenen Fläche $\bar{T}$ eindeutig festgelegte Integralmatrix (21) die willkürlich vorgeschriebenen Fundamentalsubstitutionen $(\mathsf{A}_{ix}^{(\nu)})$ $(\nu=1,2,\cdots,\sigma)$ erleidet, wenn die unabhängige Variable $x$ die Schnitte $(a_\nu, \infty)$ überschreitet.

Wir bezeichnen diese Aufgabe als das Riemannsche Problem.

Um an dieses Problem herantreten zu können, müssen wir Einsicht zu gewinnen suchen in die Art und Weise, wie die Elemente der Fundamentalsubstitutionen eines Differentialsystems von der Form (20) von den singulären Punkten $a_1, \ldots, a_\sigma$ einerseits, und von den Partialbruchzählern $A_{ix}^{(\nu)}$ andererseits abhängen. Der Untersuchung dieser Abhängigkeit wird ein wesentlicher Teil der nachfolgenden Betrachtungen gewidmet sein.

Zunächst bemerken wir, daß wir in zwei einfachen Fällen die Lösung des Riemannschen Problems sofort angeben können; es sind das die Fälle

I. $n$ beliebig, $\sigma = 1$,

II. $n = 1$, $\sigma$ beliebig.

Im Falle I. sei $a_1 = a$ und $(\mathsf{A}_{ix})$ die vorgeschriebene Fundamentalsubstitution. Wir denken uns $(\mathsf{A}_{ix})$ auf die kanonische Form transformiert:

$$(23) \qquad (\mathsf{B}_{ix})(\mathsf{A}_{ix})(\mathsf{B}_{ix})^{-1} = (\omega_{ix});$$

dann können wir nach den Ergebnissen der achten Vorlesung ein Cauchysches System

$$(24) \qquad \frac{d\mathfrak{y}_x}{dx} = \sum_{\lambda=1}^{n} \mathfrak{y}_\lambda \frac{\varrho_{\lambda x}}{x-a} \qquad (x = 1, 2, \cdots, n)$$

herstellen, das eine explizite angebbare Integralmatrix $(\mathfrak{y}_{ix})$ besitzt, die bei Umkreisung von $x = a$ im positiven Sinne die Substitution $(\omega_{ix})$ erfährt. Die Integralmatrix

$$(\mathfrak{z}_{ix}) = (\mathsf{B}_{ix})^{-1}(\mathfrak{y}_{ix})]$$

erfährt dann bei demselben Umlaufe die Substitution $(\mathsf{A}_{ix})$. Setzen wir nun

$$(\mathfrak{z}_{ix})_{x_0}^{-1} = (\gamma_{ix}),$$

wo $x_0$ irgendeinen von $a$ verschiedenen endlichen Wert von $x$ bedeutet, so befriedigt die Funktionalmatrix

$$(u_{ix}) = (\mathfrak{z}_{ix})(\gamma_{ix})$$

das Differentialsystem

$$(25) \qquad \frac{du_x}{dx} = \sum_{\lambda=1}^{n} u_\lambda \frac{A_{\lambda x}}{x-a}, \qquad (x = 1, 2, \cdots, n)$$

wo nach der Regel (V) der zweiten Vorlesung

$$(A_{ix}) = (\gamma_{ix})^{-1}(\varrho_{ix})(\gamma_{ix})$$

ist, und da $(u_{\iota\varkappa})$ sich für $x = x_0$ auf $(\delta_{\iota\varkappa})$ reduziert und überdies bei Umkreisung des Punktes $a$ die Substitution $(\mathsf{A}_{\iota\varkappa})$ erfährt, so löst das Differentialsystem (25) unser Problem. — Da die Matrix $(\varrho_{\iota\varkappa})$ noch gewisse willkürlich wählbare ganze Zahlen enthält, so gibt es unendlich viele Lösungen; eine Lösung wird eindeutig festgelegt sein, wenn wir über jene ganzen Zahlen in bestimmter Weise disponieren.

Im Falle II handelt es sich darum, in der Differentialgleichung

$$\frac{du}{dx} = u \sum_{\nu=1}^{\sigma} \frac{A_\nu}{x - a_\nu}$$

die $A_1, \ldots, A_\sigma$ so zu bestimmen, daß die Lösung $u$ sich beim Überschreiten der Schnitte $(a_\nu, \infty) = l_\nu$ mit den vorgeschriebenen konstanten Faktoren $\mathsf{A}_\nu$ $(\nu = 1, 2, \cdots, \sigma)$ multipliziert. Da in diesem Falle

$$u = c \cdot (x - a_1)^{A_1} \cdots (x - a_\sigma)^{A_\sigma}$$

gefunden wird, wo $c$ eine willkürliche Integrationskonstante bedeutet, haben wir die $A_\nu$ so zu bestimmen, daß

$$\mathsf{A}_\nu = e^{2\pi\sqrt{-1}A_\nu} \qquad (\nu = 1, 2, \cdots, \sigma)$$

wird, es ist also

$$A_\nu = \frac{\log \mathsf{A}_\nu}{2\pi\sqrt{-1}}.$$

Wir sehen auch hier, wie im Falle I, daß die $A_\nu$ noch auf unendlich viele Weisen den Bedingungen des Problems gemäß gewählt werden können und eindeutig festgelegt sind, wenn wir die Determinationen der $\log \mathsf{A}_\nu$, d. h. die Exponenten angeben, zu denen die Lösung $u$ bei jedem der singulären Punkte $a_1, \ldots, a_\sigma$ gehören soll.

Wir lernen aus diesen beiden Beispielen, daß die Frage, die wir mit dem Riemannschen Probleme aufgeworfen haben, noch keine eindeutig bestimmte Antwort zulassen wird, daß wir vielmehr noch über die determinierenden Matrizen des Systems (20) für die einzelnen singulären Punkte $a_\nu$ werden disponieren können; natürlich in der Weise, daß diese determinierenden Matrizen mit den Fundamentalgleichungen der vorgeschriebenen Substitutionen $(\mathsf{A}_{\iota\varkappa}^{(\nu)})$ in Übereinstimmung sind.

Wir wollen nun einige einfache Sätze über Systeme von der Form (20) ableiten, die uns gleich eine gewisse Einsicht in die Natur der zu lösenden Aufgabe verschaffen werden.

Für das schlechthin kanonische System (20) wollen wir die Voraussetzung machen, daß es in der Umgebung jedes singulären

Punktes die **Normalform** habe. Diese Voraussetzung wird z. B. stets erfüllt sein, wenn die Wurzeln der Residuengleichungen

$$(26)\qquad \left| A_{i\varkappa}^{(\nu)} - \delta_{i\varkappa} r \right|_{(i,\,\varkappa = 1, 2, \cdots, n)} = 0, \qquad (\nu = 1, 2, \cdots, \sigma)$$

die zu den im Endlichen gelegenen singulären Punkten gehören, und ebenso die Wurzeln der zu $x = \infty$ gehörigen Residuengleichung

$$(27)\qquad \left| A_{i\varkappa}^{(\sigma+1)} - \delta_{i\varkappa} r \right|_{(i,\,\varkappa = 1, 2, \cdots, n)} = 0,$$

wo

$$(28)\qquad A_{i\varkappa}^{(\sigma+1)} = -\sum_{\nu=1}^{\sigma} A_{i\varkappa}^{(\nu)}$$

gesetzt wurde, voneinander verschieden sind und sich auch nicht um ganze Zahlen unterscheiden. Wir bemerken gleich, daß wir, um algebraische Komplikationen zu vermeiden, uns im folgenden zumeist auf die Betrachtung solcher Differentialsysteme von der Form (20) beschränken werden, für die diese letzteren Bedingungen erfüllt sind, wo also die Gleichungen (26), (27) direkt die determinierenden Fundamentalgleichungen sind und die determinierenden Matrizen in ihrer kanonischen Form nur Diagonalglieder enthalten.

Zunächst gilt ganz allgemein die folgende Bemerkung. — Bezeichnen wir mit $r_1^{(\nu)}, \ldots, r_n^{(\nu)}$ die Wurzeln der Gleichung (26), mit $r_1^{(\sigma+1)}, \ldots, r_n^{(\sigma+1)}$ die der Gleichung (27), so ist

$$\sum_{\varkappa=1}^{n} r_{\varkappa}^{(\nu)} = \sum_{\varkappa=1}^{n} A_{\varkappa\varkappa}^{(\nu)}; \qquad (\nu = 1, 2, \cdots, \sigma+1)$$

wir haben also mit Rücksicht auf die Gleichung (28) die sogenannte **Fuchssche Relation** zwischen den Wurzeln aller determinierenden Fundamentalgleichungen:

$$(29)\qquad \sum_{\nu=1}^{\sigma+1} \sum_{\varkappa=1}^{n} r_{\varkappa}^{(\nu)} = 0.$$

Wir betrachten jetzt weiter ein Differentialsystem

$$(30)\qquad \frac{dv_{\varkappa}}{dx} = \sum_{\lambda=1}^{n} v_{\lambda} \sum_{\nu=1}^{\sigma} \frac{\overline{A}_{\lambda\varkappa}^{(\nu)}}{x - a_{\nu}} \qquad (\varkappa = 1, 2, \cdots, n)$$

von derselben Form wie das System (20) und wollen annehmen, daß dieses Differentialsystem

1. mit (20) zu derselben Klasse gehört,

2. daß die Integralmatrix $(v_{i\varkappa})$ von (30), die sich für $x = x_0$ auf $(\delta_{i\varkappa})$ reduziert, beim Überschreiten der Schnitte $l_1, \ldots, l_\sigma$ dieselben

Substitutionen erfährt wie die Integralmatrix $(u_{ix})$ von (30), die ebenfalls in $x = x_0$ gleich der Einheitsmatrix $(\delta_{ix})$ wird,

3. daß für jeden der singulären Punkte $a_1, \ldots, a_\sigma, \infty$ die determinierenden Matrizen der Systeme (20) und (30) einander ähnlich sind, also in ihrer kanonischen Form übereinstimmen.

Es ist dann jedenfalls

$$(31) \qquad (v_{ix}) = (u_{ix})(r_{ix}),$$

wo $(r_{ix})$ eine Matrix rationaler Funktionen von $x$ bedeutet.

Der Einfachheit wegen beschränken wir uns bei den weiteren Schlüssen auf den Fall, wo die Residuengleichungen (26), (27) lauter einfache Wurzeln haben, die auch keine ganzzahligen Differenzen aufweisen, d. h., wie wir auch sagen können, auf den Fall, wo die zu den Substitutionen

$$(\mathsf{A}_{ix}^{(1)}), \ldots (\mathsf{A}_{ix}^{(\sigma)}), \; (\mathsf{A}_{ix}^{(\sigma+1)})$$

gehörigen Fundamentalgleichungen lauter einfache Wurzeln haben. Die kanonische Form der zu dem Punkte $x = a_\nu$ gehörigen determinierenden Matrix lautet dann für die Systeme (20), (30) einfach

$$\begin{pmatrix} r_1^{(\nu)} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & r_2^{(\nu)} & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \ldots & r_n^{(\nu)} \end{pmatrix}.$$

Denken wir uns für die Systeme (20) und (30) die zu den einzelnen singulären Punkten gehörigen kanonischen Integralmatrizen aufgestellt, so haben diese für das System (20) die Form

$$(32) \qquad ((x - a_\nu)^{r_i^{(\nu)}} \varphi_{ix}^{(\nu)}), \qquad (\nu = 1, 2, \cdots, \sigma + 1)$$

wo die $\varphi_{ix}^{(\nu)}$ in der Umgebung von $x = a_\nu$ holomorphe Funktionen bedeuten, deren Determinante $|\varphi_{ix}^{(\nu)}|$ in $x = a_\nu$ nicht verschwindet. Zufolge der Voraussetzung 3. lauten die kanonischen Integralmatrizen für das System (30)

$$(33) \qquad ((x - a_\nu)^{r_i^{(\nu)}} \psi_{ix}^{(\nu)}) \qquad (\nu = 1, 2, \cdots, \sigma + 1)$$

wo auch die $\psi_{ix}^{(\nu)}$ in der Umgebung von $x = a_\nu$ holomorph sind. — Wenn dann die Integralmatrix $(u_{ix})$ von (20) mit den kanonischen Integralmatrizen (32) durch die Gleichungen

$$(34) \qquad (u_{ix}) = (c_{ix}^{(\nu)})((x - a_\nu)^{r_i^{(\nu)}} \varphi_{ix}^{(\nu)}) \qquad (\nu = 1, 2, \cdots, \sigma + 1)$$

verknüpft ist, so lauten die Darstellungen der Integralmatrix $(v_{ix})$ von

(30) durch die kanonischen Integralmatrizen (33) zufolge der Voraussetzung 2. ebenfalls

(35) $$(v_{i\varkappa}) = (c_{i\varkappa}^{(\nu)})((x - a_\nu)^{r_i^{(\nu)}} \psi_{i\varkappa}^{(\nu)}). \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, \sigma + 1)$$

Aus der Gleichung (31) folgt

$$(r_{i\varkappa}) = (u_{i\varkappa})^{-1}(v_{i\varkappa});$$

wir finden demnach mit Rücksicht auf (34), (35) in der Umgebung von $x = a_\nu$ für $(r_{i\varkappa})$ die Darstellung

$$(r_{i\varkappa}) = (\varphi_{i\varkappa}^{(\nu)})^{-1}(\psi_{i\varkappa}^{(\nu)}).$$

Nun sind die Elemente der Matrix $(\varphi_{i\varkappa}^{(\nu)})^{-1}$, da die Determinante $|\varphi_{i\varkappa}^{(\nu)}|$ im Punkte $a_\nu$ einen von Null verschiedenen Wert hat, in der Umgebung von $x = a_\nu$ holomorph, das gleiche gilt folglich von den Elementen der Matrix $(r_{i\varkappa})$. Die rationalen Funktionen $r_{i\varkappa}$ können aber keinen von $a_1, \ldots, a_\sigma, \infty$ verschiedenen singulären Punkt haben; denn bedeutet $\bar{x}$ einen regulären Punkt für das Differentialsystem (20), so ist in diesem Punkte die Determinante der Integralmatrix $(u_{i\varkappa})$ endlich und von Null verschieden, die Elemente der Matrix $(u_{i\varkappa})^{-1}$ sind folglich in der Umgebung von $\bar{x}$ holomorph, also gilt das gleiche von den $r_{i\varkappa}$. Die $r_{i\varkappa}$ sind demnach in der Umgebung eines jeden endlichen $x$-Wertes und ebenso in der Umgebung von $x = \infty$ holomorph, sie reduzieren sich also auf einfache Konstanten. — Um die Werte dieser Konstanten zu bestimmen, brauchen wir jetzt nur noch in der Gleichung (31) für $x$ den Wert $x_0$ einzusetzen, dann ergibt sich nämlich, daß $(r_{i\varkappa})$ mit der Einheitsmatrix $(\delta_{i\varkappa})$ übereinstimmt. Es ist folglich $(v_{i\varkappa})$ mit $(u_{i\varkappa})$ identisch, und daraus folgt weiter die Identität der Differentialsysteme (20) und (30).

Das Differentialsystem (20) ist also durch die Wurzeln seiner determinierenden Fundamentalgleichungen und durch den Punkt $x_0$ innerhalb der Hauptklasse eindeutig festgelegt.

Dieser Satz, den wir als das Fundamentallemma unserer Theorie bezeichnen wollen, lautet im allgemeinsten Falle, wo der Beweis auf ähnliche Weise geführt werden kann, wie folgt:

Das schlechthin kanonische Differentialsystem (20), das in der Umgebung jeder singulären Stelle die Normalform hat und keinen außerwesentlich singulären Punkt besitzt, für das überdies diejenige Integralmatrix $(u_{i\varkappa})$, die sich für $x = x_0$ auf die Einheitsmatrix $(\delta_{i\varkappa})$ reduziert, beim Überschreiten der Schnitte $l_1, \ldots, l_\sigma$ die Substitutionen $(\mathsf{A}_{i\varkappa}^{(1)}), \ldots, (\mathsf{A}_{i\varkappa}^{(\sigma)})$ erfährt, ist durch Festlegung der kanonischen Formen der zu den Punkten $a_1, \ldots, a_\sigma, \infty$ gehörigen determinierenden Matrizen eindeutig bestimmt.

Auf Grund dieses Satzes können wir nunmehr die Koeffizienten eines solchen Differentialsystems (20), d. h. genauer die singulären Punkte $a_1, \ldots a_\sigma$ einerseits, und die Residuenmatrizen $(A_{ix}^{(\nu)})$ andrerseits, als die Invarianten der Art auffassen, die durch jenes Differentialsystem bestimmt ist. Damit ist die Aufgabe, die Artinvarianten allgemein so festzulegen, daß sie sich aus den Koeffizienten eines gegebenen Differentialsystems (A) vom Fuchsschen Typus algebraisch zusammensetzen, darauf zurückgeführt, innerhalb der Hauptklasse schlechthin kanonische Differentialsysteme ohne außerwesentlich singuläre Punkte zu konstruieren, die in der Umgebung eines jeden singulären Punktes die Normalform besitzen. Diese Aufgabe ist rein algebraischer Natur, wir sehen aber von einer algebraischen Behandlung ab, da wir die in Rede stehende Aufgabe dem Riemannschen Probleme untergeordnet haben und eine Lösung dieses Problems, d. h. genauer, einen Beweis für seine Lösbarkeit zu geben beabsichtigen. Sehen wir nun zu, was wir durch unser Fundamentallemma für diese unsere Frage gewonnen haben; wir werden dabei auch noch in Evidenz setzen können, was uns zu tun noch übrig bleibt.

Es seien also die singulären Punkte $a_1, \ldots, a_\sigma$ ihrer Lage nach vorgeschrieben und die Fundamentalsubstitutionen

$$(\mathsf{A}_{ix}^{(1)}), \ldots (\mathsf{A}_{ix}^{(\sigma)})$$

willkürlich gegeben. Wir wollen der Einfachheit wegen annehmen, daß die Wurzeln $\omega_1^{(\nu)}, \ldots, \omega_n^{(\nu)}$ der Fundamentalgleichungen

$$(36) \qquad | \mathsf{A}_{ix}^{(\nu)} - \delta_{ix}\omega | = 0 \quad {\scriptstyle (i, x = 1, 2, \cdots, n)} \qquad {\scriptstyle (\nu = 1, 2, \cdots, \sigma)}$$

und auch die Wurzeln $\omega_1^{(\sigma+1)}, \ldots, \omega_n^{(\sigma+1)}$ der zu der Substitution

$$(37) \qquad (\mathsf{A}_{ix}^{(\sigma+1)}) = (\mathsf{A}_{ix}^{(1)})^{-1} \cdots (\mathsf{A}_{ix}^{(\sigma)})^{-1}$$

gehörigen Fundamentalgleichung

$$(38) \qquad | \mathsf{A}_{ix}^{(\sigma+1)} - \delta_{ix}\omega | = 0 \quad {\scriptstyle (i, x = 1, 2, \cdots, n)}$$

voneinander verschieden sind. — Die Aufgabe besteht darin, die Residuenmatrizen $(A_{ix}^{(\nu)})$ in dem Differentialsysteme (20) so zu bestimmen, daß die Integralmatrix

$$(39) \qquad (u_{ix}) = (\overline{T})\int_{x_0}^{x} \left( \sum_{\nu=1}^{\sigma} \frac{A_{ix}^{(\nu)}}{x - a_\nu} dx + \delta_{ix} \right)$$

die Substitutionen $(\mathsf{A}_{ix}^{(\nu)})$ erfährt, wenn $x$ die Schnitte $l_\nu$ überschreitet.

Diese Aufgabe spaltet sich nun zuvörderst in einen „leichten" und einen „schwierigen" Teil. Denken wir uns nämlich die

$$(\mathsf{A}_{ix}^{(\nu)}) \qquad (\nu = 1, 2, \cdots, \sigma + 1)$$

in die Form

(40) $$(\mathsf{A}_{ix}^{(\nu)}) = (\mathsf{B}_{ix}^{(\nu)})^{-1}(\delta_{ix}\omega_x^{(\nu)})(\mathsf{B}_{ix}^{(\nu)}) \qquad (\nu = 1, 2, \cdots, \sigma + 1)$$

gesetzt, und entsprechend die Residuenmatrizen $(A_{ix}^{(\nu)})$ $(\nu = 1, 2, \cdots, \sigma + 1)$, wo

(41) $$(A_{ix}^{(\sigma+1)}) = -\sum_{\nu=1}^{\sigma}(A_{ix}^{(\nu)})$$

ist, in die Form:

(42) $$(A_{ix}^{(\nu)}) = (B_{ix}^{(\nu)})^{-1}(\delta_{ix}r_x^{(\nu)})(B_{ix}^{(\nu)}), \qquad (\nu = 1, 2, \cdots, \sigma + 1)$$

so besteht der „leichtere" Teil unserer Aufgabe darin, die $r_x^{(\nu)}$ passend zu wählen. Dies kann noch auf mannigfache Weise geschehen; wir nehmen nämlich

(43) $$r_x^{(\nu)} = \frac{\log \omega_x^{(\nu)}}{2\pi\sqrt{-1}}, \qquad (x = 1, 2, \cdots, n;\ \nu = 1, 2, \cdots, \sigma + 1)$$

fixieren für irgendwelche $n(\sigma+1)-1$ der auftretenden Logarithmen die zu wählende Determination in ganz beliebiger Weise und dann für den $n(\sigma+1)$-ten Logarithmus so, daß die Fuchssche Relation (29) befriedigt wird. Der „schwierigere" Teil besteht dann darin, die $\sigma$ transformierenden Matrizen

(44) $$(B_{ix}^{(1)}), \ldots, (B_{ix}^{(\sigma)})$$

so zu bestimmen, daß sie im Sinne unseres Problems den $\sigma$ transformierenden Matrizen

(45) $$(\mathsf{B}_{ix}^{(1)}), \ldots, (\mathsf{B}_{ix}^{(\sigma)})$$

entsprechen. Dabei ist zu bemerken, daß in einer solchen transformierenden Matrix nicht alle $n^2$ Elemente, sondern nur $n^2 - n$ Elemente wesentlich sind, indem nämlich jede Zeile einer solchen Matrix noch mit einem willkürlichen Faktor multipliziert werden kann. Ferner haben die Matrizen (45) noch die Bedingungen zu erfüllen, daß die Wurzeln der Gleichung (38) mit den Größen $\omega_1^{(\sigma+1)}, \ldots, \omega_n^{(\sigma+1)}$ übereinstimmen müssen, und ebenso die Matrizen (44) die Bedingungen, daß die Gleichung (27) durch $r_1^{(\sigma+1)}, \ldots, r_n^{(\sigma+1)}$ befriedigt wird. Beidemal reduziert sich die Anzahl der Bedingungen auf $n-1$, da zufolge der Relationen (37) bezw. (41)

$$\prod_{x=1}^{n}\prod_{\nu=1}^{\sigma+1}\omega_x^{(\nu)} = 1,$$

$$\sum_{\varkappa=1}^{n}\sum_{\nu=1}^{\sigma+1} r_{\varkappa}^{(\nu)} = 0$$

ist. In diesem Sinne repräsentiert also jedes der Schemata (44), (45)

$$N = n^2\sigma - n(\sigma + 1) + 1$$

voneinander unabhängige Elemente. Die zu lösende Aufgabe kommt also darauf hinaus, zu zeigen, daß einem beliebigen Wertesystem der $N$ Elemente (45) stets ein Wertesystem der $N$ Elemente (44) entspricht. Über die gegenseitige Beziehung zwischen diesen beiden Systemen von je $N$ Elementen wissen wir bis jetzt das Folgende:

I. Einem jeden Wertesysteme der $N$ Elemente (44) entspricht ein Wertesystem der $N$ Elemente (45), indem ja für jedes Differentialsystem (20) ein bestimmtes System von Fundamentalsubstitutionen vorhanden ist, das zu den Schnitten $l_1, \ldots, l_\sigma$ und zu der Integralmatrix $(u_{i\varkappa})$ gehört.

II. Zufolge unseres Fundamentallemmas kann zu einem Wertesysteme der $N$ Elemente (45) nicht mehr als ein Wertesystem der $N$ Elemente (44) gehören.

Es handelt sich jetzt darum, tiefere Einsicht in die analytische Natur der Beziehung zwischen den beiden Systemen von $N$ Elementen (44), (45) zu gewinnen, die in Verbindung mit den Resultaten I und II die Lösung der gedachten Aufgabe ermöglichen soll.

Ehe wir auf diese Untersuchungen eingehen, machen wir noch einige historische Angaben zu der in dieser Vorlesung behandelten Materie.

Die linearen Differentialgleichungen $n$-ter Ordnung, deren Integrale keinen Punkt der Unbestimmtheit besitzen, hat Fuchs in seiner Abhandlung vom Jahre 1865 zuerst aufgestellt und untersucht. Die schlechthin kanonischen Systeme finden sich wohl zuerst bei Poincaré;*) eine eingehendere Behandlung dieser Systeme gibt L. Koenigsberger.**) Eine spezielle Differentialgleichung vom Fuchsschen Typus, nämlich die Differentialgleichung zweiter Ordnung mit drei singulären Punkten hatte Riemann schon im Jahre 1857 mit Hilfe der ihm eigentümlichen analytischen Methoden untersucht.***) In einem aus demselben Jahre stammenden Fragmente, das aber erst im Jahre 1876 in der ersten Ausgabe von Riemanns Werken aus dem Nachlasse Riemanns

*) Acta mathematica, Bd. IV (1884), S. 215.

**) Lehrbuch der Theorie der Differentialgleichungen (Teubner, 1889) S. 452 ff.

***) Beiträge zur Theorie der durch die Gaußsche Reihe $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ darstellbaren Funktionen; Werke (II. Aufl.) S. 67 ff.

veröffentlicht worden ist*), entwickelt Riemann seinerseits einige Eigenschaften der Funktionssysteme, die linearen Differentialgleichungen des Fuchsschen Typus genügen, indem er davon ausgeht, daß diese Funktionssysteme bei der Umkreisung der singulären Punkte $a, b, \ldots, g$ gewisse lineare Substitutionen $(A), (B), \ldots, (G)$ erleiden und an keiner Stelle von „unendlich hoher Ordnung unendlich werden", d. h. in unserer Terminologie, keinen Punkt der Unbestimmtheit besitzen. Einen Existenzbeweis für solche Funktionssysteme bei willkürlich vorgeschriebenen singulären Punkten $a, b, \ldots, g$ und willkürlich gegebenen Substitutionen $(A), (B), \ldots (G)$ hat Riemann nicht erbracht. Ein solcher wird offenbar mit dem Beweise der Lösbarkeit der von uns als Riemannsches Problem bezeichneten Aufgabe geliefert sein. In jenem Riemannschen Fragmente findet sich auch der Klassenbegriff, während der Artbegriff für einen Rationalitätsbereich algebraischer Funktionen von $x$ von Poincaré eingeführt worden ist.**)

*) Zwei allgemeine Lehrsätze über lineare Differentialgleichungen mit algebraischen Koeffizienten; ebenda, S. 379 ff.

**) Acta mathem. Bd. V (1885), S. 212.

# Vierzehnte Vorlesung.

**Abhängigkeit der Lösungen linearer Differentialsysteme von einem Parameter. Ein Satz von Poincaré und seine Verallgemeinerung. Anwendung auf schlechthin kanonische Systeme. Diskussion gewisser Systeme von ganzen transzendenten Funktionen. Formelle Aufstellung der parametrischen Normalreihen. Charakteristische Gleichung. Beweis eines Lemmas. Asymptotische Darstellung der Integrale für große Werte des Parameters durch die parametrischen Normalreihen.**

Wir werden in dieser Vorlesung die Lösungen eines linearen Differentialsystems in ihrer Abhängigkeit von einem in den Koeffizienten auftretenden veränderlichen Parameter zu untersuchen haben. Diese Abhängigkeit wird durch zwei Momente bestimmt. Erstens durch die Art und Weise, wie jener Parameter in die Koeffizienten der Differentialgleichungen eingeht, zweitens aber dadurch, wie die Anfangsbedingungen des zu betrachtenden Lösungssystems von dem Parameter abhängen. Was jenes zweite Moment anlangt, so werden wir uns in vielen Fällen darauf beschränken können, die Anfangsbedingungen als von jenem Parameter völlig unabhängige Größen vorauszusetzen, andererseits wird aber auch der Fall zu untersuchen sein, wo ein Parameter in den Koeffizienten selbst überhaupt nicht auftritt, sondern nur dadurch eingeführt wird, daß die Anfangsbedingungen eines Lösungssystems Funktionen desselben sind.

Wir betrachten ein Differentialsystem

$$\text{(A)} \qquad \frac{dy_\varkappa}{dx} = \sum_{\lambda=1}^{n} y_\lambda a_{\lambda\varkappa}, \qquad (\varkappa = 1, 2, \cdots, n)$$

dessen Koeffizienten $a_{i\varkappa}$ in einem einfach zusammenhängenden Bereiche $S$ der $x$-Ebene holomorphe Funktionen von $x$ sind, und die überdies ganze rationale Funktionen eines veränderlichen Parameters $\mu$ sein mögen. Es sei $x_0$ ein von $\mu$ unabhängiger fester Wert; dann können wir die Integralmatrix

(1) $$(y_{ix}) = (S)\int\limits_{x_0}^{x}(a_{ix}dx + \delta_{ix}),$$

die sich für $x = x_0$ auf $(\delta_{ix})$ reduziert, nach der Methode der sukzessiven Approximationen (siehe die dritte Vorlesung) durch die innerhalb $S$ gleichmäßig konvergenten Reihen

(2) $$(y_{ix}) = \sum_{\nu=0}^{\infty}(u_{ix}^{(\nu)})$$

darstellen, wo (vergl. S. 45) die $(u_{ix}^{(\nu)})$ durch die Gleichungen

(3) $$\begin{cases} (u_{ix}^{(0)}) = (\delta_{ix}), \\ (u_{ix}^{(1)}) = \int\limits_{x_0}^{x}(a_{ix})dx, \\ (u_{ix}^{(2)}) = \int\limits_{x_0}^{x}\left(\int\limits_{x_0}^{x}a_{ix}dx\right)(a_{ix})dx, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \end{cases}$$

gegeben werden; die auftretenden Integrale sind auf Wegen zu erstrecken, die ganz innerhalb des Bereiches $S$ verlaufen.

Aus der Voraussetzung, daß die $a_{ix}$ ganze rationale Funktionen von $\mu$ sein sollen, folgt nun, daß auch die $u_{ix}^{(\nu)}$ ganze rationale Funktionen von $\mu$ sind.

Da die Reihen (2) für jeden endlichen Wert von $\mu$ unbedingt und gleichmäßig konvergieren*), solange $x$ innerhalb des Bereiches $S$ gelegen ist, so können wir diese Reihen nach Potenzen von $\mu$ ordnen und erhalten auf diese Weise die $y_{ix}$ in der Form

(4) $$(y_{ix}) = \left(\sum_{\nu=0}^{\infty} y_{ix}^{(\nu)}\mu^{\nu}\right)$$

als beständig konvergente, gewöhnliche Potenzreihen von $\mu$ dargestellt. Die $y_{ix}$ sind also ganze transzendente Funktionen des Parameters $\mu$.**)

Wir betrachten jetzt den allgemeineren Fall, wo die $a_{ix}$ in einer gewissen von $x$ unabhängigen Umgebung von $\mu = \infty$, etwa für

(5) $$\mu > R,$$

*) Den Beweis hierfür erbringen wir weiter unten unter allgemeineren Voraussetzungen über den Charakter der Koeffizienten als Funktionen von $\mu$.

**) Poincaré, Acta Mathem. Bd. IV (1884), S. 212; vergl. P. Günther, Crelles Journal Bd. 107 (1889), S. 312.

wo also $R$ von $x$ unabhängig ist, in der Form

(6) $$a_{i\varkappa} = \mu^{\tau}\left(a_{i\varkappa}^{(0)} + \frac{a_{i\varkappa}^{(1)}}{\mu} + \frac{a_{i\varkappa}^{(2)}}{\mu^2} + \cdots \text{in inf.}\right)$$

entwickelbar sind; $\tau$ bedeutet eine positive ganze Zahl. Es sei dann $(y_{i\varkappa})$ eine Integralmatrix von (A), die sich für den von $\mu$ unabhängigen Wert $x = x_0$ auf die (von $x$ unabhängige) Matrix

(7) $$(y_{i\varkappa})_{x_0} = (\gamma_{i\varkappa})$$

reduziert, wo die $\gamma_{i\varkappa}$ in der durch die Ungleichung (5) dargestellten Umgebung von $\mu = \infty$ in der Form

(8) $$(\gamma_{i\varkappa}) = \mu^k\left(\gamma_{i\varkappa}^{(0)} + \frac{\gamma_{i\varkappa}^{(1)}}{\mu} + \frac{\gamma_{i\varkappa}^{(2)}}{\mu^2} + \cdots \text{in inf.}\right),$$

$k$ eine positive ganze Zahl, entwickelbar sind. Wir haben

$$(y_{i\varkappa}) = (\gamma_{i\varkappa}) \cdot (S)\widehat{\int_{x_0}^{x}}(a_{i\varkappa}dx + \delta_{i\varkappa}),$$

also, da

(9) $$(S)\widehat{\int_{x_0}^{x}}(a_{i\varkappa}dx + \delta_{i\varkappa}) = \delta_{i\varkappa} + \sum_{\nu=1}^{\infty}(u_{i\varkappa}^{(\nu)})$$

ist,

(10) $$(y_{i\varkappa}) = (\gamma_{i\varkappa}) + (\gamma_{i\varkappa})\sum_{\nu=1}^{\infty}(u_{i\varkappa}^{(\nu)}).$$

Wenn $x$ in dem Bereiche $S$ gelegen ist und $\mu$ sich innerhalb eines Kreisringes

(11) $$R' < \text{mod}\,\mu < R''$$

befindet, wo $R < R' < R''$ ist, so liegen die $a_{i\varkappa}$ dem absoluten Betrage nach unterhalb einer angebbaren endlichen Grenze $N$,

(12) $$\text{mod}\,a_{i\varkappa} < N.$$

Bedeutet dann $\bar{s}$ eine positive Größe, die so beschaffen ist, daß man von $x_0$ aus zu jedem Punkte des Bereiches $S$ auf einem ganz innerhalb $S$ befindlichen Wege gelangen kann, dessen Länge nicht größer ist als $\bar{s}$, so ist nach den Gleichungen (3)

$$(13)\qquad \begin{cases} \operatorname{mod} u_{i\varkappa}^{(1)} < N \cdot \bar{s}, \\ \operatorname{mod} u_{i\varkappa}^{(2)} < n N^2 \cdot \frac{\bar{s}^2}{2!}, \\ \dots\dots\dots\dots \\ \operatorname{mod} u_{i\varkappa}^{(\nu)} < n^{\nu-1} N^\nu \cdot \frac{\bar{s}^\nu}{\nu!}; \end{cases}$$

die Reihen

$$(14)\qquad \sum_{\nu=1}^{\infty} u_{i\varkappa}^{(\nu)}$$

sind demnach, wenn $x$ innerhalb $S$ und $\mu$ in dem Kreisringe (11) gelegen ist, unbedingt und gleichmäßig konvergent. Nun ist offenbar

$$u_{i\varkappa}^{(\nu)} = \mu^{\tau\nu} \mathfrak{P}_{i\varkappa}^{(\nu)}\left(\frac{1}{\mu}\right),$$

wo die $\mathfrak{P}_{i\varkappa}^{(\nu)}$ nach positiven ganzen Potenzen von $\frac{1}{\mu}$ fortschreitende Reihen bedeuten, die für $\operatorname{mod} \mu > R$ konvergieren und deren Koeffizienten innerhalb $S$ holomorphe Funktionen von $x$ sind. Denken wir uns also die Reihen (14) nach Potenzen von $\mu$ geordnet, so erscheinen diese, allgemein genommen, als Laurentsche Reihen, die unendlich viele positive und unendlich viele negative Potenzen von $\mu$ enthalten und die in dem Bereiche (11) gleichmäßig konvergieren, wie groß auch $R''$ und wie nahe auch $R'$ an $R$ gewählt werden mag. Die Gleichungen (10) ergeben folglich

$$(15)\qquad (y_{i\varkappa}) = \left(\sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} y_{i\varkappa}^{(\nu)} \mu^\nu\right),$$

und diese Reihen konvergieren für jeden endlichen Wert von $\mu$, dessen absoluter Betrag größer ist als $R$.*)

In dem besonderen Falle, wo $\tau = 0$, $k = 0$ ist, fallen in den Reihen (14) und (15) die Potenzen von $\mu$, deren Exponenten positive Zahlen sind, weg; d. h. wenn die Koeffizienten des Differentialsystems in der Umgebung von $\mu = \infty$ holomorph sind, so sind auch die Elemente einer Integralmatrix $(y_{i\varkappa})$, deren Anfangswerte $(\gamma_{i\varkappa})$ im Punkte $x_0$ in der Umgebung von $\mu = \infty$ holomorph sind, für jeden im Bereiche $S$ befindlichen $x$-Wert in der Umgebung von $\mu = \infty$ holomorph, also nach positiven ganzen Potenzen von $\frac{1}{\mu}$ entwickelbar.

Wenn die Koeffizienten $a_{i\varkappa}$ des Differentialsystems von mehreren

*) Horn, Mathem. Annalen Bd. 52 (1898), S. 343.

Parametern $\mu_1, \ldots, \mu_p$ abhängen, und wenn bekannt ist, daß die $a_{ix}$ in der Umgebung der Stelle $\mu_1 = \mu_1^{(0)}, \ldots, \mu_p = \mu_p^{(0)}, x = x_0$ holomorphe Funktionen der $p+1$ Veränderlichen $\mu_1, \ldots, \mu_p, x$ sind, so liegen die $a_{ix}$ innerhalb dieser Umgebung dem absoluten Betrage nach unter einer endlichen Grenze. Die Reihen, durch die die Elemente der Integralmatrix (1) nach der Methode der sukzessiven Approximationen dargestellt werden, konvergieren folglich in jener Umgebung unbedingt und gleichmäßig. Wenn also die Werte $\gamma_{ix}$, die die $y_{ix}$ im Punkte $x_0$ annehmen, in der Umgebung von $\mu_1 = \mu_1^{(0)}, \ldots, \mu_p = \mu_p^{(0)}$ holomorphe Funktionen von $\mu_1, \ldots, \mu_p$ sind, so sind die $y_{ix}$ selbst in der Umgebung der Stelle $\mu_1 = \mu_1^{(0)}, \ldots, \mu_p = \mu_p^{(0)}, x = x_0$ holomorphe Funktionen der $p+1$ Variabeln $\mu_1, \ldots, \mu_p, x$.

* * *

Nach diesen allgemeinen Betrachtungen wenden wir uns dem Falle zu, wo die Koeffizienten des Differentialsystems (A) rationale Funktionen von $x$ sind.

Bezeichnen wir die Pole der rationalen Funktionen $a_{ix}$ mit

$$a_1, \ldots, a_\sigma$$

und denken wir uns die $a_{ix}$ in Partialbrüche zerlegt, so ist

$$a_{ix} = \sum_{\mathfrak{a}=1}^{\sigma} \sum_{\mathfrak{b}=1,2,\ldots} \frac{A_{ix;\mathfrak{a}\mathfrak{b}}}{(x-a_\nu)^{\mathfrak{b}}};$$

die in $a_{ix}$ auftretenden Parameter sind also

1. die Partialbruchzähler $A_{ix;\mathfrak{a}\mathfrak{b}}$,
2. die singulären Punkte $a_1, \ldots, a_\sigma$.

Nach dem Vorhergehenden sind die Elemente der Integralmatrix

$$(y_{ix}) = \widehat{\int_{x_0}^{x}} (a_{ix}dx + \delta_{ix})$$

ganze transzendente Funktionen der Größen $A_{ix;\mathfrak{a}\mathfrak{b}}$. Wenn wir uns diese Größen als von den $a_1, \ldots, a_\sigma$ unabhängig vorstellen, so können wir, was die Abhängigkeit der $(y_{ix})$ von den $a_1, \ldots, a_\sigma$ anlangt, nach Poincaré, das Folgende bemerken. Denken wir uns die $(y_{ix})$ durch die Reihen (2) dargestellt und dann diese Reihen nach positiven ganzen Potenzen der Größen $A_{ix;\mathfrak{a}\mathfrak{b}}$ geordnet, so erscheinen die $u_{ix}^{(\nu)}$ als homogene ganze rationale Funktionen der $A_{ix;\mathfrak{a}\mathfrak{b}}$ von nicht höherem als dem $\nu$-ten Grade. Die Koeffizienten dieser ganzen ratio-

nalen Funktionen setzen sich aus Ausdrücken der folgenden Art zusammen. Es sei

$$A_{\varkappa_1}(x;\alpha_1)=\int\limits_{x_0}^{x}\frac{dx}{(x-\alpha_1)^{\varkappa_1}},\qquad A_{\varkappa_1,\varkappa_2}(x;\alpha_1,\alpha_2)=\int\limits_{x_0}^{x}\frac{A_{\varkappa_1}(x;\alpha_1)\,dx}{(x-\alpha_2)^{\varkappa_2}},\ \ldots,$$

$$A_{\varkappa_1,\ldots,\varkappa_{q+1}}(x;\alpha_1,\ldots,\alpha_q,\alpha_{q+1})=\int\limits_{x_0}^{x}\frac{A_{\varkappa_1,\ldots,\varkappa_q}(x;\alpha_1,\ldots,\alpha_q)\,dx}{(x-\alpha_{q+1})^{\varkappa_{q+1}}},$$

wo die $\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_{q+1}$ positive ganze Zahlen bedeuten; dann sind jene Koeffizienten solche $A$-Funktionen, in denen die singulären Stellen $\alpha_1, \ldots, \alpha_q, \alpha_{q+1}$ aus der Reihe der Punkte $a_1, \ldots, a_\sigma$ in unbeschränkter Anzahl und beliebiger Reihenfolge bei unbeschränkter Wiederholung entnommen sind. Als Integrationsweg ist der Weg $(x_0 \ldots x)$ zu wählen, auf dem die Integralmatrix $(y_{i\varkappa})$ selbst genommen ist. Die Koeffizienten der nach Potenzen der Größen $A_{i\varkappa;\mathfrak{a}\mathfrak{b}}$ geordneten Reihen für die $y_{i\varkappa}$ sind demnach als Summen solcher $A$-Funktionen darstellbar.

Wir können nun ohne weiteres die Reihenentwickelungen (2) auch dann zur Anwendung bringen, wenn wir es nicht mit einem einfachzusammenhängenden, sondern mit einem mehrfach zusammenhängenden Holomorphiebereiche der Koeffizienten $a_{i\varkappa}$ zu tun haben; wir werden dann nur den Integrationsweg für die Integralmatrix $(y_{i\varkappa})$ fixieren müssen und in den Definitionsgleichungen der $u_{i\varkappa}^{(\nu)}$ allemal die äußersten Integrale auf demselben Wege zu erstrecken haben. Nehmen wir als Integrationsweg gleich die von $x_0$ aus um den Punkt $a_\nu$ herumgelegte einfache Schleife $s_\nu$, so stellt die auf dem Wege $s_\nu$ erstreckte Integralmatrix die entsprechende Fundamentalsubstitution $(\mathsf{A}_{i\varkappa}^{(\nu)})$ dar, die die Integralmatrix $(y_{i\varkappa})$ erleidet, wenn $x$ die betreffende Schleife durchläuft. — Die für die Abhängigkeit der $y_{i\varkappa}$ von einem Parameter $\mu$ abgeleiteten Sätze gelten also unmittelbar auch für die Elemente der Fundamentalsubstitutionen, insbesondere können wir sagen, daß die Elemente der Fundamentalsubstitutionen ganze transzendente Funktionen der Partialbruchzähler $A_{i\varkappa;\mathfrak{a}\mathfrak{b}}$ sind, und daß die Koeffizienten der nach positiven ganzen Potenzen dieser Größen fortschreitenden Entwickelungen sich als Summen von $A$-Funktionen darstellen, die längs der betreffenden Schleife $s_\nu$ genommen sind.

Die Darstellung der Fundamentalsubstitutionen durch die aus der Methode der sukzessiven Approximationen gewonnenen Reihen kann auch mit Vorteil zum Zwecke der numerischen Berechnung dieser Substitutionen für ein gegebenes Differentialsystem benutzt werden; wir gehen hier auf diese Art von Fragen nicht näher ein.

Wenn das Differentialsystem (A) ein **schlechthin kanonisches**, also von der Form (20) der vorigen Vorlesung:

$$\frac{dy_\varkappa}{dx} = \sum_{\lambda=1}^{n} y_\lambda \sum_{\nu=1}^{\sigma} \frac{A_{\lambda\varkappa}^{(\nu)}}{x-a_\nu} \qquad (\varkappa = 1, 2, \cdots, n)$$

ist, so sind die Elemente der Integralmatrix $(y_{i\varkappa})$, die sich für $x = x_0$ auf $(\delta_{i\varkappa})$ reduziert, ganze transzendente Funktionen der Elemente $A_{i\varkappa}^{(\nu)}$ der Residuenmatrizen:

(16) $$y_{i\varkappa} = E_{i\varkappa}(A_{11}^{(1)}, \cdots, A_{nn}^{(\sigma)}), \qquad (i, \varkappa = 1, 2, \cdots, n)$$

also in beständig konvergente Reihen entwickelbar, die nach positiven ganzen Potenzen der $A_{11}^{(1)}, \ldots, A_{nn}^{(\sigma)}$ fortschreiten. Die Koeffizienten der nach Potenzen der $A_{i\varkappa}^{(\nu)}$ fortschreitenden, beständig konvergenten Reihen sind als Summen von $\varLambda$-Funktionen darstellbar, in denen aber jetzt die ganzen Zahlen $\varkappa_1, \ldots, \varkappa_{q+1}$ sämtlich gleich **Eins** sind; der bei Bildung der $\varLambda$-Funktionen zu benutzende Integrationsweg ist, wie im allgemeinen Falle, der Weg, auf dem die Integralmatrix $(y_{i\varkappa})$ selbst erstreckt ist. Diese $\varLambda$-Funktionen haben also die Form

$$\varLambda(x;\, \alpha_1) = \int_{x_0}^{x} \frac{dx}{x-\alpha_1}, \qquad \varLambda(x;\, \alpha_1, \alpha_2) = \int_{x_0}^{x} \frac{\varLambda(x;\, \alpha_1)\,dx}{x-\alpha_2},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\varLambda(x;\, \alpha_1, \ldots, \alpha_q, \alpha_{q+1}) = \int_{x_0}^{x} \frac{\varLambda(x;\, \alpha_1, \ldots, \alpha_q)\,dx}{x-\alpha_{q+1}}.$$

Die Elemente der Fundamentalsubstitutionen $(\mathsf{A}_{i\varkappa}^{(\nu)})$ erscheinen ebenfalls als ganze transzendente Funktionen

(17) $$\mathsf{A}_{i\varkappa}^{(\nu)} = E_{i\varkappa}^{(\nu)}(A_{11}^{(1)}, \ldots, A_{nn}^{(\sigma)}) \qquad \left(\begin{matrix} i, \varkappa = 1, 2, \cdots, n; \\ \nu = 1, 2, \cdots, \sigma \end{matrix}\right)$$

der Elemente der Residuenmatrizen, und zwar gehen diese Reihen aus den Reihen (16) einfach dadurch hervor, daß wir sowohl für die Integralmatrix $(y_{i\varkappa})$ als auch für die bei der Bildung der $\varLambda$-Funktionen auszuführenden Integrationen als Integrationswege die von $x_0$ aus um die Punkte $a_\nu$ herumgelegten Schleifen $s_\nu$ wählen, die die Schnitte $l_\nu$ einmal überschreiten.

Beachten wir die Form, in der die einzelnen Glieder $u_{i\varkappa}^{(0)}, u_{i\varkappa}^{(1)}, \ldots$ der Reihen (14) für das schlechthin kanonische Differentialsystem erscheinen, so haben wir nach (3) z. B. für das in den $A_{i\varkappa}^{(\lambda)}$ lineare Glied:

$$(u_{i\varkappa}^{(1)}) = \int_{x_0}^{x} (a_{i\varkappa})\,dx = \left(\sum_{\lambda=1}^{\sigma} A_{i\varkappa}^{(\lambda)} \int_{x_0}^{x} \frac{dx}{x-a_\lambda}\right).$$

Das in den $A_{11}^{(1)}, \ldots, A_{nn}^{(\sigma)}$ lineare Glied der Entwickelung (17) für $\mathsf{A}_{ix}^{(\nu)}$ lautet demnach

$$\sum_{\lambda=1}^{\sigma} A_{ix}^{(\lambda)} \int\limits_{(s_\nu)} \frac{dx}{x-a_\lambda},$$

also ergibt sich, da

$$\int\limits_{(s_\nu)} \frac{dx}{x-a_\lambda} = 0, \qquad (\text{für } \lambda \neq \nu)$$

$$\int\limits_{(s_\nu)} \frac{dx}{x-a_\nu} = 2\pi\sqrt{-1}$$

ist,

(17a) $$\mathsf{A}_{ix}^{(\nu)} = \delta_{ix} + 2\pi\sqrt{-1}\,A_{ix}^{(\nu)} + \cdots, \qquad \begin{pmatrix} i, x = 1, 2, \cdots, n \\ \nu = 1, 2, \cdots, \sigma \end{pmatrix}$$

wo die durch Punkte angedeuteten Glieder in den $A_{11}^{(1)}, \ldots, A_{nn}^{(\sigma)}$ von der zweiten und von höherer Dimension sind.

Denken wir uns die Funktionaldeterminante der $n^2\sigma$ ganzen transzendenten Funktionen $E_{ix}^{(\nu)}$ nach den $n^2\sigma$ Größen $A_{ix}^{(\nu)}$ gebildet:

$$\Delta = \left| \frac{\partial \mathsf{A}_{ix}^{(\nu)}}{\partial A_{j\lambda}^{(\mu)}} \right|, \qquad \begin{pmatrix} i, x, j, \lambda = 1, 2, \cdots, n \\ \nu, \mu = 1, 2, \cdots, \sigma \end{pmatrix}$$

so hat diese Funktionaldeterminante für die Stelle

$$A_{11}^{(1)} = 0, \ \cdots, \ A_{nn}^{(\sigma)} = 0$$

den Wert

$$\Delta_{0, \ldots, 0} = (2\pi\sqrt{-1})^{n^2\sigma},$$

sie ist also jedenfalls nicht identisch gleich Null.

Wir wollen uns nun die $a_1, \ldots, a_\sigma$ als feste Größen denken und die Inversen der ganzen transzendenten Funktionen (17) ins Auge fassen. Diese inversen Funktionen sind natürlich im allgemeinen unendlich vieldeutig, wir können aber über die Art dieser Vieldeutigkeit sofort eine wichtige Bemerkung machen. — Wenn wir uns der Einfachheit wegen auf den Fall beschränken, wo die zu den Matrizen $(\mathsf{A}_{ix}^{(1)}, \ldots, \mathsf{A}_{ix}^{(\sigma)})$ und

$$(\mathsf{A}_{ix}^{(\sigma+1)}) = (\mathsf{A}_{ix}^{(1)})^{-1} \cdots (\mathsf{A}_{ix}^{(\sigma)})^{-1}$$

gehörigen Fundamentalgleichungen lauter einfache Wurzeln

$$\omega_i^{(\nu)} \qquad (i = 1, 2, \cdots, n;\ \nu = 1, 2, \cdots, \sigma + 1)$$

besitzen, so folgt aus dem Fundamentallemma der vorigen Vorlesung (S. 234), daß die $A_{ix}^{(\nu)}$ eindeutig bestimmt sind, wenn wir die Wurzeln $r_i^{(\nu)}$ der zu den Punkten $a_1, \ldots, a_\sigma, \infty$ gehörigen determinierenden

Fundamentalgleichungen (Gleichungen (26), (27) der vorigen Vorlesung S. 232) fixieren. Wenn wir also für die

$$r_i^{(\nu)} = \frac{\log \omega_i^{(\nu)}}{2\pi\sqrt{-1}} \qquad (i = 1, 2, \cdots, n;\ \nu = 1, 2, \cdots, \sigma + 1)$$

die Determinationen der Logarithmen auf irgendeine Weise, aber in Übereinstimmung mit der Fuchsschen Relation

$$\sum_{\nu=1}^{\sigma+1} \sum_{i=1}^{n} r_i^{(\nu)} = 0$$

festlegen, so haben wir ein eindeutig bestimmtes Zweigsystem der Inversen der ganzen transzendenten Funktionen (17) ausgesondert.

Im Falle $n = 1$, $\sigma = 1$, wo

$$\mathsf{A}_{11}^{(1)} = e^{2\pi\sqrt{-1}\, A_{11}^{(1)}}$$

ist, kommt dies darauf hinaus, daß wir die Variabilität von $A_{11}^{(1)}$ auf einen Periodenstreifen der Exponentialfunktion beschränken; im allgemeinen Falle können wir sagen, daß wir durch Festlegen der Determinationen der $\log \omega_i^{(\nu)}$ einen Fundamentalbereich für die ganzen transzendenten Funktionen $E_{i\varkappa}^{(\nu)}$ der $A_{11}^{(1)}, \ldots, A_{nn}^{(\sigma)}$ erhalten, innerhalb dessen diese Funktionen jedes Wertesystem, dessen sie fähig sind, ein einziges Mal annehmen.

Beim Übergange von einem Zweigsysteme der $A_{11}^{(1)}, \ldots, A_{nn}^{(\sigma)}$ zu einem andern müssen sich also notwendig einige der Determinationen der $\log \omega_i^{(\nu)}$ geändert, d. h. um ganzzahlige Multipla von $2\pi\sqrt{-1}$ vermehrt haben; ein solcher Übergang kann also nur dadurch erfolgen, daß die $\mathsf{A}_{i\varkappa}^{(\nu)}$ solche geschlossene Bahnen beschreiben, bei denen die betreffenden $\omega_i^{(\nu)}$ $(\nu = 1, 2, \cdots, \sigma + 1;\ i = 1, 2, \cdots, n)$ einen den Punkt $\omega_i^{(\nu)} = 0$ umkreisenden geschlossenen Weg durchlaufen. Nun entsprechen aber den Gleichungen

$$\omega_i^{(\nu)} = 0 \qquad (\nu = 1, 2, \cdots, \sigma + 1;\ i = 1, 2, \cdots, n)$$

diejenigen Stellen der Mannigfaltigkeit aller $\mathsf{A}_{i\varkappa}^{(1)}, \ldots, \mathsf{A}_{i\varkappa}^{(\sigma)}$, für die mindestens eine der Determinanten

$$|\mathsf{A}_{i\varkappa}^{(1)}|,\ |\mathsf{A}_{i\varkappa}^{(2)}|,\ \ldots,\ |\mathsf{A}_{i\varkappa}^{(\sigma)}| \qquad (i, \varkappa = 1, 2, \cdots, n)$$

verschwindet; wir können also sagen, daß die Mannigfaltigkeiten

$$|\mathsf{A}_{i\varkappa}^{(\nu)}| = 0 \qquad (\nu = 1, 2, \cdots, \sigma)$$
$$(i, \varkappa = 1, 2, \cdots, n)$$

die Verzweigungsmannigfaltigkeiten für die Inversen der ganzen transzendenten Funktionen $E_{i\varkappa}^{(\nu)}$ darstellen.

Was den Zusammenhang anlangt, der zwischen den verschiedenen Zweigsystemen der $A_{11}^{(1)}, \ldots, A_{\varkappa\varkappa}^{(\sigma)}$ besteht, so können wir noch das Folgende feststellen.

Es mögen

$$A_{11}^{(1)}, \ldots, A_{\varkappa\varkappa}^{(\sigma)},$$

$$\bar{A}_{11}^{(1)}, \ldots, \bar{A}_{\varkappa\varkappa}^{(\sigma)}$$

zwei verschiedene Wertesysteme darstellen, die zu einem und demselben Wertesysteme der

$$\mathsf{A}_{11}^{(1)}, \ldots, \mathsf{A}_{\varkappa\varkappa}^{(\sigma)}$$

gehören. Bilden wir dann die beiden Differentialsysteme

$$(\alpha) \qquad \frac{dy_\varkappa}{dx} = \sum_{\lambda=1}^{\varkappa} y_\lambda \sum_{\nu=1}^{\sigma} \frac{A_{\lambda\varkappa}^{(\nu)}}{x-a_\nu} \qquad (\varkappa = 1, 2, \cdots, n)$$

$$(\beta) \qquad \frac{d\bar{y}_\varkappa}{dx} = \sum_{\lambda=1}^{\varkappa} \bar{y}_\lambda \sum_{\nu=1}^{\sigma} \frac{\bar{A}_{\lambda\varkappa}^{(\nu)}}{x-a_\nu}, \qquad (\varkappa = 1, 2, \cdots, n)$$

so gehören diese, und genauer die Integralmatrizen

$$(y_{i\varkappa}) = (\bar{T})\widehat{\int_{x_0}^{x}}\left(\sum_{\nu=1}^{\sigma} \frac{A_{i\varkappa}^{(\nu)}}{x-a_\nu}\,dx + \delta_{i\varkappa}\right),$$

$$(\bar{y}_{i\varkappa}) = (\bar{T})\widehat{\int_{x_0}^{x}}\left(\sum_{\nu=1}^{\sigma} \frac{\bar{A}_{i\varkappa}^{(\nu)}}{x-a_\nu}\,dx + \delta_{i\varkappa}\right)$$

zu derselben Klasse. Es besteht folglich eine Beziehung von der Form

$$(\bar{y}_{i\varkappa}) = (y_{i\varkappa})(r_{i\varkappa}),$$

wo $(r_{i\varkappa})$ eine Matrix rationaler Funktionen von $x$ bedeutet, für die

$$(r_{i\varkappa}(x_0)) = (\delta_{i\varkappa})$$

ist. Die Aufstellung der allgemeinsten Matrix $(r_{i\varkappa})$, die in diesem Sinne den Übergang von einem schlechthin kanonischen Differentialsystem $(\alpha)$ zu einem andern ebenfalls schlechthin kanonischen Differentialsystem $(\beta)$ derselben Klasse vermittelt, wobei $(\alpha)$ sowohl wie $(\beta)$ auch keinen außerwesentlich singulären Punkt aufweisen, ist ein einfaches algebraisches Problem. Denken wir uns dieses gelöst, so haben

wir nach der Regel (IV) der zweiten Vorlesung zwischen den Koeffizientenmatrizen der Systeme ($\alpha$), ($\beta$) die Beziehung

$$\left(\sum_{\nu=1}^{\sigma}\frac{\bar{A}_{ix}^{(\nu)}}{x-a_\nu}\right)=(r_{ix})^{-1}\left(\sum_{\nu=1}^{\sigma}\frac{A_{ix}^{(\nu)}}{x-a_\nu}\right)(r_{ix})+D_x(r_{ix}).$$

Aus dieser Beziehung lassen sich die $\bar{A}_{11}^{(1)}, \ldots, \bar{A}_{nn}^{(\sigma)}$ direkt durch die $A_{11}^{(1)}, \ldots, A_{nn}^{(\sigma)}$ ausdrücken; diese Ausdrücke stellen dann, wenn $(r_{ix})$ die allgemeinste Matrix von der bezeichneten Beschaffenheit bedeutet, das allgemeinste Zweigsystem der Inversen der Funktionen $E_{ix}^{(\nu)}$ durch irgendein bestimmtes solches Zweigsystem dar.

Es sei

$$A_{11}^{(1)}=a_{11}^{(1)}, \ldots, A_{nn}^{(\sigma)}=a_{nn}^{(\sigma)}$$

ein bestimmtes Wertesystem, dem vermöge der Gleichungen (17) die Werte

$$\mathsf{A}_{11}^{(1)}=\alpha_{11}^{(1)}, \ldots, \mathsf{A}_{nn}^{(\sigma)}=\alpha_{nn}^{(\sigma)}$$

entsprechen. Wenn wir von dem Wertesystem $(\alpha_{11}^{(1)}, \ldots, \alpha_{nn}^{(\sigma)})$ zu einem unendlich benachbarten Wertesystem übergehen, so wird diesem nur ein dem Wertesysteme $(a_{11}^{(1)}, \ldots, a_{nn}^{(\sigma)})$ unendlich benachbartes Wertesystem der $A_{11}^{(1)}, \ldots, A_{nn}^{(\sigma)}$ vermöge der Gleichungen (17) entsprechen können; denn beim Übergange von $(a_{11}^{(1)}, \ldots, a_{nn}^{(\sigma)})$ zu einem unendlich benachbarten Wertesysteme, können die Wurzeln der determinierenden Fundamentalgleichungen auch nur infinitesimale Änderungen erfahren, sie können sich also nicht um additive ganze Zahlen geändert haben. Wir können also um das Wertesystem $(\alpha_{11}^{(1)}, \ldots, \alpha_{nn}^{(\sigma)})$ eine endliche Umgebung ($\alpha$), und um das Wertesystem $(a_{11}^{(1)}, \ldots, a_{nn}^{(\sigma)})$ eine ebenfalls endliche Umgebung ($a$) so abgrenzen, daß jedem Wertesystem der $\mathsf{A}_{ix}^{(\nu)}$, das innerhalb ($\alpha$) liegt, ein und nur ein Wertesystem der $A_{ix}^{(\nu)}$ entspricht, das sich innerhalb ($a$) befindet. Daraus folgt, daß für das Wertesystem $(a_{11}^{(1)}, \ldots, a_{nn}^{(\sigma)})$ die Funktionaldeterminante der Funktionen $E_{ix}^{(\nu)}$ nach den $A_{11}^{(1)}, \ldots, A_{nn}^{(\sigma)}$ nicht verschwinden kann. Wir können also sagen:

Die Funktionaldeterminante der ganzen transzendenten Funktionen $E_{ix}^{(\nu)}$ nach den $A_{11}^{(1)}, \ldots, A_{nn}^{(\sigma)}$ kann für kein endliches Wertesystem der letzteren Größen verschwinden.

* * *

Wir wollen nun gleich feststellen, wie sich die Aufgabe, die Lösbarkeit des Riemannschen Problems zu erweisen, im Hinblick auf die ganzen transzendenten Funktionen $E_{ix}^{(\nu)}$ gestaltet.

Offenbar handelt es sich darum, zu zeigen, daß diese ganzen transzendenten Funktionen alle möglichen Wertesysteme annehmen können, die den durch die Natur der $\mathsf{A}_{ix}^{(\nu)}$ als Fundamentalsubstitutionen gebotenen Beschränkungen unterliegen,*) wenn man sich die $a_1, \ldots, a_\sigma$ nach wie vor fest, aber willkürlich gegeben und die $A_{11}^{(1)}, \ldots, A_{nn}^{(\sigma)}$ im Endlichen unbeschränkt veränderlich vorstellt. — Aus der bisherigen Diskussion der ganzen transzendenten Funktionen $E_{ix}^{(\nu)}$ folgt, daß die Wertesysteme dieser Funktionen jedenfalls im Bereiche der $\mathsf{A}_{11}^{(1)}, \ldots, \mathsf{A}_{nn}^{(\sigma)}$ einen in sich zusammenhängenden, ebensovielfach ausgedehnten Bereich erfüllen, wie es der Bereich der $A_{11}^{(1)}, \ldots, A_{nn}^{(\sigma)}$ selbst ist. — Wenn wir es mit einer ganzen transzendenten Funktion von einer unabhängigen Variabeln zu tun hätten (wie im Falle $n = 1$, $\sigma = 1$), so könnte man nach einem berühmten Satze von E. Picard ohne weiteres schließen, daß diese Funktion tatsächlich jeden Wert — höchstens mit Ausnahme eines einzigen — annimmt. Da jedoch eine Verallgemeinerung dieses Satzes auf Systeme von ganzen transzendenten Funktionen von mehreren Variabeln bisher nicht bekannt geworden ist, so müssen wir unsere Aufgabe für das System (17) direkt in Angriff nehmen.

Zunächst können wir uns natürlich die $A_{ix}^{(\nu)}$ auf einen Fundamentalbereich der ganzen transzendenten Funktion (17) beschränkt denken. Die Entscheidung der Frage, ob diese ganzen transzendenten Funktionen dann wirklich jedes zulässige Wertesystem annehmen können, wird, wie wir in der sechzehnten Vorlesung sehen werden, wesentlich davon abhängen, welchen Werten die in Rede stehenden Funktionen zustreben, wenn die $A_{ix}^{(\nu)}$ sich, aus dem Innern des Fundamentalbereiches kommend, einer Unbestimmtheitsstelle dieser Funktionen annähern. Spezieller werden wir — da wir den „leichteren Teil“ des Riemannschen Problems (vgl. die vorige Vorlesung, S. 236) direkt lösen können — zu untersuchen haben, welchen Grenzwerten die Funktionen (17) zustreben, wenn einige (eine oder mehrere) der Größen $A_{ix}^{(\nu)}$ so über alle Grenzen wachsen, daß die Größen $r_i^{(\nu)}$ überhaupt fest bleiben.

---

*) Diese Beschränkungen bestehen darin, daß die Determinanten $|\mathsf{A}_{ix}^{(\nu)}|$ von Null verschieden sein müssen; hierzu tritt — bei der von uns festgehaltenen vereinfachenden Voraussetzung — noch, daß die Fundamentalgleichungen

$$|\mathsf{A}_{ix}^{(\nu)} - \delta_{ix}\omega| = 0 \qquad (\nu = 1, 2, \cdots, \sigma + 1)$$

keine mehrfachen Wurzeln haben sollen.

Um nicht von vornherein in überflüssiger Weise zu spezialisieren, führen wir diese Untersuchung zunächst in allgemeinerer Weise, indem wir nämlich für das Differentialsystem (A) die Koeffizienten $a_{i\varkappa}$ von der Form (6) voraussetzen und die Integralmatrix $(y_{i\varkappa})$, die für $x = x_0$ die durch die Gleichungen (8) dargestellten Werte $(\gamma_{i\varkappa})$ annimmt, also in der Umgebung von $\mu = \infty$ durch die Laurentschen Reihen (15) darstellbar ist, für große Werte von $\mu$ untersuchen. Mit Rücksicht auf das Ziel, das wir verfolgen, lassen wir die vereinfachende Annahme Platz greifen, daß in den Reihen (6) die ganze Zahl $\tau = 1$, und in den Reihen (8) die ganze Zahl $k = 0$ sei; im übrigen bemerken wir, daß die anzuwendende Methode mutatis mutandis auch für beliebige ganzzahlige positive Werte von $\tau$ und $k$ bestehen bleibt.

Wir beschäftigen uns also mit der folgenden Frage:

Das Differentialsystem (A) sei so beschaffen, daß seine Koeffizienten $a_{i\varkappa}$ in der Umgebung $|\mu| > R$ von $\mu = \infty$, wo $R$ von $x$ unabhängig ist, in der Form

$$a_{i\varkappa} = \mu\left(a_{i\varkappa}^{(0)} + \frac{a_{i\varkappa}^{(1)}}{\mu} + \cdots \text{ in inf.}\right) \tag{18}$$

entwickelbar sind. Es soll das Verhalten der Integrale $(y_{i\varkappa})$ untersucht werden, wenn $\mu$ sich der Unbestimmtheitsstelle $\mu = \infty$ annähert.

Wir werden ähnlich wie in der elften und zwölften Vorlesung von einer asymptotischen Darstellung der $y_{i\varkappa}$ Gebrauch machen, und stellen zunächst formale Reihen auf, die nach dem Muster der Thoméschen Normalreihen gebildet sind und das Differentialsystem befriedigen. Über den analytischen Charakter der $a_{i\varkappa}$ als Funktionen von $x$ machen wir vorläufig keine näheren Voraussetzungen.

Wir setzen

$$y_\varkappa = e^{\mu\omega}\left(y_\varkappa^{(0)} + \frac{y_\varkappa^{(1)}}{\mu} + \frac{y_\varkappa^{(2)}}{\mu^2} + \cdots \text{ in inf.}\right) \quad (\varkappa = 1, 2, \cdots, n) \tag{19}$$

und wollen die $\omega$, $y_\varkappa^{(0)}$, $y_\varkappa^{(1)}$, $y_\varkappa^{(2)}$, ... als von $\mu$ unabhängige Funktionen von $x$ so zu bestimmen suchen, daß die Reihen (19) das Differentialsystem formell befriedigen. — Durch formale Differentiation der Reihen (19) nach $x$ erhalten wir

$$\begin{aligned}\frac{dy_\varkappa}{dx} &= e^{\mu\omega}\mu\frac{d\omega}{dx}\left(y_\varkappa^{(0)} + \frac{y_\varkappa^{(1)}}{\mu} + \cdots\right)\\ &\quad + e^{\mu\omega}\left(\frac{dy_\varkappa^{(0)}}{dx} + \frac{1}{\mu}\frac{dy_\varkappa^{(1)}}{dx} + \cdots\right) \quad (\varkappa = 1, 2, \cdots, n)\end{aligned}$$

also, indem wir in das Differentialsystem (A) einsetzen und den Faktor $e^{\mu\omega}$ unterdrücken:

$$\frac{dy_\varkappa^{(0)}}{dx} + \frac{1}{\mu}\frac{dy_\varkappa^{(1)}}{dx} + \cdots + \mu\frac{d\omega}{dx}\left(y_\varkappa^{(0)} + \frac{1}{\mu}y_\varkappa^{(1)} + \cdots\right)$$
$$= \sum_{\lambda=1}^{n} \mu\left(y_\lambda^{(0)} + \frac{1}{\mu}y_\lambda^{(1)} + \cdots\right)\left(a_{\lambda\varkappa}^{(0)} + \frac{1}{\mu}a_{\lambda\varkappa}^{(1)} + \cdots\right).$$

Vergleichen wir auf beiden Seiten dieser Gleichungen die Koeffizienten gleichhoher Potenzen von $\mu$, so finden wir:

$$\text{(20)}\qquad \frac{d\omega}{dx}y_\varkappa^{(0)} = \sum_{\lambda=1}^{n} y_\lambda^{(0)}a_{\lambda\varkappa}^{(0)},$$

$$\text{(21)}\qquad \frac{dy_\varkappa^{(0)}}{dx} + \frac{d\omega}{dx}y_\varkappa^{(1)} = \sum_\lambda \left(y_\lambda^{(0)}a_{\lambda\varkappa}^{(1)} + y_\lambda^{(1)}a_{\lambda\varkappa}^{(0)}\right),$$

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

$$\text{(22)}\qquad \frac{dy_\varkappa^{(\nu)}}{dx} + \frac{d\omega}{dx}y_\varkappa^{(\nu+1)} = \sum_\lambda \left(y_\lambda^{(0)}a_{\lambda\varkappa}^{(\nu+1)} + y_\lambda^{(1)}a_{\lambda\varkappa}^{(\nu)} + \cdots + y_\lambda^{(\nu+1)}a_{\lambda\varkappa}^{(0)}\right).$$
$$(\nu = 1, 2, 3, \cdots)$$

Die ersten Gleichungen (20) können zur Bestimmung von $\omega$ dienen. Wenn wir nämlich diese Gleichungen in der Form

$$\text{(20a)}\qquad \sum_{\lambda=1}^{n} y_\lambda^{(0)}\left(a_{\lambda\varkappa}^{(0)} - \delta_{\lambda\varkappa}\varpi\right) = 0 \qquad (\varkappa = 1, 2, \cdots, n)$$

schreiben, wo

$$\varpi = \frac{d\omega}{dx}$$

gesetzt wurde, so erkennen wir sofort, daß $\varpi$ als Wurzel der Gleichung

$$\text{(23)}\qquad \left|a_{\lambda\varkappa}^{(0)} - \delta_{\lambda\varkappa}\varpi\right| = 0$$
$$(\lambda, \varkappa = 1, 2, \cdots, n)$$

gewählt werden muß. Diese Gleichung, die wir auch hier die charakteristische Gleichung nennen wollen, ist eine Differentialgleichung erster Ordnung und $n$-ten Grades für $\omega$; bezeichnen wir mit

$$\varpi_1, \ldots, \varpi_n$$

ihre Wurzeln, so erhalten wir $n$ Werte für $\omega$, nämlich

$$\text{(24)}\qquad \omega_i = \int \varpi_i\, dx. \qquad (i = 1, 2, \cdots, n)$$

Wir wollen im folgenden voraussetzen, daß die Diskriminante der Gleichung (23) in bezug auf $\varpi$ nicht identisch verschwindet, so daß also nur für spezielle Werte von $x$ zwei oder mehrere der

Funktionen $\varpi_1, \ldots, \varpi_n$ einander gleich werden können. Wir setzen dann, entsprechend den $n$ verschiedenen Werten von $\omega$, gleich

$$y_{i\varkappa} = e^{\mu \omega_i}\left(y_{i\varkappa}^{(0)} + \frac{1}{\mu} y_{i\varkappa}^{(1)} + \cdots\right) \tag{25} \qquad (i, \varkappa = 1, 2, \cdots, n)$$

und haben also für die Verhältnisse

$$y_{i1}^{(0)} : y_{i2}^{(0)} : \cdots : y_{in}^{(0)}$$

die Gleichungen

$$\sum_{\lambda=1}^{n} y_{i\lambda}^{(0)} (a_{\lambda\varkappa}^{(0)} - \delta_{\lambda\varkappa}\varpi_i) = 0, \tag{26} \qquad (i, \varkappa = 1, 2, \cdots, n)$$

die aus (20a) hervorgehen, wenn wir $\varpi$ durch $\varpi_i$ ersetzen. Da die $\varpi_1, \ldots, \varpi_n$ voneinander verschieden sind, ist (vgl. S. 98) die Determinante der $y_{i\lambda}^{(0)}$, deren Verhältnisse den Gleichungen (26) gemäß bestimmt sind, nicht identisch gleich Null:

$$|y_{i\varkappa}^{(0)}| \neq 0. \tag{27} \qquad (i, \varkappa = 1, 2, \cdots, n)$$

Um nun noch den Proportionalitätsfaktor der $y_{i\lambda}^{(0)}$ und die folgenden $y_{i\lambda}^{(1)}, y_{i\lambda}^{(2)}, \ldots$ bestimmen zu können, wenden wir eine die Rechnung abkürzende Transformation an.

Es bedeute $u_{i\varkappa}^{(0)}$ irgendein Lösungssystem der Gleichungssysteme (26), dann ist also

$$\sum_{\lambda=1}^{n} u_{i\lambda}^{(0)}(a_{\lambda\varkappa}^{(0)} - \delta_{\lambda\varkappa}\varpi_i) = 0$$

und folglich

$$(u_{i\varkappa}^{(0)})(a_{i\varkappa}^{(0)})(u_{i\varkappa}^{(0)})^{-1} = (\varpi_i \delta_{i\varkappa}). \tag{28}$$

Setzen wir nun

$$y_\varkappa = \sum_{\lambda=1}^{n} z_\lambda u_{\lambda\varkappa}^{(0)}, \tag{29} \qquad (\varkappa = 1, 2, \cdots, n)$$

so befriedigen die $z_1, \ldots, z_n$ das Differentialsystem

$$\frac{dz_\varkappa}{dx} = \sum_{\lambda=1}^{n} z_\lambda b_{\lambda\varkappa}, \tag{B} \qquad (\varkappa = 1, 2, \cdots, n)$$

wo nach der Regel (IV) der zweiten Vorlesung $(b_{i\varkappa})$ aus der Gleichung

$$(a_{i\varkappa}) = (u_{i\varkappa}^{(0)})^{-1}(b_{i\varkappa})(u_{i\varkappa}^{(0)}) + D_x(u_{i\varkappa}^{(0)}) \tag{30}$$

zu entnehmen ist. Mit Rücksicht auf die Entwickelungen (18) finden

wir demnach für die $b_{i\varkappa}$ die in der Umgebung $|\mu| > R$ von $\mu = \infty$ gültigen Darstellungen

(31) $$b_{i\varkappa} = \mu\left(\delta_{i\varkappa}\varpi_i + \frac{b_{i\varkappa}^{(1)}}{\mu} + \frac{b_{i\varkappa}^{(2)}}{\mu^2} + \cdots \text{ in inf.}\right),$$

wo

(32) $$\begin{cases} (b_{i\varkappa}^{(1)}) = (u_{i\varkappa}^{(0)})(a_{i\varkappa}^{(1)})(u_{i\varkappa}^{(0)})^{-1} - \left(\dfrac{du_{i\varkappa}^{(0)}}{dx}\right)(u_{i\varkappa}^{(0)})^{-1}, \\ (b_{i\varkappa}^{(\nu)}) = (u_{i\varkappa}^{(0)})(a_{i\varkappa}^{(\nu)})(u_{i\varkappa}^{(0)})^{-1} \qquad (\nu = 2, 3, \cdots) \end{cases}$$

gesetzt wurde. Wenn nun

(33) $$(y_{i\varkappa}) = (z_{i\varkappa})(u_{i\varkappa}^{(0)})$$

gesetzt wird, so haben wir

(34) $$z_{i\varkappa} = e^{\mu\omega_i}\left(z_{i\varkappa}^{(0)} + \frac{z_{i\varkappa}^{(1)}}{\mu} + \cdots \text{ in inf.}\right),$$

und die den Gleichungen (20) entsprechenden Gleichungen

$$\frac{d\omega_i}{dx} z_{i\varkappa}^{(0)} = z_{i\varkappa}^{(0)}\varpi_\varkappa$$

liefern für $i = \varkappa$

$$\frac{d\omega_i}{dx} = \varpi_i, \qquad \omega_i = \int \varpi_i\, dx$$

und für $i \neq \varkappa$

(35) $$z_{i\varkappa} = 0.$$

Die den Gleichungen (21), (22) entsprechenden Gleichungen lauten jetzt

(36) $$\frac{dz_{i\varkappa}^{(0)}}{dx} + \varpi_i z_{i\varkappa}^{(1)} = \sum_{\lambda=1}^{n}\left(z_{i\lambda}^{(0)} b_{\lambda\varkappa}^{(1)} + z_{i\lambda}^{(1)}\delta_{\lambda\varkappa}\varpi_\lambda\right),$$

(37) $$\frac{dz_{i\varkappa}^{(\nu)}}{dx} + \varpi_i z_{i\varkappa}^{(\nu+1)} = \sum_{\lambda=1}^{n}\left(z_{i\lambda}^{(0)} b_{\lambda\varkappa}^{(\nu+1)} + \cdots + z_{i\lambda}^{(\nu)} b_{\lambda\varkappa}^{(1)} + z_{i\lambda}^{(\nu+1)}\delta_{\lambda\varkappa}\varpi_\lambda\right), \qquad (\nu = 1, 2, 3, \cdots)$$

und wir finden aus (36) für $i = \varkappa$

(38) $$\frac{dz_{ii}^{(0)}}{dx} = z_{ii}^{(0)} b_{ii}^{(1)}, \qquad z_{ii}^{(0)} = c_i e^{\int b_{ii}^{(1)} dx},$$

wo die $c_i$ Konstanten bedeuten, und für $i \neq \varkappa$

$$\varpi_i z_{i\varkappa}^{(1)} = z_{ii}^{(0)} b_{i\varkappa}^{(1)} + \varpi_\varkappa z_{i\varkappa}^{(1)},$$

also

(39) $$z_{i\varkappa}^{(1)} = \frac{c_i e^{\int b_{ii}^{(1)} dx}\, b_{i\varkappa}^{(1)}}{\varpi_i - \varpi_\varkappa}. \qquad (i \neq \varkappa)$$

Aus (37) folgt ferner für $\nu = 1$, $i = \varkappa$

$$\frac{dz_{ii}^{(1)}}{dx} = c_i e^{\int b_{ii}^{(1)} dx}\left\{ b_{ii}^{(2)} + \sum_{\lambda \neq i} \frac{b_{i\lambda}^{(1)} b_{\lambda i}^{(1)}}{\varpi_i - \varpi_\lambda} \right\} + z_{ii}^{(1)} b_{ii}^{(1)}, \tag{40}$$

woraus die $z_{ii}^{(1)}$ durch Quadraturen berechenbar sind usw.; wir sehen, daß die Koeffizienten der Reihen (34) mit Hilfe der Rekursionsformeln (37) insgesamt durch Quadraturen dargestellt werden können.

Aus den Koeffizienten der Reihen (34) ergeben sich die Koeffizienten der Reihen (25) mit Hilfe der Formeln

$$(y_{i\varkappa}^{(\nu)}) = (z_{i\varkappa}^{(\nu)})(u_{i\varkappa}^{(0)}), \qquad (\nu = 0, 1, 2, \cdots)$$

wir erhalten also insbesondere mit Rücksicht auf die Gleichungen (35) und (38)

$$y_{i\varkappa}^{(0)} = c_i e^{\int b_{ii}^{(1)} dx} u_{i\varkappa}^{(0)}. \tag{41}$$

Auf diese Weise ist es also — unter der Voraussetzung, daß die Diskriminante der charakteristischen Gleichung (23) nicht identisch verschwindet — gelungen, eine Matrix $(y_{i\varkappa})$ von Reihen der Form (19) zu bestimmen, die dem Differentialsystem (A) formell Genüge leisten. Diese Reihen sind — ähnlich wie die Thoméschen Normalreihen — im allgemeinen divergent.

Wir wenden uns sogleich dazu, nachzuweisen, daß diese divergenten Reihen, die wir als parametrische Normalreihen bezeichnen wollen, für große Werte des Parameters $\mu$ gewisse Integralsysteme asymptotisch darstellen.

Zu dem Ende schreiben wir das Differentialsystem (B) in der Form

$$\frac{dz_\varkappa}{dx} = \mu \bar{\omega}_\varkappa z_\varkappa + \sum_{\lambda=1}^{n} z_\lambda Q_{\lambda\varkappa}, \tag{Ba}$$

wo also

$$Q_{\lambda\varkappa} = b_{\lambda\varkappa}^{(1)} + \frac{1}{\mu} b_{\lambda\varkappa}^{(2)} + \cdots \text{ in inf.}; \tag{42}$$

fürs erste wird es aber genügen, vorauszusetzen, daß die $Q_{\lambda\varkappa}$ die Eigenschaft haben, daß

$$\lim_{\mu=\infty} \frac{1}{\mu} Q_{\lambda\varkappa} = 0 \tag{43}$$

ist.

Um bei den nun folgenden quantitativen Untersuchungen bestimmte analytische Verhältnisse zugrunde legen zu können, machen wir über

die Koeffizienten $a_{ix}$ des Differentialsystems (A) jetzt die folgenden Annahmen.

Die $a_{ix}$ seien rationale Funktionen von $x$, ebenso seien die Koeffizienten der Reihenentwickelungen (18), d. h. die $a_{ix}^{(0)}, a_{ix}^{(1)}, \ldots$ rationale Funktionen von $x$ und zwar so beschaffen, daß ihre Pole unter den Polen der $a_{ix}$ enthalten sind. Die durch die charakteristische Gleichung (23) definierte Funktion $\varpi$ ist dann eine algebraische Funktion von $x$, und die $\omega_i$ selbst sind Abelsche Integrale. Die $u_{ix}^{(0)}$ können als rationale Funktionen des durch die Gleichung (23) verknüpften Wertepaares $(x, \varpi_i)$ gewählt werden.

Unter einem regulären $x$-Werte verstehen wir einen Wert, der weder zu den singulären Stellen des Differentialsystems (A), noch zu den singulären Stellen der algebraischen Funktion $\varpi$ von $x$ gehört. Es sei dann $x = a$ ein solcher regulärer Wert.

Wir denken uns von dem Punkte $a$ aus einen Strahl gelegt, und nehmen auf diesem einen Punkt $b$ so an, daß auch alle zwischen $a$ und $b$ gelegenen Punkte dieses Strahles, $b$ eingeschlossen, reguläre Werte sind. Diesen Strahl nennen wir den $x$-Strahl. Ferner möge der Parameter $\mu$ ebenfalls längs einem bestimmten Strahle (dem $\mu$-Strahle), d. h. also mit bestimmtem Argumente dem Unendlichen zustreben.

Wir setzen dann

$$\mu(x-a) = \xi e^{\theta i}, \quad (i = \sqrt{-1}), \tag{44}$$

wo

$$\theta = \operatorname{Arg} \mu + \operatorname{Arg}(x-a),$$

und $\xi$ eine positive reale Variable bedeutet. Der Winkel $\theta$ ist nach den getroffenen Festsetzungen konstant. — Die Lösungen der Differentialsysteme (A) bezw. (B) sind Funktionen von $x$ und $\mu$, für ein konstantes $\theta$ können wir diese Lösungen also als Funktionen von $\xi$ und $\mu$ betrachten. Wenn $x$ auf seinem Strahle zwischen $a$ und $b$ bleibt, während $\mu$ auf seinem Strahle dem Unendlichen zustrebt, so geht $\xi$ als positive reale Größe ins Unendliche und umgekehrt, wenn $\xi$ als positive reale Größe ins Unendliche rückt und dabei $x$ auf seinem Strahle zwischen $a$ und $b$ verbleibt, so rückt bei konstantem $\theta$ der Parameter $\mu$ seinen Strahl entlang ins Unendliche.

Wir führen jetzt in dem Differentialsysteme (Ba) an Stelle von $x$ die Größe $\xi$ als neue unabhängige Variable ein; dann ist

$$\frac{dz_x}{d\xi} = e^{\theta i}\varpi_x z_x + \sum_{\lambda=1}^{n} z_\lambda \cdot \frac{e^{\theta i}}{\mu} Q_{\lambda x}, \tag{45}$$

und wir haben nach (43)

(46) $$\lim_{\xi=\infty} Q_{\lambda\varkappa}\frac{1}{\mu}e^{\theta i}=0.$$

Es sei nun der Punkt $b$ so gewählt, daß in dem Intervalle $(a\ldots b)$ des $x$-Strahles die realen Teile der Größen

(47) $$\varpi_1 e^{\theta i},\ldots,\varpi_n e^{\theta i}$$

voneinander verschieden sind; für ein willkürliches $\theta$ wird dies stets der Fall sein, da zufolge unserer Voraussetzung zwischen $a$ und $b$ kein singulärer Punkt der algebraischen Funktion $\varpi$ gelegen ist, so daß in jenem Intervalle die $\varpi_1,\ldots,\varpi_n$ stets voneinander verschieden sind. — Ferner denken wir uns die Indexbezeichnung so eingerichtet, daß

(48) $$\Re(\varpi_1 e^{\theta i})>\Re(\varpi_2 e^{\theta i})>\cdots>\Re(\varpi_n e^{\theta i})$$

ist; dann haben wir also

$$\Re(\varpi_\varkappa e^{\theta i}-\varpi_1 e^{\theta i})<0. \qquad (\varkappa=2,3,\cdots,n)$$

Wir können demnach eine von $x$ und $\mu$ unabhängige reale und negative Größe $\varrho$ so angeben, daß

(49) $$0>\varrho>\Re(\varpi_\varkappa e^{\theta i}-\varpi_1 e^{\theta i}) \qquad (\varkappa=2,3,\cdots,n).$$

ist.

Aus den Gleichungen (45) folgt:

(50) $$\frac{d\log\frac{z_\varkappa}{z_1}}{d\xi}=e^{\theta i}(\varpi_\varkappa-\varpi_1)$$
$$+\frac{e^{\theta i}}{\mu}\left(Q_{\varkappa\varkappa}-Q_{11}+\sum_{\lambda\neq\varkappa}\frac{z_\lambda}{z_\varkappa}Q_{\lambda\varkappa}-\sum_{\lambda>1}\frac{z_\lambda}{z_1}Q_{\lambda 1}\right).$$
$$(\varkappa=2,3,\cdots,n)$$

Wenn $\xi$ hinreichend groß ist, so haben wir

(51) $$\left|\frac{1}{\mu}Q_{\lambda\varkappa}\right|<\delta,$$

wo zufolge der Gleichung (46)

(52) $$\lim_{\xi=+\infty}\delta=0$$

ist. Es sei ferner

(53) $$\left|\frac{z_\lambda}{z_\varkappa}\right|<\frac{1}{\varepsilon},\quad\left|\frac{z_\lambda}{z_1}\right|<\frac{1}{\varepsilon}.$$

Dann ergibt sich aus (50) und mit Rücksicht auf (49) die Ungleichung:

(54) $$\frac{d\log\left|\frac{z_\varkappa}{z_1}\right|}{d\xi}<\varrho+2\delta+2(n-1)\frac{\delta}{\varepsilon}.$$

Es sei $g$ eine positive Größe von hinreichender Kleinheit; wir denken uns $\varepsilon$ so gewählt, daß

(55) $$\varrho + 2\delta + 2(n-1)\frac{\delta}{\varepsilon} = -g,$$

dann erweist sich $\varepsilon$ für hinreichend klein gewähltes $g$ als positiv, und es ist

$$\lim_{\delta=0} \varepsilon = 0.$$

Wenn für ein bestimmtes $\xi$ die Ungleichung

(56) $$\varepsilon < \left|\frac{z_\varkappa}{z_1}\right| < \frac{1}{\varepsilon} \qquad (\varkappa = 2, 3, \cdots, n)$$

besteht, so haben wir nach dem Poincaréschen Lemma*)

$$\lim_{\xi=+\infty} \frac{z_\varkappa}{z_1} = 0. \qquad (\varkappa = 2, 3, \cdots, n)$$

Lösungssysteme $z_1, \ldots, z_n$ von dieser Beschaffenheit lassen sich stets angeben. Sollten die Ungleichungen (56) für keinen Wert von $\xi$ erfüllt sein, so wäre für das betreffende Lösungssystem

$$\left|\frac{z_\varkappa}{z_1}\right| < \varepsilon \quad \text{oder} \quad \left|\frac{z_\varkappa}{z_1}\right| > \frac{1}{\varepsilon}$$

für jeden Wert von $\xi$; wir hätten folglich, da $\varepsilon$ mit ins Unendliche wachsendem $\xi$ der Null zustrebt, im ersten Falle

$$\lim_{\xi=+\infty} \frac{z_\varkappa}{z_1} = 0$$

und im zweiten Falle

$$\lim_{\xi=+\infty} \frac{z_\varkappa}{z_1} = \infty.$$

Wir können also sagen, daß für unser Differentialsystem (Ba) stets solche Lösungssysteme $z_1, \ldots, z_n$ vorhanden sind, für die

$$\lim \frac{z_\varkappa}{z_1} = 0 \qquad (\varkappa = 2, 3, \cdots, n)$$

ist, wo das lim-Zeichen die Bedeutung hat, daß $\mu$ seinen Strahl entlang dem Unendlichen zustrebt, während $x$ auf seinem Strahle in dem Intervalle $(a \ldots b)$ verbleibt. Dieses Lemma spielt hier dieselbe Rolle wie das Poincarésche in der in der elften und zwölften Vorlesung behandelten Theorie.

Wir betrachten jetzt die Quotienten

$$\zeta_\varkappa = \frac{z_\varkappa}{z_1}; \qquad (\varkappa = 2, 3, \cdots, n)$$

*) Elfte Vorlesung S. 195.

diese befriedigen das folgende Differentialsystem:

$$\text{(C)}\qquad \frac{d\zeta_\varkappa}{dx} + \zeta_\varkappa \sum_{\lambda>1} \zeta_\lambda Q_{\lambda 1} = \zeta_\varkappa \mu(\varpi_\varkappa - \varpi_1) + \sum_{\lambda>1} \zeta_\lambda (Q_{\lambda\varkappa} - \delta_{\lambda\varkappa} Q_{11}) + Q_{1\varkappa}.$$

Für ein Differentialsystem von dieser Form existiert also allemal ein Lösungssystem von der Beschaffenheit, daß seine sämtlichen Elemente verschwinden, wenn $\mu$ seinen Strahl entlang dem Unendlichen zustrebt und $x$ auf seinem Strahle in dem angegebenen Intervalle verbleibt, vorausgesetzt, daß die Gleichungen (43) und die Ungleichungen (48) erfüllt sind. — Das Differentialsystem (C) besitzt nun, wenn wir jetzt die $Q_{\lambda\varkappa}$ wieder als Funktionen voraussetzen, die in der Umgebung von $\mu = \infty$ durch Reihen von der Form (42) dargestellt sind, formale Lösungen, die wir am einfachsten erhalten können, indem wir von den dem Systeme (B) formell genügenden Reihen (34) ausgehen und durch formale Rechnung ihre Quotienten bilden. Für $i = 1$*) erhält man

$$\text{(57)}\qquad \frac{z_{1\varkappa}}{z_{11}} = \frac{\frac{1}{\mu} z_{1\varkappa}^{(1)} + \frac{1}{\mu^2} z_{1\varkappa}^{(2)} + \cdots}{c_1 e^{\int b_{11}^{(1)} dx} + \frac{1}{\mu} z_{11}^{(1)} + \cdots} = \frac{1}{\mu} \zeta_\varkappa^{(1)} + \frac{1}{\mu^2} \zeta_\varkappa^{(2)} + \cdots \text{ in inf.,}$$

$$(\varkappa = 2, 3, \cdots n)$$

durch formale Reihen dieser Form wird also das Differentialsystem (C) befriedigt. Setzt man in (C) für $\zeta_2, \ldots \zeta_n$ die Ausdrücke:

$$\text{(58)}\qquad \zeta_\varkappa = \frac{1}{\mu} \zeta_\varkappa^{(1)} + \cdots + \frac{1}{\mu^p} \zeta_\varkappa^{(p)} + \frac{Z_\varkappa}{\mu^p} \qquad (\varkappa = 2, 3, \cdots, n)$$

ein, wo $p$ eine feste positive ganze Zahl bedeuten soll, so ergibt sich für die unbekannten Funktionen $Z_\varkappa$ von $x$ und $\mu$ ein Differentialsystem von ähnlicher Form wie (C), es werden nur an die Stelle der Funktionen $Q_{\lambda\varkappa}$ andere Funktionen von $x$ und $\mu$ treten, die aber auch die Eigenschaft haben, mit $\frac{1}{\mu}$ multipliziert für $\mu = \infty$ zu verschwinden (vergl. Gl. (43)). Für dieses Differentialsystem existiert nun, nach unserem Lemma, ein Lösungssystem, dessen Elemente gegen Null konvergieren, wenn $\mu$ seinen Strahl entlang dem Unendlichen zustrebt, und

*) Im folgenden bedeutet $i$ wieder einen Index.

daraus folgt nun wieder für das Differentialsystem (C) die Existenz eines Lösungssystems von der Form (58), für das

$$\lim Z_\varkappa = 0 \qquad (\varkappa = 2, 3, \cdots, n)$$

ist.

Nun haben wir nach (B)

$$\frac{d \log z_\varkappa}{dx} = \mu \varpi_\varkappa + \sum_{\lambda=1}^{n} \frac{z_\lambda}{z_\varkappa} Q_{\lambda\varkappa} = \mu \varpi_\varkappa + Q_{\varkappa\varkappa} + \sum_{\lambda \neq \varkappa} \frac{\zeta_\lambda}{\zeta_\varkappa} Q_{\lambda\varkappa};$$
$$(\varkappa = 1, 2, \cdots, n;\ \zeta_1 = 1)$$

setzt man in diesen Gleichungen für $\zeta_2, \ldots, \zeta_n$ die obigen Reihen (58) ein und beachtet, daß nach (57)

$$\zeta_\varkappa^{(1)} = \frac{z_{1\varkappa}^{(1)}}{c_1 e^{\int b_{11}^{(1)} dx}}$$

also nach (39)

$$\zeta_\varkappa^{(1)} = \frac{b_{1\varkappa}^{(1)}}{\varpi_1 - \varpi_\varkappa} \qquad (\varkappa = 2, 3, \cdots, n)$$

gefunden wird, so erhält man

$$\frac{d \log z_\varkappa}{dx} = \mu \left( \varpi_1 + \frac{\eta_\varkappa^{(1)}}{\mu} + \cdots + \frac{\eta_\varkappa^{(p)}}{\mu^p} + \frac{H_\varkappa}{\mu^p} \right) \qquad (\varkappa = 1, 2, \cdots, n)$$

mit

$$\lim H_\varkappa = 0,$$

so daß wir für das Differentialsystem (B) ein Lösungssystem von der Form

(59) $$z_{1\varkappa} = e^{\mu \omega_1} \left( z_{1\varkappa}^{(0)} + \frac{z_{1\varkappa}^{(1)}}{\mu} + \cdots + \frac{z_{1\varkappa}^{(p)}}{\mu^p} + \frac{Z_{1\varkappa}}{\mu^p} \right)$$

mit

$$\lim Z_{1\varkappa} = 0,$$

und für das Differentialsystem (A) ein Lösungssystem von der Form

(60) $$y_{1\varkappa} = e^{\mu \omega_1} \left( y_{1\varkappa}^{(0)} + \frac{y_{1\varkappa}^{(1)}}{\mu} + \cdots + \frac{y_{1\varkappa}^{(p)}}{\mu^p} + \frac{Y_{1\varkappa}}{\mu^p} \right)$$

mit

$$\lim Y_{1\varkappa} = 0$$

gewinnen.

Mit Hilfe dieses Integralsystems reduzieren wir nun — ähnlich wie in der zwölften Vorlesung — das Differentialsystem (A) auf eines für $n - 1$ Funktionen und erschließen dann durch vollständige Induktion für das System (A) die Existenz von $n$ Integralsystemen von der Form

$$(61)\qquad y_{i\varkappa} = e^{\mu\omega_i}\left(y_{i\varkappa}^{(0)} + \frac{y_{i\varkappa}^{(1)}}{\mu} + \cdots + \frac{y_{i\varkappa}^{(p)}}{\mu^p} + \frac{Y_{i\varkappa}}{\mu^p}\right) \quad (i, \varkappa = 1, 2, \cdots, n)$$

mit

$$\lim Y_{i\varkappa} = 0.$$

In den $\omega_i$ und ebenso in den $y_{i\varkappa}^{(\lambda)}$ $(\lambda = 0, 1, \cdots, p)$ sind noch gewisse Integrationskonstanten disponibel; wir verfügen über diese in der folgenden Weise.

Es sei $x_0$ ein beliebiger auf dem $x$-Strahle zwischen $a$ und $b$ gelegener Punkt; dann setzen wir

$$(62)\qquad \omega_i = \int_{x_0}^{x} \varpi_i dx,$$

wo das Integral natürlich den $x$-Strahl entlang zu erstrecken ist.

Führen wir nun in (62) mit Hilfe der Gleichung (44) $\xi$ als neue Integrationsvariable ein, so ist, wenn

$$\xi_0 = \mu(x_0 - a)e^{-\theta\sqrt{-1}}$$

gesetzt wird,

$$\mu\omega_i = \int_{\xi_0}^{\xi} \varpi_i e^{\theta\sqrt{-1}}\, d\xi,$$

also, wenn $\xi > \xi_0$ d. h.

$$(63)\qquad |x - a| > |x_0 - a|$$

ist, zufolge der Ungleichungen (48)

$$(64)\qquad \Re(\mu\omega_1) > \Re(\mu\omega_2) > \cdots > \Re(\mu\omega_n).$$

Wenn z. B. der Punkt $x_0$ in den Punkt $a$ selbst verlegt wird, so gelten die Ungleichungen (64) für das ganze Intervall $(a \ldots b)$.

Die Integrationskonstanten, die in den $y_{i\varkappa}^{(\lambda)}$ $(\lambda = 0, 1, \cdots, p)$ auftreten, wählen wir so, daß z. B. (vergl. Gl. (41))

$$(41\text{a})\qquad y_{i\varkappa}^{(0)} = e^{\int_{x_0}^{x} b_{ii}^{(1)} dx}\, u_{i\varkappa}^{(0)},$$

usw.

Es ist dann jedenfalls die Determinante $|y_{i\varkappa}^{(0)}|$ $(i, \varkappa = 1, 2, \cdots, n)$ von Null verschieden.

Wenn die Integrationskonstanten auf diese Weise fixiert sind, so behaupten wir, daß die $y_{i\varkappa}$, wie sie durch die Formeln (61) dargestellt werden, eine **Integralmatrix** von (A) ausmachen. Um dies nach-

zuweisen, stellen wir die Determinante der $n$ Lösungssysteme $y_{i\varkappa}$ durch die Jacobische Formel

$$(65)\qquad \underset{(i,\varkappa=1,2,\cdots,n)}{|y_{i\varkappa}|} = \Gamma\cdot e^{\int\limits_{x_0}^{x}\sum\limits_{\varkappa=1}^{n} a_{\varkappa\varkappa}\,dx}$$

dar, und zeigen, daß die Konstante $\Gamma$*) einen von Null verschiedenen Wert besitzt. — Es ist zufolge der charakteristischen Gleichung (23)

$$\sum_{\varkappa=1}^{n}\varpi_\varkappa = \sum_{\varkappa=1}^{n} a_{\varkappa\varkappa}^{(0)};$$

mit Rücksicht hierauf folgt aus der Gleichung (65)

$$(66)\qquad \underset{(i,\varkappa=1,2,\cdots,n)}{\left|y_{i\varkappa}^{(0)} + \frac{1}{\mu}y_{i\varkappa}^{(1)} + \cdots + \frac{1}{\mu^p}Y_{i\varkappa}\right|} = \Gamma\cdot e^{\sum\limits_{\varkappa}\int\limits_{x_0}^{x} a_{\varkappa\varkappa}^{(1)}dx + \frac{1}{\mu}\sum\limits_{\varkappa}\int\limits_{x_0}^{x} a_{\varkappa\varkappa}^{(2)}dx + \cdots}.$$

Lassen wir in dieser Gleichung $\mu$ auf die oft bezeichnete Weise ins Unendliche rücken, so ergibt sich

$$(67)\qquad \underset{(i,\varkappa=1,2,\cdots,n)}{|y_{i\varkappa}^{(0)}|} = \lim \Gamma\cdot e^{\sum\limits_{\varkappa}\int\limits_{x_0}^{x} a_{\varkappa\varkappa}^{(1)}dx}.$$

Nun würde sich, wenn man $\Gamma$ aus der Gleichung (66) berechnen würde, für diese von $x$ unabhängige Größe ein Ausdruck von der Form

$$\Gamma = \Gamma_0 + \frac{\Gamma_1}{\mu} + \cdots + \frac{\Gamma_p}{\mu^p} + \frac{E}{\mu^p}$$

ergeben, wo $\Gamma_0, \Gamma_1, \ldots, \Gamma_p$ von $\mu$ unabhängig und $\lim E = 0$ ist.

Aus (67) folgt, da $|y_{i\varkappa}^{(0)}|$ nicht identisch verschwindet, daß

$$\lim \Gamma = \Gamma_0$$

ein von Null verschiedener Wert ist, und damit ist gezeigt, daß $\Gamma$ nicht identisch (als Funktion von $\mu$) verschwinden kann; was zu beweisen war.

Wir wollen ferner festzustellen suchen, wie die Funktionen

$$y_{i\varkappa}^{(0)}, \ldots, y_{i\varkappa}^{(p)}$$

von den in denselben enthaltenen Integrationskonstanten abhängen.

Es bedeute $\bar{y}_{i\varkappa}$ für einen festen Wert des Index $i$ und $\varkappa = 1, 2, \ldots, n$ ein Integralsystem von der Form

*) Die aber natürlich noch von $\mu$ abhängen kann.

(68)
$$\bar{y}_{i\varkappa} = e^{\mu \omega_i}\left(\bar{y}_{i\varkappa}^{(0)} + \cdots + \frac{\bar{y}_{i\varkappa}^{(p)}}{\mu^p} + \frac{\bar{Y}_{i\varkappa}}{\mu^p}\right),$$

wo die in den $\bar{y}_{i\varkappa}^{(0)}, \ldots, \bar{y}_{i\varkappa}^{(p)}$ enthaltenen Integrationskonstanten jetzt als willkürliche Konstante gewählt sein mögen, und wo

$$\lim \bar{Y}_{i\varkappa} = 0$$

ist. Da die $y_{i\varkappa}$ eine Integralmatrix konstituieren, ist

(69)
$$\bar{y}_{i\varkappa} = c_1 y_{1\varkappa} + \cdots + c_n y_{n\varkappa} \qquad (\varkappa = 1, 2, \cdots, n)$$

mit von $x$ unabhängigen $c_1, \ldots, c_n$. Wenn wir diese Größen aus den Gleichungen (69) ausrechnen, so finden wir

$$c_\lambda = e^{\mu(\omega_i - \omega_\lambda)}\left(c_\lambda^{(0)} + \frac{c_\lambda^{(1)}}{\mu} + \cdots + \frac{c_\lambda^{(p)}}{\mu^p} + \frac{C_\lambda}{\mu^p}\right), \qquad (\lambda = 1, 2, \cdots, n)$$

wo die $c_\lambda^{(0)}, \ldots, c_\lambda^{(p)}$ von $\mu$ unabhängig sind und

$$\lim C_\lambda = 0$$

ist. Da $c_\lambda$ von $x$ unabhängig sein muß, ist

$$\frac{dc_\lambda}{dx} = 0;$$

wir erhalten also nach Division mit $e^{\mu(\omega_i - \omega_\lambda)}$

$$\frac{dc_\lambda^{(0)}}{dx} + \cdots + \frac{1}{\mu^p}\frac{dc_\lambda^{(p)}}{dx} + \frac{1}{\mu^p}\frac{dC_\lambda}{dx} + \mu(\varpi_i - \varpi_\lambda)\left(c_\lambda^{(0)} + \cdots + \frac{c_\lambda^{(p)}}{\mu^p} + \frac{C_\lambda}{\mu^p}\right) = 0.$$

Hieraus folgt für $\lambda \neq i$

$$c_\lambda^{(0)} = 0, \cdots, c_\lambda^{(p)} = 0,$$

und

$$\frac{dC_\lambda}{dx} + \mu(\varpi_i - \varpi_\lambda) C_\lambda = 0,$$

woraus sich

$$C_\lambda = \text{const} \cdot e^{\mu(\omega_\lambda - \omega_i)}$$

ergibt, und für $\lambda = i$

$$\frac{dc_i^{(0)}}{dx} = 0, \cdots, \frac{dc_i^{(p)}}{dx} = 0, \quad \frac{dC_i}{dx} = 0.$$

Wir finden folglich für $\lambda \neq i$:

$$c_\lambda y_{\lambda\varkappa} = e^{\mu(\omega_i - \omega_\lambda)}\,\frac{C_\lambda}{\mu^p}\,e^{\mu\omega_\lambda}\left(y_{\lambda\varkappa}^{(0)} + \cdots + \frac{y_{\lambda\varkappa}^{(p)}}{\mu^p} + \frac{Y_{\lambda\varkappa}}{\mu^p}\right),$$

also

$$c_\lambda y_{\lambda x} = e^{\mu \omega_i} \frac{\Gamma_{\lambda x}}{\mu^p},$$

wo

$$\Gamma_{\lambda x} = C_\lambda \left( y_{\lambda x}^{(0)} + \cdots + \frac{y_{\lambda x}^{(p)}}{\mu^p} + \frac{Y_{\lambda x}}{\mu^p} \right)$$

und folglich

$$\lim \Gamma_{\lambda x} = 0$$

ist. Im Falle $\lambda = i$ haben wir direkt

$$c_i y_{ix} = \left( c_i^{(0)} + \cdots + \frac{C_i}{\mu^p} \right) e^{\mu \omega_i} \left( y_{ix}^{(0)} + \cdots + \frac{Y_{ix}}{\mu^p} \right);$$

wir finden somit, indem wir beide Fälle zusammenfassen:

$$\bar{y}_{ix} = \left( c_i^{(0)} + \cdots + \frac{c_i^{(p)}}{\mu^p} + \frac{C_i}{\mu^p} \right) e^{\mu \omega_i} \left( y_{ix}^{(0)} + \cdots + \frac{y_{ix}^{(p)}}{\mu^p} + \frac{Y_{ix}}{\mu^p} \right)$$
$$+ e^{\mu \omega_i} \frac{\Gamma_x}{\mu^p},$$

mit

$$\lim \Gamma_x = \lim \sum_{\lambda \neq x} \Gamma_{\lambda x} = 0,$$

wo die $c_i^{(0)}, \ldots, c_i^{(p)}, C_i$ von $x$ unabhängige Größen bedeuten.

Vergleichen wir jetzt diese Form von $\bar{y}_{ix}$ mit der Form (68), so ergibt sich:

$$(70) \quad \begin{cases} \bar{y}_{ix}^{(0)} = c_i^{(0)} y_{ix}^{(0)}, \\ \bar{y}_{ix}^{(1)} = c_i^{(0)} y_{ix}^{(1)} + c_i^{(1)} y_{ix}^{(0)}, \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \bar{y}_{ix}^{(p)} = c_i^{(0)} y_{ix}^{(p)} + \cdots + c_i^{(p)} y_{ix}^{(0)}; \end{cases}$$

$$\bar{Y}_{ix} = y_{ix}^{(0)} C_i + \frac{y_{ix}^{(1)}}{\mu^p} (c_i^{(p)} + C_i) + \cdots + y_{ix}^{(p)} \left( \frac{c_i^{(1)}}{\mu} + \cdots + \frac{c_i^{(p)}}{\mu^p} + \frac{C_i}{\mu^p} \right)$$
$$+ Y_{ix} \left( c_i^{(0)} + \cdots + \frac{c_i^{(p)}}{\mu^p} + \frac{C_i}{\mu^p} \right) + \Gamma_x.$$

Es bedeute nunmehr $y_1, \ldots, y_n$ dasjenige Lösungssystem des Differentialsystems (A), das sich für $x = x_0$ auf die Werte

$$(71) \qquad y_x(x_0) = e^{\mu \gamma} \left( \gamma_x^{(0)} + \frac{\gamma_x^{(1)}}{\mu} + \frac{\gamma_x^{(2)}}{\mu^2} + \cdots \text{ in inf.} \right)$$

reduziert. Hierin bedeuten die $\gamma, \gamma_x^{(0)}, \gamma_x^{(1)}, \gamma_x^{(2)}, \ldots$ von $\mu$ unabhängige Konstanten; die auf den rechten Seiten stehenden unendlichen Reihen

mögen entweder für $|\mu| > R$ konvergieren oder aber die Anfangswerte $y_\varkappa(x_0)$ **asymptotisch** darstellen, wenn $\mu$ seinen Strahl entlang ins Unendliche rückt. Man kann dann die $y_\varkappa$ durch die Integralmatrix $(y_{i\varkappa})$ in der Form

(72) $$y_\varkappa = c_1 y_{1\varkappa} + \cdots + c_n y_{n\varkappa} \qquad (\varkappa = 1, 2, \cdots, n)$$

ausdrücken, wo die Konstanten $c_1, \ldots, c_n$ z. B. dadurch bestimmt werden können, daß man in den Gleichungen (72) für $x$ den Wert $x_0$ einsetzt. Wir erhalten auf diese Weise:

$$c_i = e^{\mu\gamma}\left(c_i^{(0)} + \frac{c_i^{(1)}}{\mu} + \cdots + \frac{c_i^{(p)}}{\mu^p} + \frac{C_i}{\mu^p}\right),$$

wo sich die $c_i^{(0)}, \ldots, c_i^{(p)}$ als von $\mu$ unabhängige Größen im Sinne der Gleichungen (70) durch die Gleichungen

(73) $$\begin{cases} \gamma_\varkappa^{(0)} = \sum\limits_{i=1}^{n} c_i^{(0)} y_{i\varkappa}^{(0)}(x_0), \\ \gamma_\varkappa^{(1)} = \sum\limits_{i=1}^{n} \left(c_i^{(1)} y_{i\varkappa}^{(0)}(x_0) + c_i^{(0)} y_{i\varkappa}^{(1)}(x_0)\right), \\ \cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \\ \gamma_\varkappa^{(p)} = \sum\limits_{i=1}^{n} \left(c_i^{(p)} y_{i\varkappa}^{(0)}(x_0) + \cdots + c_i^{(0)} y_{i\varkappa}^{(p)}(x_0)\right) \end{cases}$$

ergeben, und zwar, da die Determinante

$$\left| y_{i\varkappa}^{(0)}(x_0) \right| \neq 0 \qquad (i, \varkappa = 1, 2 \cdots, n)$$

ist, in eindeutig bestimmter Form. Für die noch von $\mu$ abhängige Größe $C_i$ hat man

$$\lim C_i = 0.$$

Setzt man nunmehr

(74) $$\begin{cases} \overline{\omega}_i = \omega_i + \gamma, \\ \overline{y}_{i\varkappa}^{(0)} = c_i^{(0)} y_{i\varkappa}^{(0)}, \\ \overline{y}_{i\varkappa}^{(1)} = c_i^{(1)} y_{i\varkappa}^{(0)} + c_i^{(0)} y_{i\varkappa}^{(1)}, \\ \cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \\ \overline{y}_{i\varkappa}^{(p)} = c_i^{(p)} y_{i\varkappa}^{(0)} + \cdots + c_i^{(0)} y_{i\varkappa}^{(p)}, \end{cases}$$

so erhält man

(75) $$y_\varkappa = e^{\mu\overline{\omega}_1}\left(\overline{y}_{1\varkappa}^{(0)} + \cdots + \frac{\overline{y}_{1\varkappa}^{(p)}}{\mu^p}\right) + \cdots + e^{\mu\overline{\omega}_n}\left(\overline{y}_{n\varkappa}^{(0)} + \cdots + \frac{\overline{y}_{n\varkappa}^{(p)}}{\mu^p}\right) + \frac{1}{\mu^p}\left(e^{\mu\overline{\omega}_1}\overline{Y}_{1\varkappa} + \cdots + e^{\mu\overline{\omega}_n}\overline{Y}_{n\varkappa}\right) \qquad (\varkappa = 1, 2, \cdots, n)$$

mit

$$\lim \bar{Y}_{1\varkappa} = \cdots = \lim \bar{Y}_{n\varkappa} = 0.$$

Diese Darstellung gilt für jeden positiven ganzzahligen Wert von $p$: dabei sind die $\bar{y}_{i\varkappa}^{(\nu)}$ durch die Gleichungssysteme (73), (74) in völlig eindeutiger Weise bestimmt. Mit Rücksicht auf die Ungleichungen (64) können wir also den folgenden Satz aussprechen:

**Ein Integralsystem des Differentialsystems (A), dessen Anfangswerte im Punkte $x = x_0$ in der Form (71) für große Werte von $\mu$ konvergent oder asymptotisch darstellbar sind, läßt für die zwischen $x_0$ und $b$ gelegenen Punkte des $x$-Strahls und für ein den $\mu$-Strahl entlang ins Unendliche wachsendes $\mu$ eine asymptotische Darstellung zu, und zwar im allgemeinen, d. h. wenn die sich aus den Gleichungen (73), (74) ergebenden $\bar{y}_{1\varkappa}^{(\nu)}$ nicht sämtlich identisch verschwinden, in der Form**

$$(76) \qquad y_\varkappa \sim e^{\mu\omega_1}\left(\bar{y}_{1\varkappa}^{(0)} + \frac{\bar{y}_{1\varkappa}^{(1)}}{\mu} + \frac{\bar{y}_{1\varkappa}^{(2)}}{\mu^2} + \cdots \text{ in inf.}\right).$$

Für spezielle Anfangswerte kann es sich ereignen, daß gewisse der aus den Gleichungen (73), (74) zu bestimmenden $\bar{y}_{i\varkappa}^{(\nu)}$ identisch verschwinden.

Wenn z. B.

$$\bar{y}_{i\varkappa}^{(\nu)} = 0 \qquad (i = 1, 2, \cdots, \lambda - 1;\ \nu = 0, 1, 2, \cdots)$$

ist, aber unter den $\bar{y}_{\lambda\varkappa}^{(\nu)}$ solche vorhanden sind, die nicht identisch verschwinden, so haben wir

$$(77) \qquad y_\varkappa \sim e^{\mu\omega_\lambda}\left(\bar{y}_{\lambda\varkappa}^{(0)} + \frac{\bar{y}_{\lambda\varkappa}^{(1)}}{\mu} + \frac{\bar{y}_{\lambda\varkappa}^{(2)}}{\mu^2} + \cdots \text{ in inf.}\right).$$

Wie aus den Gleichungen (74) hervorgeht, hat aber der Index $\lambda$ für alle Werte des Index $\varkappa = 1, 2, \ldots, n$ **denselben Wert.**

* * *

Für gewisse lineare Differentialgleichungen zweiter Ordnung hat J. **Horn***) die nach einem Parameter fortschreitenden Normalreihen aufgestellt und nachgewiesen, daß sie für reale Werte der unabhängigen Variabeln und für große positive Werte des Parameters die asymptotische Darstellung gewisser Lösungen liefern. **Horn** erbringt diesen Nachweis, indem er zunächst mit Hilfe der Methode der sukzessiven Approximationen konvergente Reihenentwickelungen für die Integrale herleitet,

*) Mathem. Annalen Bd. 52 (1899), S. 271, 340.

dann jedes einzelne Glied dieser konvergenten Reihen asymptotisch darstellt und auf diese Weise zu der asymptotischen Darstellung der ganzen konvergenten Reihen gelangt. Diese Methode, die sich auch auf den von uns betrachteten allgemeinen Fall eines Differentialsystems $n$-ter Ordnung übertragen ließe, besitzt gegenüber der hier befolgten Methode einen wesentlichen Vorzug. — Während wir nämlich (und zwar sowohl im Falle der parametrischen Normalreihen als auch im Falle der Thoméschen Normalreihen, in der zwölften Vorlesung) nur nachgewiesen haben, daß das Restglied der Normalreihe der Null zustrebt, wenn $\mu$ (bezw. im Falle der Thoméschen Reihen $x$) mit einem festen Argumente ins Unendliche rückt, liefert die von Horn a. a. O. befolgte Methode*) eine Abschätzung jenes Restgliedes, aus der hervorgeht, daß die asymptotische Darstellung nicht nur für ein bestimmtes Argument, sondern allemal für einen ganzen Winkelraum und zwar gleichmäßig gültig bleibt.

Wir bemerken noch, daß der von uns behandelte Fall, wo in den Entwickelungen (6) bezw. (8) $\tau = 1$, $k = 0$, demjenigen analog ist, den wir für die Thoméschen Normalreihen auch ausschließlich näher studiert haben, nämlich dem Falle, wo das Differentialsystem für $x = \infty$ vom Range Eins ist. Prinzipiell bieten die Fälle $\tau > 1$, $k > 0$ keine neuen Schwierigkeiten dar, es treten nur in den formellen Entwickelungen im Exponenten von $e$ ganze rationale Funktionen höheren als ersten Grades von $\mu$ auf. Auch die Fälle, wo die charakteristische Gleichung mehrfache Lösungen besitzt, gehen nur mit mehr oder weniger erheblichen rechnerischen Komplikationen einher.

---

*) Die Horn übrigens auch für den Fall der Thoméschen Normalreihen ausgebildet hat, siehe Archiv der Math. und Physik (3) Bd. 4, S. 213, Crelles Journal Bd. 133, S. 19; vergl. auch die S. 214 zitierten Arbeiten von Kneser und A. Hamburger. Ferner U. Dini, Annali di Matematica (3) t. 2, S. 297, t. 3, S. 125. (1899).

# Fünfzehnte Vorlesung.

**Allgemeine Sätze über schlechthin kanonische Differentialsysteme. Darstellung der Residuenmatrizen und der Fundamentalsubstitutionen. Abhängigkeit der Koeffizienten von einem Parameter, von dem die singulären Punkte und die Wurzeln der determinierenden Fundamentalgleichungen nicht abhängen. Asymptotische Darstellung der Lösungen und der Elemente der Fundamentalsubstitutionen für große Werte des Parameters.**

Wir werden in dieser Vorlesung die in bezug auf die asymptotische Darstellung der Lösungen eines Differentialsystems für große Werte des Parameters $\mu$ erzielten Resultate auf den Fall anzuwenden suchen, wo das Differentialsystem ein schlechthin kanonisches ist und der Parameter $\mu$ in besonderer Weise in die Koeffizienten eingeht. — Wir schicken dieser Untersuchung einige Bemerkungen voraus, die sich auf schlechthin kanonische Differentialsysteme überhaupt beziehen und die uns auch späterhin noch von Nutzen sein werden.

Es sei das Differentialsystem

$$\frac{dy_\varkappa}{dx} = \sum_{\lambda=1}^{n} y_\lambda \frac{g_{\lambda\varkappa}(x)}{\varphi(x)} \tag{1} \qquad (\varkappa = 1, 2, \cdots, n,$$

vorgelegt, wo

$$\varphi(x) = (x - a_1) \cdots (x - a_\sigma) \tag{2}$$

ist und die $g_{i\varkappa}(x)$ ganze rationale Funktionen von $x$ von nicht höherem als dem $(\sigma - 1)$-ten Grade bedeuten. Die $a_1, \ldots, a_\sigma$ sind voneinander verschieden.

Wir betrachten die algebraische Gleichung $n$-ten Grades

$$\left| \frac{g_{i\varkappa}(x)}{\varphi(x)} - \delta_{i\varkappa}\Omega \right| = 0, \tag{3} \qquad (i, \varkappa = 1, 2, \cdots, n)$$

die uns $\Omega$ als algebraische Funktion von $x$ definiert. Für diese Funktion $\Omega$ sind die $a_1, \ldots, a_\sigma$ Pole erster Ordnung. Setzen wir

$$\operatorname{Res}_{a_\nu} \frac{g_{i\varkappa}(x)}{\varphi(x)} = A_{i\varkappa}^{(\nu)}, \tag{4} \qquad (\nu = 1, 2, \cdots, \sigma)$$

so folgt aus (3) die Gleichung

$$(5)\qquad \left| A_{i\varkappa}^{(\nu)} - \delta_{i\varkappa} \operatorname{Res}_{a_\nu} \Omega \right| = 0. \quad {\scriptstyle (i,\varkappa = 1, 2, \cdots, n)}$$

Wenn wir also die Wurzeln der Gleichung (3) mit $\Omega_1, \ldots, \Omega_n$ bezeichnen, so sind die

$$(6)\qquad \operatorname{Res}_{a_\nu} \Omega_i = r_i^{(\nu)} \qquad {\scriptstyle (i = 1, 2, \cdots, n)}$$

nichts anderes als die Wurzeln der zu $x = a_\nu$ gehörigen Residuengleichung des Differentialsystems (A). — Ebenso ist für den unendlich fernen Punkt $x = \infty = a_{\sigma+1}$,

$$\left| -\sum_{\nu=1}^{\sigma} A_{i\varkappa}^{(\nu)} - \delta_{i\varkappa} \operatorname{Res}_\infty \Omega \right| = 0;$$

die Größen

$$(7)\qquad \operatorname{Res}_\infty \Omega_i = -\lim_{x=\infty} x\Omega_i = r_i^{(\sigma+1)}$$

sind also die Wurzeln der zu $x = \infty$ gehörigen Residuengleichung des Differentialsystems (A). Wir setzen im folgenden stets voraus, daß die

$$r_1^{(\nu)}, \ldots, r_n^{(\nu)} \qquad {\scriptstyle (\nu = 1, 2, \cdots, \sigma, \sigma+1)}$$

weder ganzzahlige noch verschwindende Differenzen besitzen, so daß also die zu den singulären Punkten $x = a_\nu$ gehörigen kanonischen Integralmatrizen die Form

$$(8)\qquad (\eta_{i\varkappa}^{(\nu)}) = ((x - a_\nu)^{r_i^{(\nu)}} \varphi_{i\varkappa}^{(\nu)}(x)) \qquad {\scriptstyle (\nu = 1, 2, \cdots, \sigma+1)}$$

haben, wo die $\varphi_{i\varkappa}^{(\nu)}(x)$ in der Umgebung von $x = a_\nu$ holomorphe Funktionen bedeuten, für die

$$(9)\qquad \left| \varphi_{i\varkappa}^{(\nu)}(a_\nu) \right| \neq 0 \quad {\scriptstyle (i,\varkappa = 1, 2, \cdots, n)}$$

ist. Für $\nu = \sigma + 1$ ist natürlich an die Stelle von $x - a_\nu$ zu setzen $\frac{1}{x}$. Aus dieser Voraussetzung folgt, daß die Diskriminante der algebraischen Funktion $\Omega$ nicht identisch verschwindet und daß die Punkte $a_1, \ldots, a_\sigma, \infty$ nicht zu den Verzweigungspunkten dieser algebraischen Funktion gehören.

Wenn wir in der Gleichung

$$(10)\qquad D_x(\eta_{i\varkappa}^{(\nu)}) = \left(\frac{g_{i\varkappa}(x)}{\varphi(x)}\right) = \left(\sum_{\lambda=1}^{\sigma} \frac{A_{i\varkappa}^{(\lambda)}}{x - a_\lambda}\right),$$

die ausdrückt, daß $(\eta_{i\varkappa}^{(\nu)})$ eine Integralmatrix des Systems (A) ist, für die $\eta_{i\varkappa}^{(\nu)}$ ihre Ausdrücke aus (8) einsetzen, so erhalten wir

$$(\varphi_{i\varkappa}^{(\nu)}(x))^{-1}((x-a_\nu)^{-r_i^{(\nu)}}\delta_{i\varkappa})\left(r_i^{(\nu)}(x-a_\nu)^{r_i^{(\nu)}-1}\varphi_{i\varkappa}^{(\nu)}(x)+(x-a_\nu)^{r_i^{(\nu)}}\frac{d\varphi_{i\varkappa}^{(\nu)}(x)}{dx}\right)$$
$$=\left(\sum_{\lambda=1}^{\sigma}\frac{A_{i\varkappa}^{(\lambda)}}{x-a_\lambda}\right).$$

Indem wir in dieser Gleichung beiderseits mit $x - a_\nu$ multiplizieren und dann $x = a_\nu$ setzen, ergibt sich:

(11) $$(\varphi_{i\varkappa}^{(\nu)}(a_\nu))^{-1}(r_i^{(\nu)}\delta_{i\varkappa})(\varphi_{i\varkappa}^{(\nu)}(a_\nu)) = (A_{i\varkappa}^{(\nu)}).$$

Vergleichen wir diese Darstellung der $(A_{i\varkappa}^{(\nu)})$ mit der Gleichung (42) der dreizehnten Vorlesung (S. 236), so sehen wir, daß wir die dort mit $(B_{i\varkappa}^{(\nu)})$ bezeichneten Matrizen direkt mit $(\varphi_{i\varkappa}^{(\nu)}(a_\nu))$ identifizieren können; auch die in den $(B_{i\varkappa}^{(\nu)})$ noch enthaltene Willkürlichkeit (siehe a. a. O.) tritt bei den $(\varphi_{i\varkappa}^{(\nu)}(a_\nu))$ auf, indem nach dem Begriffe der kanonischen Integralmatrix $(\eta_{i\varkappa}^{(\nu)})$ jede Zeile dieser Matrix noch mit einem beliebigen konstanten Faktor multipliziert werden kann.

Es ist nun äußerst bemerkenswert, daß die Fundamentalsubstitutionen $(\mathsf{A}_{i\varkappa}^{(\nu)})$, die die Integralmatrix

(12) $$(y_{i\varkappa}) = (\overline{T})\widehat{\int_{x_0}^{x}}\left(\frac{g_{i\varkappa}(x)}{\varphi(x)}\,dx + \delta_{i\varkappa}\right)$$

des Systems (A) beim Überschreiten der Schnitte $l_\nu$ erleidet, in einer ganz analogen Form dargestellt werden können, wie die Residuenmatrizen $(A_{i\varkappa}^{(\nu)})$ durch die Gleichungen (11) dargestellt sind.

Setzen wir nämlich in Übereinstimmung mit der früher benutzten Bezeichnung

(13) $$(y_{i\varkappa}) = (c_{i\varkappa}^{(\nu)})(\eta_{i\varkappa}^{(\nu)}),$$

so ergibt sich, wenn wir in dieser Gleichung für $x$ den Wert $x_0$ einsetzen, für den sich $(y_{i\varkappa})$ auf $(\delta_{i\varkappa})$ reduziert:

$$(\delta_{i\varkappa}) = (c_{i\varkappa}^{(\nu)})((x_0-a_\nu)^{r_i^{(\nu)}}\delta_{i\varkappa})(\varphi_{i\varkappa}^{(\nu)}(x_0)),$$

also, da $x_0$ ein regulärer Punkt, folglich $|\eta_{i\varkappa}^{(\nu)}|$ im Punkte $x_0$ von Null verschieden, und daher auch

$$|\varphi_{i\varkappa}^{(\nu)}(x_0)| \neq 0 \quad (i, \varkappa = 1, 2, \cdots, n)$$

ist,

(14) $$(c_{i\varkappa}^{(\nu)}) = (\varphi_{i\varkappa}^{(\nu)}(x_0))^{-1}((x_0-a_\nu)^{-r_i^{(\nu)}}\delta_{i\varkappa}).$$

Lassen wir jetzt $x$ einen geschlossenen Weg beschreiben, der den Schnitt $l_\nu$ einmal im positiven Sinne überschreitet, so folgt aus (13)

$$(\mathsf{A}_{ix}^{(\nu)})(y_{ix}) = (c_{ix}^{(\nu)})(e^{2\pi\sqrt{-1}\,r_i^{(\nu)}}(x-a_\nu)^{r_i^{(\nu)}}\delta_{ix})(\varphi_{ix}^{(\nu)}(x));$$

setzen wir hierin wieder $x = x_0$ und beachten die Gleichung (14), so erhalten wir

$$(15)\qquad (\varphi_{ix}^{(\nu)}(x_0))^{-1}(e^{2\pi\sqrt{-1}\,r_i^{(\nu)}}\delta_{ix})(\varphi_{ix}^{(\nu)}(x_0)) = (\mathsf{A}_{ix}^{(\nu)})$$

oder, da die

$$e^{2\pi\sqrt{-1}\,r_i^{(\nu)}} = \omega_i^{(\nu)}$$

nichts anderes sind als die Wurzeln der zu $(\mathsf{A}_{ix}^{(\nu)})$ gehörigen Fundamentalgleichung,

$$(15\text{a})\qquad (\varphi_{ix}^{(\nu)}(x_0))^{-1}(\omega_i^{(\nu)}\delta_{ix})(\varphi_{ix}^{(\nu)}(x_0)) = (\mathsf{A}_{ix}^{(\nu)}).$$

Es sind demnach die durch die Gleichungen (40) der dreizehnten Vorlesung (S. 236) erklärten Matrizen $(\mathsf{B}_{ix}^{(\nu)})$ direkt mit den Matrizen $(\varphi_{ix}^{(\nu)}(x_0))$ identisch. Genauer ausgedrückt, hat dieses Resultat die folgende Bedeutung.

Die $\varphi_{ix}^{(\nu)}(x)$ sind in der Umgebung von $x = a_\nu$ holomorphe Funktionen, deren in der Umgebung von $x = a_\nu$ gültige Reihenentwickelungen wir aus den Koeffizienten des Differentialsystems (A) durch algebraische Rechnungen herstellen können. Diese Funktionen haben keine andern singulären Stellen als die Punkte $a_i$, wo $i \neq \nu$ ist, und $x = \infty$. Denken wir uns also die in der Umgebung von $a_\nu$ gültigen Reihen in der zerschnittenen Ebene $\overline{T}$ nach dem Punkte $x_0$ hin fortgesetzt, so erhalten wir in diesem Punkte wohlbestimmte Werte $\varphi_{ix}^{(\nu)}(x_0)$; diese Werte sind es, die direkt die Elemente der Matrix $(\mathsf{B}_{ix}^{(\nu)})$ liefern.

* * *

Wir betrachten jetzt die Abhängigkeit der Lösungen des Differentialsystems (A) von einem Parameter $\mu$, der in den Koeffizienten auftritt. Und zwar machen wir die folgenden Voraussetzungen.

Die singulären Punkte $a_1, \ldots, a_\sigma$ seien von $\mu$ unabhängig, dagegen sei

$$(16)\qquad g_{ix}(x) = \mu\left(g_{ix}^{(0)} + \frac{g_{ix}^{(1)}}{\mu} + \frac{g_{ix}^{(2)}}{\mu^2} + \cdots \text{ in inf.}\right),$$

wo die rechter Hand auftretenden Reihen für

$$(17)\qquad |\mu| > R$$

konvergent sind. Dabei bedeutet $R$ eine von $x, a_1, \ldots, a_\sigma$ unabhängige

Größe. Die Koeffizienten $g_{i\varkappa}^{(0)}, g_{i\varkappa}^{(1)}, \ldots$ der Reihenentwickelungen (16) seien ebenso wie die $g_{i\varkappa}(x)$ selbst ganze rationale Funktionen von $x$. Endlich seien die Wurzeln der zu den singulären Punkten $a_1, \ldots, a_\sigma, \infty$ gehörigen determinierenden Fundamentalgleichungen, d. h. also die Größen

$$r_i^{(\nu)} \qquad (i = 1, 2, \cdots, n;\ \nu = 1, 2, \cdots, \sigma, \sigma + 1) \tag{18}$$

von dem Parameter $\mu$ unabhängig.

Wir denken uns nun in der Gleichung (3) für die $g_{i\varkappa}(x)$ ihre Entwickelungen (16) eingesetzt; dann befriedigt die Größe

$$\lim_{\mu = \infty} \frac{\Omega}{\mu} = \varpi \tag{19}$$

die charakteristische Gleichung (vgl. die Gleichung (23) der vorigen Vorlesung S. 252)

$$\left| \frac{g_{i\varkappa}^{(0)}(x)}{\varphi(x)} - \delta_{i\varkappa}\varpi \right| = 0. \qquad (i, \varkappa = 1, 2, \cdots, n) \tag{20}$$

Wenn — wie wir stets voraussetzen wollen — die Wurzeln $\varpi_1, \ldots, \varpi_n$ für ein willkürliches $x$ voneinander verschieden sind, so haben wir in der Umgebung von $\mu = \infty$ für die $\Omega_i$ die Entwickelungen

$$\Omega_i = \mu\left(\varpi_i + \frac{1}{\mu}\,\Omega_i^{(1)} + \cdots \text{ in inf.}\right), \tag{21}$$

wo $\varpi_i, \Omega_i^{(1)}, \ldots$ von $\mu$ unabhängige Funktionen von $x$ sind.

Da die Größen (18) von $\mu$ unabhängig sein sollten, so folgt aus den Gleichungen (6), (7), daß

$$\operatorname{Res}_{a_\nu} \Omega_i = \operatorname{Res}_{a_\nu} \Omega_i^{(1)}, \qquad (\nu = 1, 2, \cdots, \sigma + 1)$$

dagegen

$$\begin{cases} \operatorname{Res}_{a_\nu} \varpi_i = 0, \\ \operatorname{Res}_{a_\nu} \Omega_i^{(\lambda)} = 0 \end{cases} \qquad (\lambda = 2, 3, \cdots) \tag{22}$$

ist. Wir wollen aus diesen Gleichungen auf den analytischen Charakter der Funktionen $\varpi_i$ schließen; analoge Schlüsse werden dann auch für die $\Omega_i^{(\lambda)}$ $(\lambda = 2, 3, \cdots)$ Platz greifen.

Die algebraische Funktion $\varpi$ kann nur in den Punkten $a_1, \ldots, a_\sigma, \infty$ unendlich werden, und zwar keinesfalls von höherer als der ersten Ordnung. Die Gleichungen (22) lehren aber, daß auch ein Unendlichwerden von der ersten Ordnung ausgeschlossen ist. Die Punkte $a_1, \ldots, a_\sigma, \infty$ sind folglich Verzweigungspunkte der algebraischen Funktion $\varpi$, in denen diese Funktion von niedrigerer als der ersten Ordnung unendlich

wird. Daraus folgt, daß die Abelschen Integrale (vgl. Gleichung (24) der vorigen Vorlesung, S. 252)

$$(23)\qquad \omega_i = \int \varpi_i \, dx$$

den Charakter von Integralen erster Gattung haben.*) Hieraus

*) Zur Illustration dieser Verhältnisse diene das folgende Beispiel, wo $n=2$, $\sigma = 3$ genommen wird. Es ist

$$\varphi(x) = (x-a_1)(x-a_2)(x-a_3), \quad g_{i\varkappa} = \alpha_{i\varkappa} + \beta_{i\varkappa} x + \gamma_{i\varkappa} x^2;$$

$$g_{i\varkappa} = \mu\left(g_{i\varkappa}^{(0)} + \frac{g_{i\varkappa}^{(1)}}{\mu} + \cdots \text{ in inf.}\right); \quad g_{i\varkappa}^{(\nu)} = \alpha_{i\varkappa}^{(\nu)} + \beta_{i\varkappa}^{(\nu)} x + \gamma_{i\varkappa}^{(\nu)} x^2.$$

Wir setzen

$$\Omega\varphi(x) = \bar{\Omega};$$

dann genügt $\bar{\Omega}$ der Gleichung

$$(\alpha)\qquad \bar{\Omega}^2 - (g_{11} + g_{22})\bar{\Omega} + g_{11}g_{22} - g_{12}g_{21} = 0,$$

und es ist

$$\operatorname{Res}_{a_\nu}\Omega = \lim_{x=a_\nu}(x-a_\nu)\Omega = \frac{\bar{\Omega}(a_\nu)}{\varphi'(a_\nu)}, \quad \varphi'(x) = \frac{d\varphi(x)}{dx}, \qquad (\nu = 1, 2, 3)$$

$$\operatorname{Res}_\infty \Omega = -\lim_{x=\infty} x\Omega = -\lim_{x=\infty}\frac{\bar{\Omega}}{x^2} = \text{endlich}.$$

Es sollen $\bar{\Omega}(a_\nu)$ und $\lim\limits_{x=\infty}\frac{\bar{\Omega}}{x^2}$ von $\mu$ unabhängig sein. In ($\alpha$) ist $g_{11}+g_{22}$ eine Funktion zweiten Grades von $x$, in der der Koeffizient von $x^2$ von $\mu$ unabhängig ist, und die für $x = a_1, a_2, a_3$ von $\mu$ unabhängige Werte annehmen soll. Daraus folgt, daß $g_{11}+g_{22}$ überhaupt nicht von $\mu$ abhängen kann. Der Koeffizient $g_{11}g_{22} - g_{12}g_{21}$ in ($\alpha$) ist eine ganze Funktion vierten Grades von $x$; es sei

$$g_{11}g_{22} - g_{12}g_{21} = \mu^2\left(G_0 + \frac{G_1}{\mu} + \frac{G_2}{\mu^2} + \cdots \text{ in inf.}\right),$$

dann wird

$$\begin{aligned} G_0 &= (x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)(\alpha_0 x + \beta_0),\\ G_1 &= (x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)(\alpha_1 x + \beta_1),\\ G_2 &= \text{beliebig},\\ G_\lambda &= (x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)(\alpha_\lambda x + \beta_\lambda). \qquad (\lambda = 3, 4, \cdots) \end{aligned}$$

Da $g_{11}^{(0)} + g_{22}^{(0)} = 0$ ist, so ergibt sich

$$\varpi = \pm\sqrt{\frac{-(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)(\alpha_0 x + \beta_0)}{\varphi(x)^2}};$$

da aber $\lim\limits_{x=\infty} x\varpi = 0$ und folglich $\alpha_0 = 0$ sein muß, so finden wir endlich

$$\varpi = \frac{\text{const.}}{\sqrt{(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)}};$$

kann man rückwärts den Schluß ziehen, daß die Punkte $a_1, \ldots, a_\sigma$ $\infty$ die einzigen Verzweigungspunkte der Funktionen $\varpi_1, \ldots, \varpi_n$ sind.

In der Gleichung (20) lautet der Koeffizient von $\varpi^{n-1}$

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{g_{ii}^{(0)}(x)}{\varphi(x)};$$

da für diese rationale Funktion die zu den Polen $a_1, \ldots, a_\sigma, \infty$ gehörigen Residuen verschwinden und der Zähler von niedrigerem Grade ist als der Nenner, so ist diese Funktion identisch gleich Null; wir erhalten also in Übereinstimmung mit einem bekannten Satze

$$\sum_{i=1}^{n} \varpi_i = 0. \tag{24}$$

Wir bilden uns nun die Gleichungen

$$\sum_{\lambda=1}^{n} u_{i\lambda}\left[\frac{g_{\lambda\varkappa}(x)}{\varphi(x)} - \delta_{\lambda\varkappa}\Omega_i\right] = 0, \qquad (\varkappa = 1, 2, \cdots, n) \tag{25}$$

aus denen sich die Verhältnisse der Größen

$$u_{i1}, u_{i2}, \ldots, u_{in}$$

als algebraische Funktionen von $x$ bestimmen lassen. Legt man dem $x$ einen von $a_1, \ldots, a_\sigma, \infty$ verschiedenen Wert bei, so folgt nach Division durch $\mu$

$$\sum_{\lambda=1}^{n} u_{i\lambda}\left[\frac{g_{\lambda\varkappa}^{(0)} + \frac{g_{\lambda\varkappa}^{(1)}}{\mu} + \cdots}{\varphi(x)} - \delta_{\lambda\varkappa}\left(\varpi_i + \frac{\Omega_i^{(1)}}{\mu} + \cdots\right)\right] = 0;$$

wir finden also, abgesehen von einem von $\lambda$ unabhängigen Proportionalitätsfaktor,

$$u_{i\lambda} = u_{i\lambda}^{(0)} + \frac{u_{i\lambda}^{(1)}}{\mu} + \cdots \text{ in inf.}, \tag{26}$$

wo, in Übereinstimmung mit den Bezeichnungen der vorigen Vorlesung, die Verhältnisse der $u_{i\lambda}^{(0)}$ durch die Gleichungen

$$\sum_{\lambda=1}^{n} u_{i\lambda}^{(0)}\left(\frac{g_{\lambda\varkappa}^{(0)}}{\varphi(x)} - \delta_{\lambda\varkappa}\varpi_i\right) = 0 \qquad (\varkappa = 1, 2, \cdots, n) \tag{27}$$

bestimmt werden.

---

es ist also in der Tat

$$\omega = \int \frac{\text{const.}\, dx}{\sqrt{(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)}}$$

ein Integral erster Gattung.



Wir untersuchen jetzt die $u_{i\lambda}$ in einem der Punkte $x = a_\nu$. Wenn wir die Gleichungen (25) mit $x - a_\nu$ multiplizieren und dann $x = a_\nu$ setzen, so ergibt sich zufolge der Gleichungen (4) und (6)

$$\sum_{\lambda=1}^{n} u_{i\lambda}(a_\nu)(A_{\lambda\varkappa}^{(\nu)} - \delta_{\lambda\varkappa} r_i^{(\nu)}) = 0. \tag{28}$$

Es sei in der durch die Ungleichung (17) dargestellten Umgebung von $\mu = \infty$

$$A_{i\varkappa}^{(\nu)} = \mu \left( \alpha_{i\varkappa}^{(\nu)} + \frac{\beta_{i\varkappa}^{(\nu)}}{\mu} + \frac{\gamma_{i\varkappa}^{(\nu)}}{\mu^2} + \cdots \text{ in inf.} \right), \tag{29}$$

also

$$\alpha_{i\varkappa}^{(\nu)} = \lim_{x = a_\nu} (x - a_\nu) \frac{g_{i\varkappa}^{(0)}}{\varphi(x)} = \operatorname{Res}_{a_\nu} \frac{g_{i\varkappa}^{(0)}}{\varphi(x)}. \tag{30}$$

Da die $r_i^{(\nu)}$ von dem Parameter $\mu$ unabhängig sind, lauten die Gleichungen (28)

$$\sum_{\lambda=1}^{n} u_{i\lambda}(a_\nu) \left[ \alpha_{\lambda\varkappa}^{(\nu)} + \frac{\beta_{\lambda\varkappa}^{(\nu)} - \delta_{\lambda\varkappa} r_i^{(\nu)}}{\mu} + \frac{\gamma_{\lambda\varkappa}^{(\nu)}}{\mu^2} + \cdots \right] = 0;$$

wir finden also — natürlich auch wieder von einem Proportionalitätsfaktor abgesehen —

$$u_{i\lambda}(a_\nu) = u_{i\lambda}^{(0)}(a_\nu) + \frac{1}{\mu} u_{i\lambda}^{(1)}(a_\nu) + \cdots, \tag{31}$$

wo (vgl. die Gleichungen (28) und (22))

$$\sum_{\lambda=1}^{n} u_{i\lambda}^{(0)}(a_\nu) \alpha_{\lambda\varkappa}^{(\nu)} = 0 \tag{32}$$

ist. — Die charakteristische Gleichung (20) schreiben wir in der Form

$$\left| \frac{g_{i\varkappa}^{(0)}(x)}{\varphi(x)} (x - a_\nu) - \delta_{i\varkappa} \varpi \cdot (x - a_\nu) \right| = 0;$$

setzen wir dann $x = a_\nu$, so folgt mit Rücksicht auf die Gleichungen (22) und (30), daß die sämtlichen Wurzeln der zu der Matrix $(\alpha_{i\varkappa}^{(\nu)})$ gehörigen Fundamentalgleichung verschwinden. Es ist also jedenfalls

$$|\alpha_{i\varkappa}^{(\nu)}| = 0, \quad (i, \varkappa, = 1, 2, \cdots, n)$$

so daß sich aus den Gleichungen

$$\sum_{\lambda=1}^{n} v_\lambda^{(\nu)} \alpha_{\lambda\varkappa}^{(\nu)} = 0 \qquad (\varkappa = 1, 2, \cdots, n) \tag{33}$$

die Verhältnisse der $v_1^{(\nu)}, \ldots, v_n^{(\nu)}$ bestimmen lassen. Wir können folglich (vgl. (32))

(34) $$u_{i\lambda}^{(0)}(a_\nu) = v_\lambda^{(\nu)}$$

nehmen, so daß sich die Werte der Funktionen $u_{i\lambda}^{(0)}$ in den Punkten $a_\nu$ als von dem Index $i$ unabhängig erweisen. Nach (31) ist also

(35) $$u_{i\lambda}(a_\nu) = v_\lambda^{(\nu)} + \frac{1}{\mu} u_{i\lambda}^{(1)}(a_\nu) + \cdots.$$

Wir bemerken noch, daß zufolge der Gleichungen (11) die $\varphi_{i\varkappa}^{(\nu)}(a_\nu)$ denselben Gleichungen (28) genügen wie die $u_{i\varkappa}(a_\nu)$; wir können daher

$$\varphi_{i\varkappa}^{(\nu)}(a_\nu) = u_{i\varkappa}(a_\nu)$$

setzen und die Gleichungen (35) in der Form

(35a) $$\varphi_{i\varkappa}^{(\nu)}(a_\nu) = v_\varkappa^{(\nu)} + \frac{1}{\mu} u_{i\varkappa}^{(1)}(a_\nu) + \cdots$$

schreiben.

* * *

Wir gehen jetzt an die asymptotische Darstellung der Lösungen des Systems (1) für große Werte von $\mu$.

In der vorigen Vorlesung haben wir (S. 256) einen $x$-Wert regulär genannt, wenn er weder ein singulärer Punkt des Differentialsystems noch ein singulärer Punkt der algebraischen Funktion $\varpi$ war. Nach einer oben gemachten Bemerkung ist ein regulärer Punkt in dem jetzt vorliegenden Falle einfach dadurch charakterisiert, daß er mit keinem der Punkte $a_1, \ldots, a_\sigma, \infty$ zusammenfällt.

Es bedeute $y_1, \ldots, y_n$ ein Lösungssystem des Differentialsystems (1), das für den regulären Punkt $x = x_0$ Anfangswerte annimmt, die durch die Reihen

(36) $$e^{\mu\gamma}\left(\gamma_\varkappa^{(0)} + \frac{\gamma_\varkappa^{(1)}}{\mu} + \cdots \text{ in inf.}\right)$$

dargestellt werden. Diese Reihen mögen entweder für $|\mu| > R$ konvergent sein, oder, wenn $\mu$ seinen Strahl entlang, d. h. mit bestimmtem Argumente dem Unendlichen zustrebt, jene Anfangswerte der $y_1, \ldots, y_n$ asymptotisch darstellen. Legen wir dann von dem Punkte $x_0$ aus einen $x$-Strahl, so gelten nach den Ergebnissen der vorigen Vorlesung für die $y_1, \ldots, y_n$ im allgemeinen die asymptotischen Darstellungen

(37) $$y_\varkappa \backsim e^{\mu\omega_1+\gamma}\left(y_{1\varkappa}^{(0)} + \frac{y_{1\varkappa}^{(1)}}{\mu} + \cdots \text{ in inf.}\right), \quad (\varkappa = 1, 2, \cdots, n)$$

wenn $x$ einen Punkt des $x$-Strahles bedeutet, der zwischen $x_0$ und

dem auf diesem Strahle befindlichen, dem $x_0$ zunächst gelegenen singulären Punkte liegt. Dabei ist $\omega_1$ als dasjenige der Integrale

(38) $$\omega_i = \int_{x_0}^{x} \varpi_i \, dx$$

zu wählen, wofür

(39) $$\Re\left(\varpi_1 e^{\theta\sqrt{-1}}\right) > \Re\left(\varpi_x e^{\theta\sqrt{-1}}\right) \qquad (x = 2, 3, \cdots, n)$$

ist, wenn

(40) $$\theta = \operatorname{Arg} \mu + \operatorname{Arg}(x - x_0)$$

gesetzt wird. — Nun ist aber zufolge der Gleichung (24)

$$\sum_{i=1}^{n} \Re\left(\varpi_i e^{\theta\sqrt{-1}}\right) = 0;$$

es ist also für dasjenige $\varpi_1$, das der Ungleichung (39) genügt, $\Re\left(\varpi_1 e^{\theta\sqrt{-1}}\right)$ und folglich auch $\Re(\mu\omega_1)$ wesentlich positiv für alle $x$-Punkte des $x$-Strahles zwischen $x_0$ und dem zunächst gelegenen singulären Punkte. — Eine Änderung des $x$-Strahles und des $\mu$-Strahles kann bewirken, daß in der Ungleichung (39) nicht mehr $\varpi_1$, sondern ein anderes $\varpi_i$ auf der linken Seite erscheint, d. h. die erste Stelle einnimmt; dann treten in den asymptotischen Darstellungen (37) das betreffende $\omega_i$ und die zugehörigen $\bar{y}_{ix}^{(0)}, \bar{y}_{ix}^{(1)}, \ldots$ an die Stelle der $\omega_1, \bar{y}_{1x}^{(0)}, \bar{y}_{1x}^{(1)}, \ldots$, und es ist, für die in Betracht kommenden $\mu$- und $x$-Werte, $\Re(\mu\omega_i)$ wesentlich positiv.*)

Denken wir uns jetzt die von den singulären Punkten $a_1, \ldots, a_\sigma$ nach dem Unendlichen geführten Schnitte $l_1, \ldots, l_\sigma$ längs der den Punkt $x_0$ mit den Punkten $a_1, \ldots, a_\sigma$ verbindenden Strahlen gelegt, so wird der Bereich $\bar{T}$ mit dem zu dem Punkte $x_0$ als Mittelpunkt

*) Wir bemerken, daß, wenn $\Re(\mu\omega_i)$ für ein gewisses festes Argument von $\mu$ positiv ist, dies natürlich auch für solche Argumente von $\mu$ der Fall sein wird, die in hinreichender Nähe jenes festen Argumentes liegen, so daß also die für $y_1, \ldots, y_n$ erzielten asymptotischen Darstellungen allemal in einem zweidimensionalen Winkelraume von $\mu$ gültig sind. Diese Bemerkung ist darum von Wichtigkeit, weil sie zeigt, daß die folgenden Schlüsse nicht nur dann gültig sind, wenn $\mu$ mit einem festen Argumente, d. h. also längs einer Kurve, die eine bestimmte Asymptote besitzt, dem Unendlichen zustrebt, sondern auch, wenn die Annäherung in einer willkürlichen Kurve erfolgt. Annäherungskurven, die den Punkt $\mu = \infty$ umkreisen, können ausgeschlossen werden, da es sich ja um Funktionen handelt, die in der Umgebung von $\mu = \infty$ eindeutig sind.

gehörigen Stern von Mittag-Leffler identisch sein, und wir können das folgende Theorem aussprechen:

Die Elemente eines Lösungssystems $y_1, \ldots, y_n$ des Differentialsystems (1), deren Anfangswerte im Punkte $x_0$ durch die Reihen*)

$$\gamma_x^{(0)} + \frac{\gamma_x^{(1)}}{\mu} + \cdots \text{ in inf.} \qquad (x = 1, 2, \cdots, n) \tag{36a}$$

asymptotisch (oder konvergent) dargestellt werden, wenn $\mu$ in einer gewissen, übrigens beliebigen Richtung ins Unendliche geht, werden für jeden $x$-Wert, der innerhalb des zum Punkte $x_0$ gehörigen Mittag-Lefflerschen Sterns gelegen ist, mit ins Unendliche wachsendem $\mu$ im allgemeinen selbst unendlich groß. Nur solche Integralsysteme, deren asymptotische Darstellungen (37) nicht zu demjenigen $\varpi_i$ gehören, für das $\Re(\mu\omega_i)$ den größten Wert hat, können dem Grenzwerte Null zustreben oder auch für spezielle Argumente von $\mu$ völlig unbestimmt werden.

Wir betrachten nun den Fall, wo sich die Variable $x$ auf einer von $x_0$ ausgehenden gebrochenen Linie bewegt; wir können uns dabei auf solche Linien beschränken, die nur einen Knickpunkt besitzen. Es möge also $x$ von $x_0$ aus auf einem Strahle nach $x_1$ und dann von $x_1$ aus auf einem andern Strahle nach $x_2$ gehen; das Argument des Parameters $\mu$ denken wir uns ein für allemal fixiert. Das Integralsystem $y_1, \ldots, y_n$, dessen Anfangswerte für $x = x_0$ durch die Reihen (36a) dargestellt werden, besitzt längs des ersten Strahles eine asymptotische Darstellung

$$y_x(x) \backsim e^{\mu\omega_1(x)}\left(\bar{y}_{1x}^{(0)}(x) + \frac{\bar{y}_{1x}^{(1)}(x)}{\mu} + \cdots \text{ in inf.}\right), \qquad (x = 1, 2, \cdots, n)$$

wo, allgemein gesprochen, $\omega_1$ so beschaffen ist, daß auf diesem ersten Strahle $\Re(\mu\omega_1)$ am größten, also positiv ist. Wir haben also für die Werte der $y_x$ im Punkte $x_1$ die asymptotischen Darstellungen

$$y_x(x_1) \backsim e^{\mu\omega_1(x_1)}\left(\bar{y}_{1x}^{(0)}(x_1) + \frac{\bar{y}_{1x}^{(1)}(x_1)}{\mu} + \cdots \text{ in inf.}\right). \tag{41}$$

Es sei nun längs des zweiten (von $x_1$ ausgehenden) Strahles

$$\omega_i' = \int_{x_1}^{x} \varpi_i \, dx \qquad (i = 1, 2, \cdots, n)$$

*) Wo wir jetzt $\gamma = 0$ genommen haben.

und $\omega_2'$ dasjenige der $\omega_1', \ldots, \omega_n'$, für das $\Re(\mu\omega_2')$ den größten Wert unter allen $\Re(\mu\omega_i')$ hat. Dann ist im allgemeinen für alle auf $x_1$ folgenden regulären Punkte des zweiten Strahles

$$y_\varkappa(x) \backsim e^{\mu(\omega_2'(x)+\omega_1(x_1))}\left(\bar{\bar{y}}_{2\varkappa}^{(0)}(x) + \frac{1}{\mu}\,\bar{\bar{y}}_{2\varkappa}^{(1)}(x) + \cdots \text{ in inf.}\right),$$

wo die $\bar{\bar{y}}_{2\varkappa}^{(0)}(x)$, $\bar{\bar{y}}_{2\varkappa}^{(1)}(x)$, ..., nach der in der vorigen Vorlesung gegebenen Vorschrift, in der Weise zu bestimmen sind, wie es die in den Gleichungen (41) enthaltenen asymptotischen Darstellungen der Anfangswerte der $y_1, \ldots, y_n$ im Punkte $x_1$ erfordern.

Wenn also der Punkt $x$ mit dem Punkte $x_0$ durch eine keinen singulären Punkt enthaltende gebrochene Linie mit beliebig vielen Knickpunkten verbunden ist, so werden die Werte des Integralsystems $y_1, \ldots, y_n$, die in $x$ durch analytische Fortsetzung längs jener gebrochenen Linie zum Vorschein kommen, im allgemeinen in der Form

$$y_\varkappa(x) \backsim e^{\mu(\omega_i(x)+p)}\left(y_{i\varkappa}^{(0)}(x) + \frac{1}{\mu}\,y_{i\varkappa}^{(1)}(x) + \cdots \text{ in inf.}\right)$$
$$(\varkappa = 1, 2, \cdots, n)$$

asymptotisch darstellbar sein, wo $p$ eine Konstante bedeutet, und wo

$$\Re[\mu(\omega_i(x) + p)] > 0$$

ist. Die $\omega_i(x)$, $y_{i\varkappa}^{(0)}(x)$, $y_{i\varkappa}^{(1)}(x)$, ... hat man in der Weise zu bestimmen, daß in einem jeden Knickpunkte der gebrochenen Linie die asymptotische Darstellung längs des daselbst ausgehenden Strahles denjenigen Anfangswerten gemäß herzustellen ist, die durch die längs des in jenem Knickpunkte endenden Strahles gültigen asymptotischen Darstellungen gegeben werden.

Wir sehen also, daß ein Integralsystem, das in einem regulären Punkte $x_0$ Werte annimmt, die durch asymptotische Reihen von der Form (36) dargestellt werden können, die Eigenschaft hat, daß jeder Zweig dieses Integralsystems in jedem regulären Punkte $x$ eine asymptotische Darstellung von derselben Form zuläßt, und wir werden diese Darstellung dadurch erhalten, daß wir den von $x_0$ nach $x$ hinführenden Fortsetzungsweg durch eine ihm äquivalente gebrochene Linie ersetzen und für diese in der oben beschriebenen Weise verfahren. Da eine Funktion nur auf eine Weise asymptotisch dargestellt werden kann, so erkennen wir, daß die in $x$ erzielte asymptotische Darstellung von der Wahl der zu ihrer Herstellung benutzten gebrochenen Linie unabhängig ist, sofern wir nur solche gebrochene Linienzüge zulassen, die einander und dem Fortsetzungswege äquiva-

bar sind, d. h. durch stetige Deformation innerhalb $T$ ineinander übergeführt werden können.

Es sei nun die von $x_0$ ausgehende gebrochene Linie eine geschlossene, d. h. also ein geradliniges Polygon, dessen eine Ecke $x_0$ ist. Wir denken uns dieses Polygon in einem gewissen Sinne durchlaufen und bezeichnen denjenigen Teil der Ebene, der dabei zur Linken bleibt, als das Innere dieses Polygons. Es möge dann im Innern unseres Polygons ein einziger singulärer Punkt, etwa $a_\nu$, gelegen sein, wo $\nu$ einen der Werte $1, 2, \ldots, \sigma, \sigma - 1$ bedeuten kann. Bezeichnen wir dann mit $(u_{\lambda\varkappa})$ diejenige Integralmatrix des Differentialsystems (1), die sich im Punkte $x_0$ auf die Einheitsmatrix $(\delta_{\lambda\varkappa})$ reduziert,

$$u_{\lambda\varkappa} = \overline{I}\int_{x_0}^{x}\left(\frac{g_{\lambda\varkappa}(x)}{\varphi(x)}\,dx + \delta_{\lambda\varkappa}\right),$$

so sind diejenigen Werte der $u_{\lambda\varkappa}$, die im Punkte $x_0$ zum Vorschein kommen, wenn wir längs jenes Polygons analytisch fortsetzen, nichts anderes als die Elemente der Fundamentalsubstitution $(A^{\nu}_{\lambda\varkappa})$, die die Integralmatrix $(u_{\lambda\varkappa})$ bei einer Umkreisung des Punktes $a_\nu$ erfährt. Die Anfangswerte $(\delta_{\lambda\varkappa})$ der $(u_{\lambda\varkappa})$ im Punkte $x_0$ sind von $\varrho$ unabhängig, also jedenfalls in der Form (36a) darstellbar; wir können daher schließen, daß die $A^{\nu}_{\lambda\varkappa}$ asymptotische Darstellungen von der Form

(42) $$A^{\nu}_{\lambda\varkappa} \backsim e^{\varrho p_\lambda}\left(a^{\nu}_{\lambda\varkappa} + \frac{1}{\varrho}\, b^{\nu}_{\lambda\varkappa} + \cdots \text{ in inf.}\right)$$

zulassen werden, wo, allgemein gesprochen,

(43) $$\Re(\varrho p_\lambda) > 0$$

ist, während die $a^{\nu}_{\lambda\varkappa}$ die Werte gewisser $y^{0}_{\lambda\varkappa}$ im Punkte $x_0$ bedeuten, deren erster Index $\lambda$ von dem Werte des Index $i$ unabhängig ist.

Wir schließen hieraus zuvörderst, daß wenn der Parameter $\varrho$ mit einem beliebigen Argumente*) ins Unendliche rückt, im allgemeinen die sämtlichen Elemente $A^{\nu}_{\lambda\varkappa}$ der Fundamentalsubstitutionen unendlich werden.

Ehe wir weiter gehen, knüpfen wir an die Darstellungen (42) noch eine Bemerkung.

Die Wurzeln

$$e^{2\pi\sqrt{-1}\,r_i} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

---

*) Vergl. hierzu die Fußnote auf S. 277.

der zu dem Punkte $a_\nu$, oder was dasselbe heißt, zu der Matrix $(A_{ix}^{(\nu)})$ gehörigen Fundamentalgleichung

$$|A_{ix}^{(\nu)} - \delta_{ix}\omega| = 0$$

sind zufolge unserer Voraussetzung von dem Parameter $\mu$ unabhängig. Daraus folgt, daß die durch die linearen Gleichungssysteme

(44) $$\sum_{\lambda=1}^{n} B_{i\lambda}^{(\nu)}\left(A_{\lambda x}^{(\nu)} - \delta_{\lambda x} e^{2\pi\sqrt{-1}\, r_i^{(\nu)}}\right) = 0 \qquad (i, x = 1, 2, \cdots, n)$$

bestimmten Verhältnisse der

(45) $$B_{i1}^{(\nu)},\ B_{i2}^{(\nu)}, \ldots,\ B_{in}^{(\nu)}$$

einer asymptotischen Darstellung von der Form

(46) $$\alpha_0 + \frac{1}{\mu}\alpha_1 + \cdots \text{ in inf.}$$

fähig sind. Die Größen (45) sind aber offenbar mit den in der dreizehnten Vorlesung ebenso bezeichneten Elementen der Matrizen $(B_{ix}^{(\nu)})$ identisch, die die Substitutionen $(A_{ix}^{(\nu)})$ auf ihre kanonische Form

$$(B_{ix}^{(\nu)})(A_{ix}^{(\nu)})(B_{ix}^{(\nu)})^{-1} = (\delta_{ix} e^{2\pi\sqrt{-1}\, r_i^{(\nu)}})$$

transformieren, sie stimmen also nach Gleichung (15a) (S. 271) mit den Werten $\varphi_{ix}^{(\nu)}(x_0)$ überein, wo die $\varphi_{ix}^{(\nu)}(x)$ die in der Umgebung von $x = a_\nu$ holomorphen Faktoren der Elemente der zu $x = a_\nu$ gehörigen kanonischen Integralmatrix $(\eta_{ix}^{(\nu)})$ bedeuten (siehe die Gleichungen (8)). Denken wir uns die Verhältnisse

(47) $$\eta_{i1}^{(\nu)} : \eta_{i2}^{(\nu)} : \cdots : \eta_{in}^{(\nu)}$$

gebildet, so sind also die Werte dieser Verhältnisse im Punkte $x_0$ einer asymptotischen Darstellung von der Form (46) fähig. Wir verbinden nun die Punkte $x_0$ und $a_\nu$ durch eine ganz innerhalb unseres Polygons verlaufende gerade oder gebrochene Linie; dann sind jene Verhältnisse (47), nach dem Vorhergehenden, bis in jede beliebige Nähe des Punktes $a_\nu$ asymptotischer Darstellungen fähig. Die Darstellungen, die den in $a_\nu$ einmündenden Strahl entlang gültig sind, gehen aber, wenn $x$ in den Punkt $a_\nu$ hineinrückt, formell in die Verhältnisse der auf den rechten Seiten der Gleichungen (35) auftretenden Reihen über. Diese letzteren Reihen stellen die Werte $\varphi_{ix}^{(\nu)}(a_\nu)$ — von einem Proportionalitätsfaktor abgesehen — in einer gewissen Umgebung von $\mu = \infty$ konvergent dar, wir können also sagen:

Die Verhältnisse der Elemente der zu einem singulären Punkte $a_\nu$ gehörigen kanonischen Integralmatrix des Diffe-

rentialsystems (1) sind längs eines jeden in diesem Punkte einmündenden Strahles einer asymptotischen Darstellung für große Werte von $\mu$ fähig, und diese Darstellung bleibt in jenem singulären Punkte $a_\nu$ selbst gültig, indem sie daselbst in eine konvergente Reihenentwickelung übergeht.

Wir wenden uns jetzt wieder zu dem oben aufgestellten Satze zurück, wonach die $A_{i\varkappa}^{(\nu)}$ im allgemeinen unendlich werden, wenn der Parameter $\mu$ in beliebiger Richtung dem Unendlichen zustrebt. Dieser Satz kann nämlich noch schärfer gefaßt werden.

Wenn wir in der Fundamentalgleichung

$$A_{i\varkappa}^{(\nu)} - \delta_{i\varkappa} e^{2\pi\sqrt{-1}\, r_\lambda^{(\nu)}} = 0 \qquad (i, \varkappa = 1, 2, \cdots, n;\ \lambda = 1, 2, \cdots, n)$$

für die $A_{i\varkappa}^{(\nu)}$ ihre asymptotischen Darstellungen (42) einsetzen, so folgt, indem wir $\mu$ in der oft bezeichneten Weise ins Unendliche rücken lassen,

$$\mathfrak{a}_{i\varkappa}^{(\nu)} - \delta_{i\varkappa} e^{2\pi\sqrt{-1}\, r_\lambda^{(\nu)}} \lim_{\mu=\infty} e^{-\mu p_i} = 0.$$

Es sind nun die folgenden Fälle in Betracht zu ziehen:

I. Es kann

$$\lim_{\mu=\infty} e^{-\mu p_i} = 0 \qquad (i = 1, 2, \cdots, n)$$

sein. In diesem Falle ist also

$$\lim_{\mu=\infty} A_{i\varkappa}^{(\nu)} = \infty, \qquad (i, \varkappa = 1, 2, \cdots, n)$$

und die Wurzeln der zu der Matrix $(\mathfrak{a}_{i\varkappa}^{(\nu)})$ gehörigen charakteristischen Gleichung sind insgesammt gleich Null. Dieser Fall ist der allgemeine, wo nämlich die asymptotischen Darstellungen aller $A_{i\varkappa}^{(\nu)}$ zu demjenigen $\omega_1$ gehören, für das $\Re(\mu\omega_1)$ am größten, also positiv ist, und wo demnach die

$$\mathfrak{a}_{i\varkappa}^{(\nu)} = y_{1\varkappa}^{(0)}(x_0)$$

von dem Index $i$ unabhängige Werte besitzen.

II. Der Fall, daß alle $e^{-\mu p_i}$ mit wachsendem $\mu$ unendlich großen Grenzwerten zustreben, ist ausgeschlossen, da die zu der Matrix $(\mathfrak{a}_{i\varkappa}^{(\nu)})$ gehörige charakteristische Gleichung keine unendlich große Wurzel haben kann.

III. Es ist

$$\lim_{\mu=\infty} e^{-\mu p_i} = 0,$$

wenigstens für einen Wert des Index $i$; dann sind die Grenzwerte der mit diesem Index $i$ behafteten $A_{i\varkappa}^{(\nu)}$ unendlich groß.

IV. Es kann

$$\lim_{\mu=\infty} e^{-\mu p_i} = 1$$

d. h. also

$$p_i = 0 \qquad (i = 1, 2, \cdots, n)$$

sein. Wenn dieser Fall für einen oder mehrere der Werte

$$\nu = 1, 2, \cdots, \sigma + 1$$

eintritt, aber nicht für alle, so können die betreffenden $A_{i\varkappa}^{(\nu)}$ den endlichen Grenzwerten $\mathfrak{a}_{i\varkappa}^{(\nu)}$ zustreben, und die $e^{2\pi\sqrt{-1}r_\lambda^{(\nu)}}$ sind dann die Wurzeln der zu der Matrix $(\mathfrak{a}_{i\varkappa}^{(\nu)})$ gehörigen charakteristischen Gleichung

$$|\mathfrak{a}_{i\varkappa}^{(\nu)} - \delta_{i\varkappa}\varrho| = 0. \qquad (i, \varkappa = 1, 2, \cdots, n)$$

In diesem Falle muß also die Determinante $|\mathfrak{a}_{i\varkappa}^{(\nu)}|$ der Matrix $(\mathfrak{a}_{i\varkappa}^{(\nu)})$ von Null verschieden sein. Daraus folgt aber, daß diese Matrix mit der Matrix $(y_{i\varkappa}^{(0)}(x_0))$ übereinstimmt, d. h. daß die asymptotischen Darstellungen der $A_{i\varkappa}^{(\nu)}$ für $i = 1, 2, \ldots, n$ zu den $n$ verschiedenen $\omega_i (i = 1, 2, \ldots, n)$ gehören. Denn wenn für zwei verschiedene Werte von $i$ etwa $i = 1$, $i = 2$ die asymptotischen Darstellungen der $A_{1\varkappa}^{(\nu)}$, $A_{2\varkappa}^{(\nu)}$ zu einem und demselben $\omega_\lambda$ gehörten, so wäre

$$\mathfrak{a}_{1\varkappa}^{(\nu)} = \overset{1}{y}{}_{\lambda\varkappa}^{(0)}(x_0), \quad \mathfrak{a}_{2\varkappa}^{(\nu)} = \overset{2}{y}{}_{\lambda\varkappa}^{(0)}(x_0),$$

so daß sich die $\mathfrak{a}_{1\varkappa}^{(\nu)}$, $\mathfrak{a}_{2\varkappa}^{(\nu)}$ nur durch einen von dem Index $\varkappa$ unabhängigen Faktor unterscheiden würden, die Determinante $|\mathfrak{a}_{i\varkappa}^{(\nu)}|$ wäre also gleich Null. — Für einen Wert von $\nu$, für den dieser Fall **nicht** eintritt, gibt es unter den $A_{i\varkappa}^{(\nu)}$ dann noch immer solche, die dem Grenzwerte Unendlich zustreben. Wir haben also nur noch den Fall zu betrachten, wo:

V. die unter IV. besprochenen Verhältnisse für **alle** $\nu = 1, 2, \ldots, \sigma + 1$ stattfinden. In diesem Falle sind die Integrale

$$\int \varpi_i dx,$$

erstreckt längs der von $x_0$ ausgehenden und die Punkte $a_\nu$ einzeln einschließenden geschlossenen Polygone, gleich Null. Es verschwinden folglich die sämtlichen Periodizitätsmoduln der Integrale erster Gattung $\omega_i$, diese Integrale erster Gattung sind also selbst identisch gleich Null. Es hat also die charakteristische Gleichung (20) die $n$-fache Wurzel Null.

Wir hatten von vornherein die Voraussetzung gemacht, daß die charakteristische Gleichung (20) für ein unbestimmtes $x$ $n$ voneinander

verschiedene Wurzeln besitzen soll, und haben unter dieser Voraussetzung die formellen Entwickelungen (25) der vierzehnten Vorlesung (S. 253) aufgestellt. Um jedoch den jetzt in Rede stehenden Fall vollständig zu erledigen, müssen wir die Möglichkeit ins Auge fassen, wo zwar die $\omega_1, \ldots, \omega_n$ sämtlich verschwinden, gleichwohl aber $n$ Systeme formeller Entwickelungen von der Form (25) der vorigen Vorlesung, d. h. von der Form

(48) $$y_{ix}^{(0)} + \frac{1}{\mu} y_{ix}^{(1)} + \cdots \text{ in inf.} \qquad (i, x = 1, 2, \ldots, n)$$

vorhanden sind, für die die Determinante $|y_{ix}^{(0)}|$ nicht identisch verschwindet. Bilden wir mit den Entwickelungen (48) formell die derivierte Matrix

$$D_x\left(y_{ix}^{(0)} + \frac{1}{\mu} y_{ix}^{(1)} + \cdots \text{ in inf.}\right),$$

so erhalten wir für die Elemente dieser Matrix formelle Entwickelungen von der Form

$$a_{ix}^{(1)} + \frac{1}{\mu} a_{ix}^{(2)} + \frac{1}{\mu^2} a_{ix}^{(3)} + \cdots \text{ in inf.},$$

und diese müssen, da die Reihen (48) formell dem Differentialsysteme (1) genügen, mit den Entwickelungen der Koeffizienten

$$a_{ix} = \frac{g_{ix}(x)}{\varphi(x)}$$

übereinstimmen. Wir finden somit, daß in den für $|\mu| > R$ konvergenten Reihen (16) die $g_{ix}^{(0)}$ insgesamt wegfallen müssen; in diesem Falle ist also der Punkt $\mu = \infty$ eine Stelle, in deren Umgebung die Koeffizienten des Differentialsystems holomorph sind. Es sind folglich nach dem Horn-Poincaréschen Satze (S. 242) die Entwickelungen (48) in diesem Falle für große Werte von $\mu$ konvergent.

VI. Der Fall, daß in einzelnen oder in allen Größen $\mu p_i$ nur die realen Teile verschwinden, die Koeffizienten von $\sqrt{-1}$ aber von Null verschieden sind, kann nur für gewisse Ausnahmewerte des Arguments von $\mu$ eintreten. Für diese nähern sich die $A_{ix}^{(\nu)}$ bei wachsendem $\mu$ überhaupt keinen bestimmten Grenzwerten an, sondern sind für $\lim \mu = \infty$ völlig unbestimmt.

Wir fassen die Ergebnisse dieser Vorlesung, soweit wir sie für unsere weiteren Untersuchungen anzuwenden haben werden, in den folgenden Lehrsatz zusammen.

Wenn die Koeffizienten des schlechthin kanonischen Differentialsystems (1) von einem Parameter $\mu$ so abhängen, daß die $g_{ix}$ in der Umgebung von $\mu = \infty$ eindeutig sind und

in $\mu = \infty$ einen Pol besitzen, während die singulären Punkte $a_1, \ldots, a_\sigma$ und die Wurzeln der zu $a_1, \ldots, a_\sigma, \infty$ gehörigen determinierenden Fundamentalgleichungen (die wir ungleich und nicht um ganze Zahlen voneinander verschieden voraussetzen) von $\mu$ unabhängig sind, so werden, wenn $\mu$ ins Unendliche rückt, allemal einige der Elemente der zu der Integralmatrix

$$\widehat{\int_{x_0}^{x}}\left(\frac{g_{ix}(x)}{\varphi(x)}\,dx + \delta_{ix}\right)$$

gehörigen Fundamentalsubstitutionen $(A_{ix}^{(\nu)})$ $(\nu = 1, 2, \cdots, \sigma+1)$ ebenfalls unendlich oder völlig unbestimmt. Das letztere kann nur für spezielle Argumente von $\mu$ eintreten.

# Sechzehnte Vorlesung.

**Kontinuitätsmethode. Beweis der Lösbarkeit des Riemannschen Problems. Folgerungen. Die Inversen der ganzen transzendenten Funktionen $E_{ix}^{(\nu)}$. Ein allgemeines Theorem über die Kogredienz. Lösung des Riemannschen Problems durch die Fuchsschen Zetareihen, wenn die Konvergenzbedingungen erfüllt sind. Zwei Bemerkungen.**

Wir haben jetzt die Hilfsmittel bereit gestellt, deren wir bedürfen, um den Nachweis zu führen, daß das in der dreizehnten Vorlesung (S. 229) formulierte Riemannsche Problem stets eine Lösung zuläßt. Bei diesem Nachweise bedienen wir uns der sogenannten Kontinuitätsmethode, deren Prinzipien F. Klein und H. Poincaré entwickelt und zum Beweise des Fundamentaltheorems der Theorie der Fuchsschen Funktionen benutzt haben. Das Wesen dieser Methode besteht im folgenden.*)

Man denke sich zwei reale Mannigfaltigkeiten $M$ und $\mathfrak{M}$ von gleicher Dimensionszahl $q$, die Koordinaten eines Punktes von $M$ seien $x_1, \ldots, x_q$, die eines Punktes von $\mathfrak{M}$ seien $\xi_1, \ldots, \xi_q$. Diese beiden Mannigfaltigkeiten seien so aufeinander bezogen, daß $\xi_1, \ldots, \xi_q$ analytische Funktionen der realen Variabeln $x_1, \ldots, x_q$

$$\xi_i = f_i(x_1, \ldots, x_q) \qquad (i = 1, 2, \cdots, q)$$

sind, und daß jedem Wertesysteme $x_1, \ldots, x_q$, d. h. jedem Punkte der Mannigfaltigkeit $M$ ein bestimmtes Wertesystem $\xi_1, \ldots, \xi_q$, d. h. ein wohlbestimmter Punkt der Mannigfaltigkeit $\mathfrak{M}$ entspricht. Ferner sei bekannt, daß keinem Wertesystem $\xi_1, \ldots, \xi_q$, d. h. keinem Punkte von $\mathfrak{M}$, mehr als ein Punkt $(x_1, \ldots, x_q)$ der Mannigfaltigkeit $M$ entsprechen kann. Wenn dann die Mannigfaltigkeit $M$ eine geschlossene ist, d. h. keinen Rand besitzt, so kann man schließen, daß auch umgekehrt jedem Punkte $(\xi_1, \ldots, \xi_q)$ von $\mathfrak{M}$ ein Punkt $(x_1, \ldots, x_q)$ von $M$ entsprechen muß. Dabei ist zu bemerken, daß nach einem Satze von

*) Poincaré, Acta Mathem. Bd. 4, S. 233, 276.

Riemann*) nur Mannigfaltigkeiten von $q-1$ Dimensionen den Rand einer Mannigfaltigkeit von $q$ Dimensionen bilden können.

Wir betrachten ein schlechthin kanonisches Differentialsystem

$$\frac{du_\varkappa}{dx} = \sum_{\lambda=1}^{n} u_\lambda \sum_{\nu=1}^{\sigma} \frac{A_{\lambda\varkappa}^{(\nu)}}{x-a_\nu} \qquad (\varkappa = 1, 2, \cdots, n)$$

und fassen einerseits die $n^2\sigma$ Elemente der Residuenmatrizen $(A_{i\varkappa}^{(\nu)})$, andererseits die $n^2\sigma$ Elemente der Fundamentalsubstitutionen $(\mathsf{A}_{i\varkappa}^{(\nu)})$, die zu der Integralmatrix gehören, die sich für $x = x_0$ auf $(\delta_{i\varkappa})$ reduziert, ins Auge. Die Lage der singulären Punkte $a_1, \ldots, a_\sigma$ und die von diesen aus nach dem Unendlichen hingelegten Schnitte $l_1, \ldots, l_\sigma$ ebenso wie die Lage des regulären Punktes $x_0$ denken wir uns ein für allemal fixiert. Es gehört dann zu jedem endlichen Wertesystem der $A_{i\varkappa}^{(\nu)}$ ein wohlbestimmtes Wertesystem der $\mathsf{A}_{i\varkappa}^{(\nu)}$, das durch die ganzen transzendenten Funktionen

$$\mathsf{A}_{i\varkappa}^{(\nu)} = E_{i\varkappa}^{(\nu)}(A_{11}^{(1)}, \ldots, A_{nn}^{(\sigma)}) \qquad \binom{i, \varkappa = 1, 2, \cdots, n}{\nu = 1, 2, \cdots, \sigma}$$

(Gl. (17) der vierzehnten Vorlesung, S. 245) geliefert wird, und für das die Determinanten $|\mathsf{A}_{i\varkappa}^{(\nu)}|$ nicht verschwinden. — Die Frage nach der Lösbarkeit des Riemannschen Problems kommt, wie wir bereits (a. a. O., S. 250) hervorgehoben, darauf hinaus, ob, wenn die $A_{i\varkappa}^{(\nu)}$ alle endlichen Wertesysteme durchlaufen, die Funktionen $E_{i\varkappa}^{(\nu)}$ auch alle möglichen Werte der $\mathsf{A}_{i\varkappa}^{(\nu)}$ durchlaufen werden, für die die Determinanten $|\mathsf{A}_{i\varkappa}^{(\nu)}|$ von Null verschiedene Werte haben. Wir haben auch schon bemerkt, daß wir die Variabilität der $A_{i\varkappa}^{(\nu)}$ auf einen Fundamentalbereich der ganzen transzendenten Funktionen $E_{i\varkappa}^{(\nu)}$ beschränken können (vgl. S. 247), innerhalb dessen diese Funktionen jedes Wertesystem, dessen sie überhaupt fähig sind, nur ein einziges Mal annehmen. Wir können aber, da der „leichtere Teil" des Riemannschen Problems (vgl. die dreizehnte Vorlesung, S. 236 ff.) als erledigt gelten kann, die $A_{i\varkappa}^{(\nu)}$ noch weiter beschränken. — Immer unter der vereinfachenden Annahme, daß die Fundamentalgleichungen der Matrizen $(\mathsf{A}_{i\varkappa}^{(1)}), \ldots, (\mathsf{A}_{i\varkappa}^{(\sigma)})$ und

$$(\mathsf{A}_{i\varkappa}^{(\sigma+1)}) = (\mathsf{A}_{i\varkappa}^{(1)})^{-1} \ldots (\mathsf{A}_{i\varkappa}^{(\sigma)})^{-1}$$

lauter einfache Wurzeln $\omega_i^{(\nu)}$ besitzen, können wir nämlich die $A_{i\varkappa}^{(\nu)}$ stets so einrichten, daß die Wurzeln $r_i^{(\nu)}$ der zu $a_1, \ldots, a_\sigma, \infty$ gehörigen determinierenden Fundamentalgleichungen mit den $\omega_i^{(\nu)}$ durch die Gleichungen

*) Werke (1892), S. 481.

$$r_i^{(\nu)} = \frac{\log \omega_i^{(\nu)}}{2\pi\sqrt{-1}} \quad (i = 1, 2, \cdots, n; \quad \nu = 1, 2, \cdots, \sigma + 1)$$

verbunden sind, d. h. wir können die $r_i^{(\nu)}$ selbst als von vornherein fest gegebene Größen ansehen. Die Fixierung dieser Größen drückt sich in der Weise aus, daß die $A_{i\varkappa}^{(\nu)}$ gewissen algebraischen Bedingungsgleichungen zu genügen haben; durch diese Bedingungsgleichungen wird aus der Mannigfaltigkeit aller $A_{i\varkappa}^{(\nu)}$ eine algebraische Mannigfaltigkeit $M$ ausgesondert, die, wie wir in der dreizehnten Vorlesung gesehen haben (S. 237), noch von $N$ willkürlichen komplexen Parametern abhängt und folglich als reale Mannigfaltigkeit aufgefaßt $2N$-fach ausgedehnt erscheint. Natürlich ist die Mannigfaltigkeit $M$ in einem wohlbestimmten Fundamentalbereiche der Funktionen $E_{i\varkappa}^{(\nu)}$ enthalten.

Wenn wir die $A_{i\varkappa}^{(\nu)}$ auf die Mannigfaltigkeit $M$ beschränken, so haben die entsprechenden Wertesysteme $\mathsf{A}_{i\varkappa}^{(\nu)}$ der Funktionen $E_{i\varkappa}^{(\nu)}$ die folgenden Eigenschaften. Die Wurzeln der zu den Matrizen $(\mathsf{A}_{i\varkappa}^{(\nu)})$ gehörigen Fundamentalgleichungen sind die festen Größen

$$(1) \qquad e^{2\pi\sqrt{-1}\, r_i^{(\nu)}} = \omega_i^{(\nu)}; \qquad (i = 1, 2, \cdots, n; \quad \nu = 1, 2, \cdots, \sigma + 1)$$

die Determinanten $|\mathsf{A}_{i\varkappa}^{(\nu)}|$ sind folglich von Null verschieden; die $\mathsf{A}_{i\varkappa}^{(\nu)}$ hängen demzufolge noch von $N$ komplexen, d. h. $2N$ realen Parametern ab (vgl. die dreizehnte Vorlesung, S. 237), die aber ihrerseits durch die $A_{i\varkappa}^{(\nu)}$, d. h. durch die $2N$ realen Koordinaten der Punkte von $M$ eindeutig bestimmt sind. Wir bezeichnen die Mannigfaltigkeit der $(\mathsf{A}_{i\varkappa}^{(\nu)})$, die hervorgeht, wenn die $(A_{i\varkappa}^{(\nu)})$ die Punkte von $M$ durchlaufen, durch $\overline{\mathfrak{M}}$.

Neben diese Mannigfaltigkeit $\overline{\mathfrak{M}}$ stellen wir jetzt die auf die folgende Weise definierte Mannigfaltigkeit $\mathfrak{M}$. Aus der Mannigfaltigkeit der $n^2\sigma$ willkürlichen komplexen Größen $\mathsf{A}_{i\varkappa}^{(\nu)}$ $(i, \varkappa = 1, 2, \cdots, n; \ \nu = 1, 2, \cdots, \sigma)$ sondern wir diejenigen Größensysteme aus, für die die Fundamentalgleichungen

$$|\mathsf{A}_{i\varkappa}^{(\nu)} - \delta_{i\varkappa}\,\omega| = 0 \qquad (\varkappa = 1, 2, \cdots, \sigma + 1)$$

die Wurzeln (1) besitzen; dabei ist $(\mathsf{A}_{i\varkappa}^{(\sigma+1)})$ durch die Gleichung

$$(\mathsf{A}_{i\varkappa}^{(\sigma+1)}) = (\mathsf{A}_{i\varkappa}^{(1)})^{-1} \ldots (\mathsf{A}_{i\varkappa}^{(\sigma)})^{-1}$$

bestimmt. Die Gesamtheit der so erklärten $(\mathsf{A}_{i\varkappa}^{(\nu)})$ bildet die Mannigfaltigkeit $\mathfrak{M}$; diese ist also aus der Mannigfaltigkeit aller $(\mathsf{A}_{i\varkappa}^{(\nu)})$ durch algebraische Gleichungen zwischen diesen Größen ausgesondert,

sie hängt von $N$ willkürlichen komplexen, d. h. von $2N$ realen Parametern ab, ist also von $2N$-ter Dimension. Die Mannigfaltigkeit $\overline{\mathfrak{M}}$ ist jedenfalls in $\mathfrak{M}$ enthalten, und wir haben jetzt zwei Möglichkeiten ins Auge zu fassen:

a) Die Mannigfaltigkeit $\overline{\mathfrak{M}}$ ist mit der Mannigfaltigkeit $\mathfrak{M}$ identisch.

b) Die Mannigfaltigkeit $\overline{\mathfrak{M}}$ bildet nur einen Teil der Mannigfaltigkeit $\mathfrak{M}$.

Wenn wir zeigen, daß die Möglichkeit b) auf einen Widerspruch führt, so wird der Nachweis geliefert sein, daß auch der „schwierige Teil" des Riemannschen Problems stets lösbar ist.

Zunächst wissen wir nach dem Fundamentallemma der dreizehnten Vorlesung (S. 234), daß jedem Punkt der Mannigfaltigkeit $\overline{\mathfrak{M}}$ auch nur ein einziger Punkt der Mannigfaltigkeit $M$ entsprechen kann, so daß also die Punkte der Mannigfaltigkeiten $M$ und $\overline{\mathfrak{M}}$ gegenseitig eindeutig aufeinander bezogen sind. Ferner ist, wie wir in der vierzehnten Vorlesung (S. 249) gezeigt haben, die Funktionaldeterminante der ganzen transzendenten Funktionen

$$E_{i\varkappa}^{(\nu)}(A_{11}^{(1)}, \ldots, A_{nn}^{(\sigma)})$$

(Gl. (17) der vierzehnten Vorlesung, S. 245) für kein endliches Wertesystem der $A_{11}^{(1)}, \ldots, A_{nn}^{(\sigma)}$, also für keinen im Endlichen gelegenen Punkt der Mannigfaltigkeit $M$ gleich Null. Daraus folgt aber unmittelbar, daß die Mannigfaltigkeiten $M$ und $\overline{\mathfrak{M}}$ gleich vielfache Ausdehnung besitzen müssen. Es wäre also, wenn der Fall b) eintreten sollte, $\overline{\mathfrak{M}}$ ein $2N$-dimensionaler Teil der ebenfalls $2N$-dimensionalen Mannigfaltigkeit $\mathfrak{M}$; nach dem oben erwähnten Riemannschen Satze müßte folglich eine Mannigfaltigkeit von $(2N-1)$ Dimensionen vorhanden sein, die die Berandung von $\overline{\mathfrak{M}}$ bildet, d. h. die die Punkte von $\overline{\mathfrak{M}}$ von denjenigen Punkten von $\mathfrak{M}$ scheidet, die nicht zu $\overline{\mathfrak{M}}$ gehören. Wir bezeichnen diese hypothetische Mannigfaltigkeit von $2N-1$ Dimensionen mit $\mathfrak{S}$.

Verfolgen wir nun, auf welche Weise es sich ereignen könnte, daß ein variabel gedachter Punkt, aus dem Innern von $\overline{\mathfrak{M}}$ kommend, die Mannigfaltigkeit $\mathfrak{S}$ erreicht, mit anderen Worten, wie sich ein variabler Punkt der Mannigfaltigkeit $M$ bewegen müßte, damit der entsprechende Punkt von $\overline{\mathfrak{M}}$ in einen Punkt von $\mathfrak{S}$ geführt wird. — Dies kann nur so geschehen, daß der Punkt von $M$ einen Weg zurücklegt, der in einem singulären Punkte der ganzen transzendenten Funktionen (17) der vierzehnten Vorlesung mündet. Diese ganzen

transzendenten Funktionen $E_{i\varkappa}^{(\nu)}(A_{11}^{(1)}, \ldots, A_{nn}^{(\sigma)})$ haben aber nur dann eine Singularität, wenn mindestens eine der Variabeln $A_{i\varkappa}^{(\nu)}$ unendlich groß ist. Es möge $S$ die Gesamtheit der **Grenzstellen** von $M$ bezeichnen, für die dieser Fall eintritt, d. h. für die mindestens eines der $A_{i\varkappa}^{(\nu)} = \infty$ wird. Von welcher Dimension wird diese Grenzmannigfaltigkeit $S$ sein? Die Tatsache, daß ein $A_{i\varkappa}^{(\nu)} = \infty$ wird, drückt sich durch eine Gleichung zwischen den komplexen Koordinaten der Punkte von $M$, also durch **zwei** Gleichungen zwischen den realen Koordinaten dieser Punkte aus; durch zwei Gleichungen wird aber die Dimensionszahl um zwei Einheiten erniedrigt, die Grenzmannigfaltigkeit $S$ enthält also höchstens Mannigfaltigkeiten von $2N-2$ Dimensionen und solche auch nur in endlicher Anzahl.*) Nach dem erwähnten **Riemannschen** Satze kann also $S$ keine **Berandung** der $2N$-dimensionalen Mannigfaltigkeit $M$ bilden, $M$ ist demnach als eine **geschlossene** Mannigfaltigkeit anzusehen.

Wenn ein variabler Punkt von $M$ in eine Stelle der Grenzmannigfaltigkeit $S$ einrückt, so werden einige (eines oder mehrere) der $A_{i\varkappa}^{(\nu)}$ so unendlich, daß die Wurzeln $r_i^{(\nu)}$ $(i=1,2,\ldots,n;\ \nu=1,2,\ldots,\sigma+1)$ der determinierenden Fundamentalgleichungen fest bleiben. Nach den Ergebnissen der vorigen Vorlesung muß dann mindestens eines der Elemente der Fundamentalsubstitutionen $(\mathsf{A}_{i\varkappa}^{(\nu)})$ ebenfalls unendlich werden, es sei denn, daß die $\mathsf{A}_{i\varkappa}^{(\nu)}$ völlig **unbestimmt** werden. Bezeichnen wir mit $\Sigma$ die **Grenzmannigfaltigkeit** von $\mathfrak{M}$, für die mindestens eines der $\mathsf{A}_{i\varkappa}^{(\nu)}$ unendlich wird, so folgt wie vorhin für $S$, daß $\Sigma$ höchstens Mannigfaltigkeiten von $2N-2$ Dimensionen enthalten kann und solche auch nur in endlicher Anzahl. Wenn also ein variabler Punkt von $M$ in eine Stelle von $S$ einrückt, so rückt der entsprechende Punkt von $\overline{\mathfrak{M}}$ in eine Stelle von $\Sigma$ ein, sofern seine Koordinaten nicht völlig unbestimmt werden.

Nun haben wir gesehen, daß ein Punkt von $\overline{\mathfrak{M}}$ in eine Stelle der hypothetischen Mannigfaltigkeit $\mathfrak{S}$ nur dadurch gelangen kann, daß der entsprechende Punkt von $M$ einen Weg zurücklegt, der in einem Punkte von $S$ mündet; da aber alsdann der Punkt von $\overline{\mathfrak{M}}$ in eine Stelle von $\Sigma$ einrücken muß, so würde folgen, daß die hypothetische $(2N-1)$-dimensionale Mannigfaltigkeit $\mathfrak{S}$ in $\Sigma$ enthalten ist; dies

*) Das letztere ist darum wichtig, weil dadurch auch die Möglichkeit ausgeschlossen ist, daß die Mannigfaltigkeiten $(2N-2)$-ter Dimension, die in $S$ enthalten sind, eine Mannigfaltigkeit $(2N-1)$-ter Dimension überall dicht erfüllen.

steht aber mit der Tatsache in Widerspruch, daß $\Sigma$ höchstens Mannigfaltigkeiten von $(2N-2)$-ter Dimension enthält. Damit ist also gezeigt, daß die Annahme b) auf einen Widerspruch führt, daß folglich $\overline{\mathfrak{M}}$ mit $\mathfrak{M}$ identisch sein muß, d. h. daß jedem Punkte von $\mathfrak{M}$ auch wirklich ein Punkt von $M$ entspricht. Die Lösbarkeit des Riemannschen Problems ist somit erwiesen.

* * *

Wir wollen nun das, was wir in bezug auf das Riemannsche Problem bewiesen haben, präzise und übersichtlich zusammenfassen.

Es seien die singulären Punkte $a_1, \ldots, a_\sigma$ beliebig gegeben und überdies $\sigma$ Matrizen mit nichtverschwindenden Determinanten

$$(\mathsf{A}_{ix}^{(1)}), \ldots, (\mathsf{A}_{ix}^{(\sigma)}) \qquad (i, x = 1, 2, \cdots, n)$$

willkürlich vorgeschrieben, für die die zugehörigen Fundamentalgleichungen und die zu

$$(\mathsf{A}_{ix}^{(\sigma+1)}) = (\mathsf{A}_{ix}^{(1)})^{-1} \ldots (\mathsf{A}_{ix}^{(\sigma)})^{-1}$$

gehörige Fundamentalgleichung keine mehrfachen Wurzeln besitzen.*) Wir denken uns ferner in der $x$-Ebene die Schnitte

$$(a_1, \infty) = l_1, \ldots, (a_\sigma, \infty) = l_\sigma$$

gelegt und einen von $a_1, \ldots, a_\sigma$ verschiedenen Punkt $x_0$ fixiert: Dann kann man ein schlechthin kanonisches Differentialsystem

$$\text{(A)} \qquad \frac{dy_x}{dx} = \sum_{\lambda=1}^{n} y_\lambda \sum_{\nu=1}^{\sigma} \frac{A_{\lambda x}^{(\nu)}}{x - a_\nu} \qquad (x = 1, 2, \cdots, n)$$

konstruieren, das die folgenden Eigenschaften besitzt. Bedeuten $\omega_i^{(\nu)}$ $(i=1,2,\cdots,n)$ die Wurzeln der zu $(\mathsf{A}_{ix}^{(\nu)})$ gehörigen Fundamentalgleichung

$$\mathsf{A}_{ix}^{(\nu)} - \delta_{ix}\omega = 0, \qquad (\nu = 1, 2, \cdots, \sigma+1)$$

*) Diese vereinfachende Voraussetzung, die wir auch im folgenden stets festhalten wollen, ist, wie hier ausdrücklich betont werden soll, weder für den Gang der Beweise noch für die Resultate von wesentlicher Bedeutung. Übrigens bilden diejenigen Wertesysteme $\mathsf{A}_{ix}^{(\nu)}$, für die jene Voraussetzung nicht erfüllt ist, in der realen $2n^2\sigma$-fach ausgedehnten Mannigfaltigkeit aller $\mathsf{A}_{ix}^{(\nu)}$ nur Mannigfaltigkeiten von höchstens $2n^2\sigma - 2$ Dimensionen, die also nicht einmal die vollständige Begrenzung eines $2n^2\sigma$-fach ausgedehnten Teiles der Mannigfaltigkeit aller $\mathsf{A}_{ix}^{(\nu)}$ ausmachen können.

so können wir in den Ausdrücken

$$r_i^{(\nu)} = \frac{\log \omega_i^{(\nu)}}{2\pi\sqrt{-1}} \qquad (i=1,2,\dots,n;\ \nu=1,2,\dots,\sigma+1)$$

bei irgendwelchen $n(\sigma+1)-1$ derselben die Determinationen des Logarithmus willkürlich festlegen und dann für den letzten diese Determination vermöge der Fuchsschen Relation

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{\nu=1}^{\sigma+1} r_i^{(\nu)} = 0$$

bestimmen. Diese so fixierten Größen $r_i^{(\nu)}$ sind die Wurzeln der zu den Punkten $a_\nu$ $(\nu=1,2,\dots,\sigma+1;\ a_{\sigma+1}=\infty)$ gehörigen determinierenden Fundamentalgleichungen des zu konstruierenden Differentialsystems, d. h. der Gleichungen

$$|A_{i\varkappa}^{(\nu)} - \delta_{i\varkappa} r| = 0, \qquad \begin{pmatrix}\nu=1,2,\dots,\sigma+1,\\ A_{i\varkappa}^{(\sigma+1)} = -\sum_{\nu=1}^{\sigma} A_{i\varkappa}^{(\nu)}\end{pmatrix}$$

und die Integralmatrix $(y_{i\varkappa})$, die sich im Punkte $x=x_0$ auf $(\delta_{i\varkappa})$ reduziert, erfährt die vorgeschriebenen Substitutionen $(\mathsf{A}_{i\varkappa}^{(1)}),\dots,(\mathsf{A}_{i\varkappa}^{(\sigma)})$, wenn die Variable $x$ die Schnitte $l_1,\dots,l_\sigma$ überschreitet. Durch diese Eigenschaften ist das System $(A)$ eindeutig bestimmt.

Indem wir nunmehr dazu übergehen, einige der Konsequenzen zu entwickeln, die sich aus der Lösbarkeit des Riemannschen Problems ziehen lassen, wollen wir zuvörderst hervorheben, was sich in bezug auf die Inversen der ganzen transzendenten Funktionen

$$\mathsf{A}_{i\varkappa}^{(\nu)} = E_{i\varkappa}^{(\nu)}(A_{11}^{(1)},\dots,A_{nn}^{(\sigma)}),$$

als Ergänzung zu den in der vierzehnten Vorlesung aufgestellten Sätzen aussagen läßt. — Die Verzweigungspunkte $a_1,\dots,a_\sigma$ und die von ihnen aus gelegten Schnitte $l_1,\dots,l_\sigma$, ebenso auch den Anfangspunkt $x_0$ denken wir uns dabei fest gegeben.

Bedeutet $\overline{\mathsf{A}}_{i\varkappa}^{(\nu)}$ irgendein Wertesystem der $\mathsf{A}_{i\varkappa}^{(\nu)}$, für das die Determinanten

$$|\overline{\mathsf{A}}_{i\varkappa}^{(\nu)}|_{(i,\varkappa=1,2,\dots,n)} \qquad (\nu=1,2,\dots,\sigma)$$

von Null verschieden sind und die zu den Matrizen

$$(\overline{\mathsf{A}}^{(1)}_{i\varkappa}),\dots,(\overline{\mathsf{A}}^{(\sigma)}_{i\varkappa}),\ (\mathsf{A}^{(\sigma+1)}_{i\varkappa}) = (\overline{\mathsf{A}}^{(1)}_{i\varkappa})^{-1}\dots(\overline{\mathsf{A}}^{(\sigma)}_{i\varkappa})^{-1}$$

gehörigen Fundamentalgleichungen lauter einfache Wurzeln

$$\overline{\omega}_i^{(\nu)} \qquad (i=1,2,\dots,n;\ \nu=1,2,\dots,\sigma+1)$$

haben, so entsprechen diesem Wertesysteme unendlich viele Wertesysteme der $A_{i\varkappa}^{(\nu)}$, so zwar, daß einem jeden der unendlich vielen Systeme von Determinationen der Ausdrücke

$$\bar{r}_i^{(\nu)} = \frac{\log \bar{\omega}_i^{(\nu)}}{2\pi\sqrt{-1}}, \quad (i=1,2,\cdots,n; \quad \nu=1,2,\cdots,\sigma+1) \tag{1a}$$

für das die Fuchssche Relation

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{\nu=1}^{\sigma+1} \bar{r}_i^{(\nu)} = 0$$

erfüllt ist, ein solches Wertesystem der $A_{i\varkappa}^{(\nu)}$ und nur eines zugehört. Einem jeden dieser unendlich vielen Wertesysteme entspricht dann ein in der Umgebung der Stelle $\mathsf{A}_{i\varkappa}^{(\nu)} = \bar{\mathsf{A}}_{i\varkappa}^{(\nu)}$ holomorphes Zweigsystem der inversen Funktionen $A_{i\varkappa}^{(\nu)}$ von den $\mathsf{A}_{i\varkappa}^{(\nu)}$, das sich für die Stelle $\mathsf{A}_{i\varkappa}^{(\nu)} = \bar{\mathsf{A}}_{i\varkappa}^{(\nu)}$ auf jenes Wertesystem reduziert. — Über die Art, wie diese unendlich vielen Zweigsysteme durch analytische Fortsetzung ineinander übergehen, können wir das Folgende feststellen.

Es möge $\bar{r}_i^{(\nu)}$ ein System bestimmter, der Fuchsschen Relation genügender Determinationen der Ausdrücke (1a) und $\bar{A}_{i\varkappa}^{(\nu)}$ das zugehörige, durch das Riemannsche Problem eindeutig bestimmte Wertesystem der $A_{i\varkappa}^{(\nu)}$ bedeuten. Lassen wir dann die $\mathsf{A}_{i\varkappa}^{(\nu)}$ geschlossene Bahnen beschreiben, die von der Stelle $\bar{\mathsf{A}}_{i\varkappa}^{(\nu)}$ ausgehen und die Verzweigungsmannigfaltigkeit (vergl. die vierzehnte Vorlesung S. 247, 248)

$$|\mathsf{A}_{i\varkappa}^{(\nu)}| = 0 \quad (\nu=1,2,\cdots,\sigma) \quad (i,\varkappa=1,2,\cdots,n) \tag{2}$$

der inversen Funktionen umkreisen, so werden im allgemeinen gewisse der $\omega_i^{(\nu)}$ von den Werten $\bar{\omega}_i^{(\nu)}$ ausgehend geschlossene Bahnen zurücklegen, die den betreffenden Punkt $\omega_i^{(\nu)} = 0$ umlaufen, so daß die Argumente dieser $\omega_i^{(\nu)}$ einen Zuwachs um ganzzahlige Multipla von $2\pi$ erfahren. Die

$$r_i^{(\nu)} = \frac{\log \omega_i^{(\nu)}}{2\pi\sqrt{-1}}$$

werden also von den Determinationen $\bar{r}_i^{(\nu)}$ der Ausdrücke (1a) ausgehend zu einem anderen System von Determinationen

$$\bar{\bar{r}}_i^{(\nu)} = \bar{r}_i^{(\nu)} + g_i^{(\nu)}$$

der Ausdrücke (1a) übergegangen sein, wo die $g_i^{(\nu)}$ positive oder nega-

tive ganze Zahlen bedeuten. Nun besteht aber die Identität (vgl. dreizehnte Vorlesung S. 236)

$$\omega_1^{(1)} \ldots \omega_n^{(\sigma)} = \frac{1}{\omega_1^{(\sigma+1)} \ldots \omega_n^{(\sigma+1)}},$$

wenn also durch irgendwelche Umläufe der $\mathsf{A}_{i\varkappa}^{(\nu)}$ um die Verzweigungsmannigfaltigkeit (2) das Argument des Produktes $\omega_1^{(1)} \ldots \omega_n^{(\sigma)}$ einen Zuwachs um $2\pi g$ erfahren hat, so wird gleichzeitig das Argument des Produktes $\omega_1^{(\sigma+1)} \ldots \omega_n^{(\sigma+1)}$ den Zuwachs $-2\pi g$ erfahren; es wird folglich für jeden solchen Umlauf

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{\nu=1}^{\sigma+1} g_i^{(\nu)} = 0$$

sein, d. h. die Determinationen $\bar{r}_i^{(\nu)}$ werden ebenfalls die Fuchssche Relation befriedigen. Die Werte $\bar{A}_{i\varkappa}^{(\nu)}$, die die $A_{i\varkappa}^{(\nu)}$ angenommen haben, wenn die $\mathsf{A}_{i\varkappa}^{(\nu)}$ nach Vollzug ihres Umlaufes zu der Ausgangsstelle $\bar{\mathsf{A}}_{i\varkappa}^{(\nu)}$ zurückgekehrt sind, werden also nichts anderes sein als die Residuen desjenigen Differentialsystems von der Form (A), das dem durch die Fundamentalsubstitutionen $\bar{\mathsf{A}}_{i\varkappa}^{(\nu)}$ und die $\bar{r}_{i\varkappa}^{(\nu)}$ als Wurzeln der determinierenden Fundamentalgleichungen bestimmten Riemannschen Probleme entspricht. — Offenbar werden auf diese Weise alle Wertesysteme der $A_{i\varkappa}^{(\nu)}$ hervorgebracht, die zu dem vorgeschriebenen Wertesysteme $\bar{\mathsf{A}}_{i\varkappa}^{(\nu)}$ gehören, und zwar werden, solange die $\mathsf{A}_{i\varkappa}^{(\nu)}$ nur eine endliche Anzahl von Umläufen um die Verzweigungsmannigfaltigkeit vollziehen, für die $A_{i\varkappa}^{(\nu)}$ auch stets endliche Werte resultieren; dadurch daß man die $\mathsf{A}_{i\varkappa}^{(\nu)}$ unendlich viele Umläufe um die Verzweigungsmannigfaltigkeit ausführen läßt, kann man einzelne der additiv hinzutretenden ganzen Zahlen $g_i^{(\nu)}$ ins Unendliche anwachsen lassen, wodurch dann auch einzelne der $A_{i\varkappa}^{(\nu)}$ ins Unendliche wachsen werden. Daß dabei die $\mathsf{A}_{i\varkappa}^{(\nu)}$ bestimmte endliche Werte behalten, steht mit dem in der vorigen Vorlesung bewiesenen Theoreme (S. 283) nicht in Widerspruch, da in dem jetzt vorliegenden Falle die $A_{i\varkappa}^{(\nu)}$ so ins Unendliche wachsen, daß zugleich gewisse unter den Wurzeln der determinierenden Fundamentalgleichungen unendlich groß werden. — Wir sehen, daß die ganzen transzendenten Funktionen $E_{i\varkappa}^{(\nu)}$ die größte Analogie mit der Exponentialfunktion darbieten, auf die sie sich ja auch für $n = 1$, $\sigma = 1$ reduzieren. Besonders bemerkenswert ist die Rolle, die die Verzweigungspunkte $a_1, \ldots, a_\sigma$ spielen, die ja in den Koeffizienten der $E_{i\varkappa}^{(\nu)}$ als Parameter auftreten.



Die Fundamentalbereiche der ganzen transzendenten Funktionen $E_{i\varkappa}^{(\nu)}$ und die gegenseitig eindeutige Korrespondenz zwischen diesen Bereichen und dem Bereiche der $n^2\sigma$ Größen $\mathsf{A}_{i\varkappa}^{(\nu)}$ bleiben für jede zulässige Wahl dieser Parameter bestehen; bei einer Änderung der Parameter $a_1, \ldots, a_\sigma$ ändert sich innerhalb der einzelnen Fundamentalbereiche nur das Zuordnungsgesetz, nach dem die Punkte dieses Fundamentalbereiches den Punkten $\mathsf{A}_{i\varkappa}^{(\nu)}$ entsprechen, und weiterhin hängen die Beziehungen, die zwischen den verschiedenen Zweigsystemen der inversen Funktionen bestehen (vergl. die vierzehnte Vorlesung S. 249), wesentlich von den $a_1, \ldots, a_\sigma$ ab.

Wir fügen hier als formelle Analogie zwischen den ganzen transzendenten Funktionen $E_{i\varkappa}^{(\nu)}$ und der Exponentialfunktion die folgende Bemerkung hinzu.

Wenn wir von dem Differentialsysteme (A) zu dem **adjungierten Systeme**

$$(\mathrm{A}') \qquad \frac{dz_\varkappa}{dx} = \sum_{\lambda=1}^{n} z_\lambda \sum_{\nu=1}^{\sigma} \frac{B_{\lambda\nu}^{(\nu)}}{x - a_\nu} \qquad (\varkappa = 1, 2, \cdots, n)$$

übergehen, wo also (vergl. die zweite Vorlesung, S. 27, 28)

$$B_{i\varkappa}^{(\nu)} = -A_{\varkappa i}^{(\nu)} \qquad (i, \varkappa = 1, 2, \cdots, n;\ \nu = 1, 2, \cdots, \sigma)$$

ist, so ist die Integralmatrix $(z_{i\varkappa})$ des Systems (A'), die sich für $x = x_0$ auf $(\delta_{i\varkappa})$ reduziert, die transponierte Matrix von $(y_{i\varkappa})^{-1}$. Bei einem Umlaufe von $x$, der $(y_{i\varkappa})$ in $(c_{i\varkappa})(y_{i\varkappa})$ verwandelt, wird demnach $(z_{i\varkappa})$ die Substitution $(c'_{i\varkappa})$ erfahren, die aus $(c_{i\varkappa})^{-1}$ durch Transposition hervorgeht. — Wenn wir also in den ganzen transzendenten Funktionen $E_{i\varkappa}^{(\nu)}$ an die Stelle der $A_{i\varkappa}^{(\nu)}$ die $B_{i\varkappa}^{(\nu)}$ setzen, so bilden die

$$E_{i\varkappa}^{(\nu)}(-A_{11}^{(1)}, -A_{21}^{(1)}, \ldots, -A_{nn}^{(\sigma)}) \qquad (\nu = 1, 2, \cdots, \sigma)$$

$\sigma$ Matrizen, die aus den inversen der entsprechenden Matrizen

$$E_{i\varkappa}^{(\nu)}(A_{11}^{(1)}, A_{12}^{(1)}, \ldots, A_{nn}^{(\sigma)})$$

durch Transposition hervorgehen. Diese Eigenschaft der ganzen transzendenten Funktionen $E_{i\varkappa}^{(\nu)}$ bildet das Analogon zu der durch die Gleichung

$$e^{-2\pi\sqrt{-1}A} = \frac{1}{e^{2\pi\sqrt{-1}A}}$$

ausgedrückten Eigenschaft der Exponentialfunktion.

* * *

Wir hatten schon in der dreizehnten Vorlesung (S. 229, 235) darauf hingewiesen, daß aus der Lösbarkeit des Riemannschen Problems der Satz folgt, daß für jedes Differentialsystem des Fuchsschen Typus schlechthin kanonische Differentialsysteme vorhanden sind, die mit dem vorgelegten Differentialsysteme zu derselben Art gehören und weder außerwesentlich singuläre Stellen noch solche singuläre Stellen aufweisen, in denen die Integrale wie rationale Funktionen unendlich werden. Wir können diesen Satz jetzt in folgender Weise präzisieren. Für jene schlechthin kanonischen Differentialsysteme müssen die Wurzeln der determinierenden Fundamentalgleichungen*), mit den Wurzeln der zu demselben Punkte gehörigen determinierenden Fundamentalgleichung des gegebenen Differentialsystems abgesehen von additiven ganzen Zahlen übereinstimmen. Diese ganzen Zahlen können nun, mit der durch die Fuchssche Relation gebotenen Beschränkung, noch ganz willkürlich vorgeschrieben werden. — Wie wir bereits (a. a. O.) bemerkt haben, kann dieser Satz auch direkt, d. h. auf rein algebraische Weise bewiesen werden.

Dagegen wollen wir jetzt aus der Lösbarkeit des Riemannschen Problems einen weitergehenden Satz ableiten, der sich auf Differentialsysteme bezieht, die nicht zum Fuchsschen Typus gehören, und für dessen Beweis bisher die Kenntnis der Tatsache, daß das Riemannsche Problem lösbar ist, nicht entbehrt werden kann.

* * *

Es seien in dem Differentialsysteme

$$\text{(A)} \qquad \frac{dy_\varkappa}{dx} = \sum_{\lambda=1}^{n} y_\lambda a_{\lambda\varkappa} \qquad (\varkappa = 1, 2, \cdots, n)$$

die Koeffizienten $a_{i\varkappa}$ eindeutige Funktionen von $x$, die nur eine endliche Anzahl von singulären Stellen $a_1, \ldots, a_\tau$ besitzen. Wir denken uns aus diesen die Verzweigungspunkte der Integrale ausgesondert; es seien dies die Punkte $a_1, \ldots, a_\sigma$, denen wir für alle Fälle noch den Punkt $a_{\sigma+1} = \infty$ hinzufügen. In der Umgebung der übrigen singulären Stellen $a_{\sigma+2}, \ldots, a_\tau$ sind die Lösungen von (A) eindeutig. Wir legen die Schnitte $(a_1, \infty), \ldots, (a_\sigma, \infty)$, dann erfährt die Integralmatrix

$$(y_{i\varkappa}) = (\overline{T}) \widehat{\int_{x_0}^{x}} (a_{i\varkappa} dx + \delta_{i\varkappa})$$

*) Wir haben immer den Fall vor Augen, wo die zu den Verzweigungspunkten gehörigen Fundamentalgleichungen keine mehrfachen Wurzeln besitzen.

beim Überschreiten des Schnittes $(a_\nu, \infty)$ eine bestimmte lineare Substitution $(A_{i\varkappa}^{(\nu)})$, $(\nu = 1, 2, \cdots, \sigma)$. Dabei bedeutet wie gewöhnlich $\overline{T}$ die durch die Schnitte $(a_\nu, \infty)$ zerschnittene Ebene, in der die Integralmatrix $(y_{i\varkappa})$ eindeutig determiniert ist. — Wir können dann mit den Verzweigungspunkten $a_1, \ldots, a_\sigma$ und mit den Fundamentalsubstitutionen $(A_{i\varkappa}^{(1)}), \ldots, (A_{i\varkappa}^{(\sigma)})$ ein Riemannsches Problem formulieren und folglich die Existenz eines schlechthin kanonischen Differentialsystems

(B) $$\frac{du_\varkappa}{dx} = \sum_{\lambda=1}^{n} u_\lambda \sum_{\nu=1}^{\sigma} \frac{A_{\lambda\varkappa}^{(\nu)}}{x - a_\nu} \qquad (\varkappa = 1, 2, \cdots, n)$$

als gesichert ansehen, für das die Integralmatrix

$$(u_{i\varkappa}) = (\overline{T}) \int_{x_0}^{x} \left( \sum_{\nu=1}^{\sigma} \frac{A_{i\varkappa}^{(\nu)}}{x - a_\nu} dx + \delta_{i\varkappa} \right)$$

die Substitutionen $(A_{i\varkappa}^{(\nu)})$ erfährt, wenn $x$ die Schnitte $(a_\nu, \infty)$ überschreitet. Das Differentialsystem (B) ist also mit (A) kogredient (vergl. die dreizehnte Vorlesung S. 220), d. h. wenn wir

(2) $$y_\varkappa = \sum_{\lambda=1}^{n} u_\lambda s_{\lambda\varkappa} \qquad (\varkappa = 1, 2, \cdots, n)$$

setzen, so daß also

(3) $$(y_{i\varkappa}) = (u_{i\varkappa})(s_{i\varkappa})$$

ist, so ergeben sich die $s_{i\varkappa}$ als in der ganzen $x$-Ebene eindeutige Funktionen. — Diese eindeutigen Funktionen befriedigen nach der Bemerkung 5) der siebenten Vorlesung (S. 118) das lineare homogene Differentialsystem für $n^2$ Funktionen (vergl. (F) a. a. O.)

(4) $$\frac{ds_{i\varkappa}}{dx} = \sum_{\lambda=1}^{n} s_{i\lambda} a_{\lambda\varkappa} - \sum_{\lambda=1}^{n} \sum_{\nu=1}^{\sigma} \frac{A_{i\lambda}^{(\nu)}}{x - a_\nu} \cdot s_{\lambda\varkappa}; \qquad (i, \varkappa = 1, 2, \cdots, n)$$

wir können also sagen, daß sich in diesem Differentialsysteme, wenn die $a_{i\varkappa}$ Funktionen von der angegebenen Beschaffenheit bedeuten, die $n^2\sigma$ Konstanten $A_{i\varkappa}^{(\nu)}$ stets und zwar noch auf unendlich viele Weisen*) so bestimmen lassen, daß dieses Differentialsystem ein eindeutiges partikulares Integralsystem besitzt. Insbesondere ist dies stets möglich, wenn die $a_{i\varkappa}$ beliebige rationale Funktionen von $x$ sind.

---

*) Indem wir nämlich die in den determinierenden Matrizen von (B) noch willkürlichen additiven ganzen Zahlen zur Disposition haben.

Wenn das Differentialsystem (B) oder, was auf dasselbe hinauskommt, die aus den $(A_{i\varkappa}^{(1)}), \ldots, (A_{i\varkappa}^{(\sigma)})$ als Fundamentalsubstitutionen gebildete Gruppe (die Monodromiegruppe von (A) und (B)) irreduzibel ist, so hat das Differentialsystem (4) nach dem Frobeniusschen Satze (vergl. die siebente Vorlesung 4) und 5) S. 117 ff.) auch nur ein einziges partikulares Integralsystem, dessen Elemente eindeutige Funktionen sind. — Wir sprechen das erlangte Resultat unter Beschränkung auf den Fall, wo die $a_{i\varkappa}$ rationale Funktionen sind, in dem folgenden Lehrsatze aus:

Irgendein lineares Differentialsystem mit rationalen Koeffizienten, das nicht zum Fuchsschen Typus gehört, ist stets einem schlechthin kanonischen Differentialsystem und folglich einer Art von Differentialsystemen des Fuchsschen Typus kogredient. Die Koeffizienten $s_{i\varkappa}$, die in der Beziehung, die zwischen den Unbekannten jener beiden kogredienten Differentialsysteme besteht, auftreten, sind eindeutige Funktionen, die ihrerseits ein lineares Differentialsystem mit rationalen Koeffizienten befriedigen.

Natürlich hat dieser Satz so lange nur theoretisches Interesse, bis es gelingen wird, eine Methode anzugeben, mittels deren man die $n^2\sigma$ Konstanten $A_{i\varkappa}^{(\nu)}$ so bestimmen kann, daß das Differentialsystem (4) bei gegebenen rationalen Funktionen $a_{i\varkappa}$ ein partikulares eindeutiges Lösungssystem besitzt. Es ist dies eine Aufgabe von ähnlicher Art, wie die sogenannten Diophantischen Probleme der Algebra. Wir haben zur Lösung dieser Aufgabe nur das Folgende geleistet. Einmal haben wir gezeigt daß eine Lösung stets möglich ist, das andere Mal haben wir zwischen den unendlich vielen Lösungen, die immer vorhanden sind, den Zusammenhang festgestellt, daß diese Lösungen die Residuen von schlechthin kanonischen Differentialsystemen der Form (B) sind, die zu derselben Klasse gehören.

Durch die Lösung des Riemannschen Problems einerseits und andererseits durch den eben bewiesenen Satz haben wir die in der achten Vorlesung für den Fall eines einzigen singulären Punktes $a$ gelösten Aufgaben (vergl. die Punkte 1), 2), S. 140) allgemein für eine beliebige endliche Anzahl von singulären Punkten $a_1, \ldots, a_\sigma$ in der Weise erledigt, daß an die Stelle des Cauchyschen Differentialsystems das allgemeine schlechthin kanonische Differentialsystem mit den $\sigma$ Verzweigungspunkten $a_1, \ldots, a_\sigma$ getreten ist. Wir werden also im Sinne dieser Aufgaben die schlechthin kanonischen Differentialsysteme als die genuine Verallgemeinerung der Cauchyschen Differentialsysteme auffassen können.



Der in dieser Vorlesung gegebene Beweis für die Lösbarkeit des Riemannschen Problems liefert uns kein Verfahren, um bei gegebenen Fundamentalsubstitutionen die zugehörigen Differentialsysteme oder Integralmatrizen der Art wirklich herzustellen. Ein solches kann unter gewissen, sogleich näher zu bezeichnenden Voraussetzungen aus den Methoden geschöpft werden, die H. Poincaré (1882) für die Uniformisierung der Lösungen von linearen Differentialgleichungen des Fuchsschen Typus mit Hilfe von Fuchsschen Funktionen geschaffen hat. Wenn nämlich die absoluten Beträge der Wurzeln der zu den Fundamentalsubstitutionen $(\mathsf{A}^{(1)}_{i\varkappa}), \ldots, (\mathsf{A}^{(\sigma)}_{i\varkappa})$ und zu $(\mathsf{A}^{(\sigma+1)}_{i\varkappa})$ gehörigen Fundamentalgleichungen alle gleich Eins sind, so läßt sich eine Integralmatrix $(y_{i\varkappa})$ der durch das Riemannsche Problem bestimmten Art in der folgenden Form darstellen:

$$(y_{i\varkappa}) = \sum_{\nu=0}^{\infty}{}' (T^{(\nu)}_{i\varkappa})^{-1}(\varphi_{i\varkappa}(\alpha_\nu u_1 + \beta_\nu u_2,\ \gamma_\nu u_1 + \delta_\nu u_2)); \tag{5}$$

dabei bedeuten

$$(T^{(0)}_{i\varkappa}) = (\delta_{i\varkappa}),\ (T^{(1)}_{i\varkappa}),\ (T^{(2)}_{i\varkappa}), \ldots$$

die Substitutionen der aus den $(\mathsf{A}^{(1)}_{i\varkappa}), \ldots, (\mathsf{A}^{(\sigma)}_{i\varkappa})$ als Fundamentalsubstitutionen komponierten Gruppe $G$, die $\varphi_{i\varkappa}(u_1, u_2)$ geeignet gewählte rationale homogene Funktionen von $u_1, u_2$, die letzteren Größen $u_1, u_2$ selbst sind linear unabhängige Lösungen einer homogenen linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung von der Form

$$\frac{d^2u}{dx^2} = \frac{g(x)}{(x-a_1)^2 \cdots (x-a_\sigma)^2}\, u, \tag{6}$$

wo $g(x)$ eine ganze Funktion vom Grade $2\sigma - 2$ darstellt, die durch die Daten des Riemannschen Problems, genauer durch die $a_1, \ldots, a_\sigma$ und die kleinsten positiven ganzen Zahlen $g_\nu$ für die

$$(\mathsf{A}^{(\nu)}_{i\varkappa})^{g_\nu} = 1 \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, \sigma+1) \tag{7}$$

ist, vollkommen bestimmt ist. Wenn für eine Substitution $(\mathsf{A}^{(\nu)}_{i\varkappa})$ eine ganze Zahl $g_\nu$ von dieser Beschaffenheit nicht vorhanden ist, so ist das betreffende $g_\nu$ unendlich groß zu nehmen. Die Differentialgleichung (6) hat die Eigenschaft, daß die unabhängige Variable $x$ eine eindeutige, sogenannte Fuchssche Funktion des Quotienten

$$\frac{u_2}{u_1} = \eta$$

ist, die nur existiert, wenn

$$|u_2|^2 - |u_1|^2 < 0$$

ist; die

$$\begin{pmatrix}\alpha_0 & \beta_0\\ \gamma_0 & \delta_0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\alpha_1 & \beta_1\\ \gamma_1 & \delta_1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\alpha_2 & \beta_2\\ \gamma_2 & \delta_2\end{pmatrix}, \ldots$$

sind die Substitutionen der Monodromiegruppe der Differentialgleichung (6), und zwar in der Reihenfolge, daß $\begin{pmatrix}\alpha_\nu, & \beta_\nu\\ \gamma_\nu, & \delta_\nu\end{pmatrix}$ und $(T_{ix}^{(\nu)})$ immer demselben Umlaufe der Variabeln $x$ entsprechen.

Die Reihen (5), die im wesentlichen mit den von Poincaré als Fuchssche Zetareihen bezeichneten identisch sind, konvergieren, wenn der Grad der homogenen Funktionen $\varphi_{ix}(u_1, u_2)$ eine gerade Zahl von der Form $-2m$ und $m$ hinreichend groß positiv ist, unbedingt und gleichmäßig, sofern die gedachte Voraussetzung über die Wurzeln der zu den $(A_{ix}^{(\nu)})$ gehörigen Fundamentalgleichungen erfüllt ist; dagegen sind sie, wenn diese Voraussetzung (Konvergenzbedingung) nicht erfüllt ist, keinesfalls unbedingt konvergent.

Mit Hilfe dieser Reihen wurde die Lösbarkeit des Riemannschen Problems, unter der durch die Konvergenzbedingungen gebotenen Beschränkung für die Fundamentalsubstitutionen, zuerst bewiesen*). Versuche, diese Beweismethode für den allgemeinen Fall nutzbar zu machen**), haben bis jetzt zu keinem abschließenden Ergebnis geführt. Dagegen ist etwa gleichzeitig mit dem auf die Kontinuitätsmethode gegründeten Beweise noch ein anderer Beweis für die Existenz der durch das allgemeine Riemannsche Problem postulierten Funktionssysteme bekannt geworden, der sich auf die Theorie der Fredholmschen Integralgleichungen stützt und für $n = 2$ von D. Hilbert und einigen seiner Schüler durchgeführt worden ist.***)

*) L. Schlesinger, Comptes Rendus 1898, t. 126, S. 723.

**) Vergl. T. Brodén, Acta Mathem. Bd. 29 (1905), S. 273. Brodén behandelt daselbst die Aufgabe, die aus dem Riemannschen Problem hervorgeht, wenn man die Forderung fallen läßt, daß die zu bestimmenden Funktionssysteme keinen Punkt der Unbestimmtheit haben sollen. Zufolge des Theorems, das wir in dieser Vorlesung (S. 297) bewiesen haben, kann man sagen, daß sich die Brodénsche Aufgabe auf die Lösung des Riemannschen Problems zurückführen läßt.

***) Hilbert, Göttinger Nachr. 1905, S. 308; O. D. Kellog, Math. Annalen Bd. 60, S. 424.

* * *

Wir fügen noch zwei Bemerkungen hinzu, die sich auf eine von der bisher festgehaltenen etwas verschiedene Auffassung des Riemannschen Problems beziehen.

1. Wir haben bisher stets die von den Verzweigungspunkten $a_1, \ldots, a_\sigma$ aus gelegten Schnitte $l_1, \ldots, l_\sigma$ als fest gegeben angesehen und die zu diesen Schnitten gehörigen Fundamentalsubstitutionen mit $(\mathsf{A}_{ix}^{(1)}), \ldots, (\mathsf{A}_{ix}^{(\sigma)})$ bezeichnet. Wir nehmen jetzt ein anderes Schnittsystem $\lambda_1, \ldots, \lambda_\sigma$ von der am Schlusse der fünften Vorlesung charakterisierten Art, wo also $\lambda_\nu$ den Punkt $a_\nu$ mit dem Unendlichen verbindet, aber die Reihenfolge, in der die Schnitte $\lambda_\nu$ bei einer Umkreisung des unendlich fernen Punktes passiert werden, nicht die durch die Indices $1, 2, \ldots, \sigma$ angegebene zu sein braucht; dann werden zu diesem Schnittsysteme Fundamentalsubstitutionen $(\mathsf{B}_{ix}^{(1)}), \ldots, (\mathsf{B}_{ix}^{(\sigma)})$ gehören, die sich aus den $(\mathsf{A}_{ix}^{(1)}), \ldots, (\mathsf{A}_{ix}^{(\sigma)})$ zusammensetzen lassen, und aus denen auch umgekehrt die letzteren Substitutionen zusammengesetzt werden können. Man erkennt hieraus, in welcher Weise das System der Fundamentalsubstitutionen sich mit der Änderung des Schnittsystems ändert. — Haben wir in $(u_{ix})$ die Integralmatrix eines schlechthin kanonischen Differentialsystems (B), die sich für $x = x_0$ auf $(\delta_{ix})$ reduziert und an den Schnitten $l_1, \ldots, l_\sigma$ die Substitutionen $(\mathsf{A}_{ix}^{(1)}), \ldots, (\mathsf{A}_{ix}^{(\sigma)})$ erfährt, so erfährt $(u_{ix})$ an den Schnitten $\lambda_1, \ldots, \lambda_\sigma$ die Substitutionen $(\mathsf{B}_{ix}^{(1)}), \ldots, (\mathsf{B}_{ix}^{(\sigma)})$; die Substitutionen $(\mathsf{A}_{ix}^{(\nu)})$ und $(\mathsf{B}_{ix}^{(\nu)})$, die beide einer Umkreisung des Punktes $x = a_\nu$ entsprechen, sind also miteinander ähnlich, d. h. es ist

$$(\mathsf{B}_{ix}^{(\nu)}) = (C_{ix}^{(\nu)})(\mathsf{A}_{ix}^{(\nu)})(C_{ix}^{(\nu)})^{-1}, \qquad (\nu = 1, 2, \cdots, \sigma + 1)$$

wo die $(C_{ix}^{(\nu)})$ Substitutionen bedeuten, die sich nach dem in der fünften Vorlesung (S. 83 ff.) beschriebenen Verfahren leicht herstellen lassen. Offenbar entsprechen den verschiedenen Systemen von Schnitten $\lambda_1, \ldots, \lambda_\sigma$ alle möglichen Systeme von $\sigma$ Fundamentalsubstitutionen der aus den $(\mathsf{A}_{ix}^{(1)}), \ldots, (\mathsf{A}_{ix}^{(\sigma)})$ gebildeten Gruppe $G$, die beziehungsweise mit den $(\mathsf{A}_{ix}^{(\nu)})$ ähnlich sind.

Man kann also in gewissem Sinne auch davon sprechen, daß bei dem Riemannschen Probleme nebst den $\sigma$ Verzweigungspunkten $a_1, \ldots, a_\sigma$ die Monodromiegruppe $G$ selbst vorgeschrieben ist; allerdings würden dabei, selbst nach Fixierung der Wurzeln der determinierenden Fundamentalgleichungen und bei fest gedachtem Anfangswerte $x_0$, im allgemeinen sich noch unendlich viele Lösungen ergeben. Man kann diese Lösungen z. B. dadurch charakterisieren, daß man ein

bestimmtes Schnittsystem, etwa $l_1, \ldots, l_\sigma$, fixiert und dann der Reihe nach diejenigen Integralmatrizen $(u_{i\varkappa})$ konstruiert, die an diesen Schnitten die verschiedenen einander ähnlichen Systeme von $\sigma$ Fundamentalsubstitutionen erleiden, aus denen die Gruppe $G$ komponiert werden kann. — In ihrer Abhängigkeit von $x$ besteht zwischen zwei verschiedenen solchen Matrizen kein anderer Zusammenhang als der, daß diese Matrizen bezw. die entsprechenden Differentialsysteme dieselbe Monodromiegruppe haben; dagegen werden wir in der folgenden Vorlesung zeigen, daß, unter gewissen speziellen Voraussetzungen über die Gruppe $G$, diese verschiedenen Integralmatrizen auch analytisch zusammenhängen, wenn man sie als Funktionen der singulären Punkte $a_1, \ldots, a_\sigma$ betrachtet.

2. Statt bei einem Riemannschen Probleme nach den Integralmatrizen $(u_{i\varkappa})$ schlechthin kanonischer Differentialsysteme zu fragen, die das Problem lösen, kann man die Wronskischen Matrizen der durch das Problem gegebenen Art zu bestimmen suchen. Eine solche Wronskische Matrix ist durch die $n$ Funktionen

$$\sum_{\lambda=1}^{n} u_{i\lambda} r_\lambda \qquad (i = 1, 2, \cdots, n) \tag{8}$$

bestimmt, wo $r_1, \ldots, r_n$ beliebige rationale Funktionen von $x$ bedeuten; die $n$ Funktionen (8) bilden nämlich im allgemeinen ein Fundamentalsystem einer linearen Differentialgleichung $n$-ter Ordnung der Art. — Es fragt sich, auf welche Weise ein solches Fundamentalsystem der Art in eindeutiger Weise bestimmt werden kann.

Wir denken uns die Integralmatrix $(u_{i\varkappa})$ durch Fixierung der Wurzeln der determinierenden Fundamentalgleichungen des Differentialsystems (B) eindeutig bestimmt. Bilden wir dann mit konstanten $h_1, \ldots, h_n$ die Ausdrücke

$$z_i = \sum_{\lambda=1}^{n} u_{i\lambda} h_\lambda, \qquad (i = 1, 2, \cdots, n) \tag{9}$$

so konstituieren sie ein Fundamentalsystem der Differentialgleichung, der

$$z = \sum_{\lambda=1}^{n} u_\lambda h_\lambda \tag{10}$$

genügt; wir setzen voraus, daß diese Differentialgleichung wirklich von der $n$-ten Ordnung ist. — Durch Differentiation von (10) und mit Rücksicht auf das Differentialsystem (B), dem $u_1, \ldots, u_n$ genügen, ergibt sich

$$\frac{dz}{dx} = \sum_{\lambda=1}^{n} u_\lambda r_{\lambda 2},$$

$$\frac{d^2 z}{dx^2} = \sum_{\lambda=1}^{\nu} u_\lambda r_{\lambda 3},$$

$$\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot$$

$$\frac{d^{n-1} z}{dx^{n-1}} = \sum_{\lambda=1}^{n} u_\lambda r_{\lambda n}.$$

Darin bedeuten die $r_{\lambda\iota}$ rationale Funktionen von $x$ von der Form

$$r_{\lambda\iota} = \frac{g_{(\iota-1)(\sigma-1)}(x)}{[(x-a_1)\ldots(x-a_\sigma)]^{\iota-1}}, \qquad (\iota = 1, 2, \cdots, n) \tag{11}$$

wo $g_\varkappa(x)$ eine ganze rationale Funktion $\varkappa$-ten Grades anzeigt, und wo der Gleichmäßigkeit wegen $r_{\lambda 1}$ für die Konstanten $h_\lambda$ geschrieben wurde. Bilden wir die Wronskische Determinante der $z_1, \ldots, z_n$, so ist:

$$\left|\frac{d^{\varkappa-1} z_\iota}{dx^{\varkappa-1}}\right| = |u_{\iota\varkappa}|\,|r_{\iota\varkappa}| = |u_{\iota\varkappa}| \cdot \frac{g_{\frac{n(n-1)}{2}(\sigma-1)}(x)}{[(x-a_1)\ldots(x-a_\sigma)]^{\frac{n(n-1)}{2}}}. \qquad (\iota, \varkappa = 1, 2, \cdots, n) \tag{12}$$

Die Stellen, an denen die ganze Funktion $g_{\frac{n(n-1)}{2}(\sigma-1)}$ verschwindet, sind außerwesentlich singuläre Punkte der Differentialgleichung $n$-ter Ordnung, der $z$ genügt; wir haben also im allgemeinen bei willkürlichen $h_1, \ldots, h_n$

$$\frac{n(n-1)}{2}(\sigma-1)$$

solche Punkte. Die ganze Funktion $g_{\frac{n(n-1)}{2}(\sigma-1)}$ ist in den $h_1, \ldots, h_n$ homogen vom $n$-ten Grade; indem wir die $h_1, \ldots, h_n$ passend wählen, können wir bewirken, daß gewisse von den Nullstellen dieser ganzen Funktion in die Verzweigungspunkte

$$a_1, \ldots, a_\sigma, \infty$$

hineinfallen. Während bei willkürlichen (unbestimmten) konstanten $h_1, \ldots, h_n$ die Exponenten, zu denen die kanonischen Lösungen unserer Differentialgleichung $n$-ter Ordnung in den Punkten $a_1, \ldots, a_\sigma, \infty$ gehören, mit den Wurzeln der determinierenden Fundamentalgleichungen des Systems (B) übereinstimmen, wird dadurch, daß wir eine der Wurzeln der ganzen Funktion $g_{\frac{n(n-1)}{2}(\sigma-1)}$ mit dem Punkte $a_\nu$ zusammenfallen lassen, einer der zu $a_\nu$ gehörigen Exponenten der Differential-

gleichung $n$-ter Ordnung um eine Einheit erhöht. — Im allgemeinen werden wir die Verhältnisse der $k_1, \ldots, k_n$ so wählen können, daß $n-1$ dieser Exponenten um eine Einheit erhöht werden, wodurch sich die Anzahl der außerwesentlich singulären Punkte auf

$$\frac{n(n-1)}{2}(\sigma - 1) - n + 1 = \varrho_0$$

erniedrigt. Das entsprechende

$$z = u_1 k_1 + \cdots + u_n k_n$$

ist dann, von einem konstanten Faktor abgesehen, eindeutig festgelegt.

Wir haben also in der Tat eine Wronskische Matrix oder ein Fundamentalsystem der Art, und zwar ein zu der Hauptklasse gehöriges eindeutig fixiert; das hier auseinandergesetzte Verfahren rührt von Riemann her.

Im allgemeinen kann die Anzahl der außerwesentlich singulären Punkte eines Fundamentalsystems oder einer Differentialgleichung $n$-ter Ordnung der Art nicht unter die Zahl $\varrho_0$ herabgedrückt werden. — Man könnte sich die Aufgabe stellen, die $a_1, \ldots, a_\sigma$, deren Lage bei dem Riemannschen Problem eine willkürliche war, so zu bestimmen, daß sich die Anzahl der außerwesentlich singulären Punkte noch weiter, etwa bis auf

$$\varrho_0 - (\sigma - 2),$$

reduziert. Die $\sigma$ Stellen $a_1, \ldots, a_\sigma$ sind nämlich nicht als $\sigma$ wesentliche Parameter aufzufassen, sondern nur als $\sigma - 2$, da wir durch eine Transformation der unabhängigen Variabeln $x$ in $\alpha x + \beta$ zwei der Stellen $a_1, \ldots, a_\sigma$ etwa in die Punkte 0, 1 verlegen können. — Die Zahl $\varrho_0 - (\sigma - 2)$ ist für $n > 2$, $\sigma > 1$ positiv, nur für $n = 2$ ist sie gleich Null. Man könnte also für eine lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung, bei vorgeschriebenen Fundamentalsubstitutionen, die Lage der singulären Punkte $a_1, \ldots, a_\sigma$ so zu bestimmen suchen, daß diese Differentialgleichung keinen außerwesentlich singulären Punkt aufweist. — Die Konstantenzählung läßt die Lösbarkeit dieser Aufgabe als nicht unmöglich erscheinen. Sie ist in der Tat lösbar,*) aber das erfordert einen besonderen Beweis, auf den wir hier nicht eingehen können. Es kam uns nur darauf an, diese Art von Problemen in unseren Gedankengang einzuordnen. Wir bemerken noch, daß für $n = 2$, $\sigma = 2$ (dem Falle der Riemannschen $P$-Funktion oder der Gaußschen Differentialgleichung) schon die Zahl $\varrho_0$ selbst gleich Null ist.

*) Vergl. für den Fall, wo die Fundamentalsubstitutionen die Konvergenzbedingungen erfüllen, F. Klein, bei Ritter, Mathem. Annalen, Bd. 40, S. 8.

# Siebzehnte Vorlesung.

**Monodromie der Verzweigungspunkte. Die Probleme konstanter Residuen und konstanter Fundamentalsubstitutionen bei variabeln Verzweigungspunkten. Das Fuchssche Problem. Integralmatrix und Residuen als Funktionen der Verzweigungspunkte. Simultane lineare Differentialsysteme und der Fuchssche Satz. Differentialsystem zweiten Grades für die Residuen.**

Wir hatten in der vorigen Vorlesung die verschiedenen Schnittsysteme ins Auge gefaßt, die von den Verzweigungspunkten $a_1, \ldots, a_\sigma$ aus nach dem Unendlichen hingelegt werden können, und hatten einerseits betont, daß für eine bestimmte Integralmatrix $(u_{i\varkappa})$ die Systeme der Fundamentalsubstitutionen wechseln, je nachdem man das eine oder das andere Schnittsystem zugrunde legt, und andererseits darauf hingewiesen, daß wir im allgemeinen wesentlich verschiedene Integralmatrizen erhalten, wenn wir dasselbe System von Fundamentalsubstitutionen einmal für das eine und ein andermal für ein anderes Schnittsystem vorschreiben. — Es möge nun zunächst eine einfache geometrische Bemerkung gemacht werden.

Wenn wir in den Figuren 4a, 4b der fünften Vorlesung (S. 84) die $a_\nu$, $a_{\nu+1}$ als Punkte, $a_{\sigma+1}$ als den unendlich fernen Punkt betrachten, so erkennen wir unmittelbar (vergl. die weiter unten folgenden Figuren 6a und 6b), daß der Übergang von dem Schnittsysteme $l_1, \ldots, l_\sigma$ zu den Schnittsystemen (L) und (R) — rein topologisch betrachtet — auch dadurch vollzogen werden kann, daß wir die Punkte $a_\nu$, $a_{\nu+1}$, auf stetigen Wegen sich ändernd, ihre Plätze vertauschen lassen; dabei hat man sich die von diesen Punkten aus nach $a_{\sigma+1}$ hin gelegten Schnitte als ausdehnbare und biegsame Fäden zu denken, die sich jeder Lagenänderung der Punkte $a_\nu$, $a_{\nu+1}$ anpassen können. Wir können also sofort das folgende Resultat aussprechen:

Der Übergang von dem Schnittsysteme $l_1, \ldots, l_\sigma$ zu irgendeinem andern der in der fünften Vorlesung betrachteten Schnittsysteme $\lambda_1, \ldots, \lambda_\sigma$ kann dadurch vollzogen werden, daß wir die Punkte $a_1, \ldots, a_\sigma$ kontinuierliche Bahnen beschreiben lassen, die jeden dieser Punkte an

eine Stelle führen, wo auch ursprünglich einer der Punkte $a_1, \ldots, a_\sigma$ war; dabei dürfen niemals zwei der Punkte $a_1, \ldots, a_\sigma$ zusammenstoßen, und wenn bei einer Lagenänderung dieser Punkte einer von ihnen, etwa $a_\lambda$, an einen der biegsam und ausdehnbar zu denkenden Schnitte $l_1, \ldots, l_\sigma$ heranrückt, so muß dieser Schnitt eine Deformation erfahren. Man hat sich diese Deformation so vorzustellen, daß der sich an den Schnitt herandrängende Punkt $a_\lambda$ den diesen Schnitt repräsentierenden Faden vor sich her treibt, und daß der so in Bewegung versetzte Faden eventuell noch andere Fäden (Schnitte) vorwärts treibt, falls er bei seiner Deformation mit ihnen zu kollidieren droht.

Wir bezeichnen eine solche Bewegung der $a_1, \ldots, a_\sigma$ als Monodromie der Punktgruppe $(a_1, \ldots, a_\sigma)$ und heben als besonderen Fall gleich denjenigen hervor, wo jeder Punkt in seine Ausgangslage zurückkehrt, ein Fall, in dem wir von der Monodromie der einzelnen Punkte $a_1, \ldots, a_\sigma$ sprechen wollen.*)

Es liegt nun sehr nahe, diese topologische Bemerkung funktionentheoretisch auszunutzen, indem man die Punkte $a_1, \ldots, a_\sigma$ als Veränderliche betrachtet und die Lösungen bezw. die Integralmatrizen der schlechthin kanonischen Differentialsysteme mit den singulären Punkten $a_1, \ldots, a_\sigma$ als Funktionen dieser Veränderlichen untersucht. Wir werden dann zwei verschiedene Probleme zu behandeln haben, die einander gewissermaßen dualistisch gegenüberstehen, je nachdem wir nämlich:

1. von einem schlechthin kanonischen Differentialsysteme von der Form

$$\text{(A)} \qquad \frac{dy_\varkappa}{dx} = \sum_{\lambda=1}^{n} y_\lambda \sum_{\nu=1}^{\sigma} \frac{A_{\lambda\varkappa}^{(\nu)}}{x - a_\nu} \qquad (\varkappa = 1, 2, \cdots, n)$$

ausgehen, wo also neben den $a_1, \ldots, a_\sigma$ die Residuen $A_{i\varkappa}^{(\nu)}$ als willkürlich gegeben anzusehen sind, oder

2. ein Riemannsches Problem zugrunde legen, wo neben den $a_1, \ldots, a_\sigma$ die zu einem bestimmten Schnittsystem gehörigen Fundamentalsubstitutionen $(\mathsf{A}_{i\varkappa}^{(\nu)})$ willkürlich vorgeschrieben werden.

Man kann sich im Falle 1. die $A_{i\varkappa}^{(\nu)}$, im Falle 2. die $\mathsf{A}_{i\varkappa}^{(\nu)}$ noch als Funktionen der $a_1, \ldots, a_\sigma$ gegeben denken, z. B. als eindeutige Funktionen dieser Größen; wir werden hier nur von der in gewissem Sinne einfachsten Annahme ausgehen, indem wir voraussetzen wollen, daß

im Falle 1. die $A_{i\varkappa}^{(\nu)}$

im Falle 2. die $\mathsf{A}_{i\varkappa}^{(\nu)}$

*) Vergl. hierzu Hurwitz, Mathem. Annalen Bd. 39 (1891), S. 1.

**Konstanten**, d. h. von den veränderlich gedachten unter den $a_1, \ldots, a_\sigma$ unabhängige — etwa numerisch gegebene — Größen, sind.

Um zunächst einige allgemeine Bemerkungen machen zu können, fassen wir das Differentialsystem (A) ins Auge. Von den $a_1, \ldots, a_\sigma$ seien die Schnitte $l_1, \ldots, l_\sigma$ nach dem Unendlichen hingelegt, und in der so zerschnittenen Fläche $\overline{T}$ die Integralmatrix

$$(1) \qquad (y_{ix}) = (\overline{T}) \widehat{\int_{x_0}^{x}} \left( \sum_{\nu=1}^{\sigma} \frac{A_{ix}^{(\nu)}}{x - a_\nu} dx + \delta_{ix} \right)$$

definiert, die beim Überschreiten der Schnitte $l_\lambda$ die Substitutionen

$$(2) \qquad (\mathsf{A}_{ix}^{(\lambda)}) = s_\lambda \widehat{\int_{x_0}^{x_0}} \left( \sum_{\nu=1}^{\sigma} \frac{A_{ix}^{(\nu)}}{x - a_\nu} dx + \delta_{ix} \right) \qquad (\lambda = 1, 2, \cdots, \sigma)$$

erfährt, wo wie gewöhnlich $x_0$ einen fest gewählten regulären Punkt, $s_\lambda$ die von $x_0$ aus gelegte einfache Schleife bedeutet, die den Schnitt $l_\lambda$ einmal passiert. Diese Festsetzungen mögen sowohl für den Fall 1. als auch für den Fall 2. gelten; im letzteren Fall soll eben das System (A) eine Lösung des **Riemannschen** Problems darstellen, die dadurch bestimmt ist, daß wir uns die Wurzeln der determinierenden Fundamentalgleichungen fixiert denken.*)

Wir gehen von einem festen Wertesysteme $a_\nu = a_\nu^{(0)}$ der Punkte $a_1, \ldots, a_\sigma$ aus; der von $a_\nu^{(0)}$ aus nach dem Unendlichen hingelegte Schnitt sei $l_\nu^{(0)}$. Wenn sich dann die $a_1, \ldots, a_\sigma$ von diesen Anfangslagen aus in Bewegung setzen, so mögen die Schnitte $l_\nu$ im Sinne der zu Beginn dieser Vorlesung angegebenen Vorstellungsweise aus den als Fäden zu denkenden $l_\nu^{(0)}$ durch kontinuierliche Deformation hervorgehen.

**Solange nicht zwei der** $a_1, \ldots, a_\sigma$ **zusammentreffen, und solange auch keiner dieser Punkte mit einem der Punkte** $x_0$ **und** $x$ **koinzidiert oder ins Unendliche rückt**, können wir uns die Ausdrücke (1) und (2) in vollkommen bestimmter Weise bilden, indem wir die Integrationswege $(x_0 \ldots x)$ bezw. $s_\lambda$ immer der jeweiligen Lage der Punkte $a_1, \ldots, a_\sigma$ und der Schnitte $l_1, \ldots, l_\sigma$ anpassen. — Im Falle 1., d. h. wenn wir die Residuen $A_{ix}^{(\nu)}$ als von den $a_1, \ldots, a_\sigma$ unabhängige Größen betrachten, werden dann die Elemente der Inte-

*) Die Annahme, daß die Fundamentalgleichungen der $(\mathsf{A}_{ix}^{(\nu)})$ $(\nu = 1, 2, \cdots, \sigma + 1)$ lauter einfache Wurzeln haben, werde auch hier immer festgehalten.

gralmatrix $(y_{i\varkappa})$ einerseits und die Elemente der Fundamentalsubstitutionen $(\mathsf{A}_{i\varkappa}^{(\nu)})$ andererseits wohlbestimmte Funktionen der $a_1, \ldots, a_\sigma$ sein. Im Falle 2. haben wir für jede Lage der Punkte $a_1, \ldots, a_\sigma$ und der Schnitte $l_1, \ldots, l_\sigma$ ein Riemannsches Problem zu formulieren, bei dem die an den Schnitten $l_1, \ldots, l_\sigma$ in ihrer jeweiligen Lage geltenden Fundamentalsubstitutionen $(\mathsf{A}_{i\varkappa}^{(\nu)})$ feste, von den $a_1, \ldots, a_\sigma$ unabhängige Matrizen sind, und wo die Wurzeln der determinierenden Fundamentalgleichungen in bestimmter Weise fixiert sind; es sind dann die $y_{i\varkappa}$ einerseits und die Residuen $A_{i\varkappa}^{(\nu)}$ andererseits wohlbestimmte Funktionen der $a_1, \ldots, a_\sigma$. Es handelt sich zuvörderst darum, den allgemeinen analytischen Charakter der so definierten Funktionen zu ergründen.

Zu dem Ende greifen wir wieder auf die Entwickelungen zurück, die sich für die Integralmatrix $(y_{i\varkappa})$ und für die Fundamentalsubstitutionen ergeben, wenn wir die Methode der sukzessiven Approximationen auf das Differentialsystem (A) anwenden. Wir erhalten wie in der vierzehnten Vorlesung (S. 245)

(3) $$y_{i\varkappa} = E_{i\varkappa}(A_{11}^{(1)}, \ldots, A_{nn}^{(\sigma)};\ a_1, \ldots, a_\sigma;\ x_0, x),$$

wo wir jetzt die Abhängigkeit von den $a_1, \ldots, a_\sigma$ und von dem Integrationswege $(x_0, x)$ auch in Evidenz gesetzt haben. Lassen wir $x$ mit $x_0$ zusammenfallen und nehmen als Integrationsweg die Schleife $s_\lambda$, so liefern die Ausdrücke (3) unmittelbar die Fundamentalsubstitution

(4) $$\mathsf{A}_{i\varkappa}^{(\lambda)} = E_{i\varkappa}(A_{11}^{(1)}, \ldots, A_{nn}^{(\sigma)};\ a_1, \ldots, a_\sigma;\ s_\lambda); \qquad (\lambda = 1, 2, \cdots, \sigma)$$

die im zweiten Gliede dieser Gleichung auftretende Funktion ist natürlich mit der früher durch $E_{i\varkappa}^{(\lambda)}(A_{11}^{(1)}, \ldots, A_{nn}^{(\sigma)})$ bezeichneten identisch.

Zufolge der Festsetzungen, die wir über die Art und Weise, wie sich die Schnitte $l_1, \ldots, l_\sigma$ bei einer Änderung der $a_1, \ldots, a_\sigma$ verändern sollen, getroffen haben, werden unter den Voraussetzungen des Problems 1., d. h. für konstante Residuen $A_{i\varkappa}^{(\nu)}$, die Ausdrücke (3), (4) die $y_{i\varkappa}$ und die $\mathsf{A}_{i\varkappa}^{(\lambda)}$ in ihrer Abhängigkeit von den $a_1, \ldots, a_\sigma$ darstellen. Unter den Voraussetzungen des Problems 2., d. h. für konstante $\mathsf{A}_{i\varkappa}^{(\nu)}$ haben wir dagegen zunächst aus den Gleichungen (4) die Residuen $A_{i\varkappa}^{(\nu)}$ als Funktionen der $a_1, \ldots, a_\sigma$ zu bestimmen und diese in die Ausdrücke (3) einzusetzen, wodurch dann die letzteren die $y_{i\varkappa}$ in ihrer Abhängigkeit von den $a_1, \ldots, a_\sigma$ liefern werden. — Auf diese Weise haben wir für die vorhin nur begrifflich definierten Funktionen der $a_1, \ldots, a_\sigma$ wohlbestimmte analytische Definitionsgleichungen gefunden.

Da der Integrationsweg $(x_0, x)$ einerseits und die Schleifen $s_\lambda$ andererseits stets so zu wählen sind, daß sie durch keinen der Punkte

$a_1, \ldots, a_\sigma$ hindurchgehen, so können wir sagen, daß die Abstände der Punkte $a_1, \ldots, a_\sigma$ voneinander und die Abstände eines jeden dieser Punkte von den Punkten der Integrationswege $(x_0, x)$ und $s_\lambda$ nicht unter eine angebbare endliche Grenze herabsinken können. Solange also die Residuen $A_{i\varkappa}^{(\nu)}$ endliche Werte besitzen, bleiben die Koeffizienten des Differentialsystems (A) dem absoluten Betrage nach stets unter einer angebbaren endlichen Schranke, wie immer sich auch die $a_1, \ldots, a_\sigma$ unter den oben angegebenen Beschränkungen verändern mögen. Die aus dem Verfahren der sukzessiven Approximation entspringenden Reihen (3) bezw. (4) konvergieren demnach für alle in Betracht kommenden Wertesysteme der Größen $x, a_1, \ldots, a_\sigma$ unbedingt und gleichmäßig; daraus folgt (vergl. vierzehnte Vorlesung, S. 243), daß die Ausdrücke (3) als Funktionen der $\sigma + 1$ Veränderlichen $x, a_1, \ldots, a_\sigma$ holomorph sind in der Umgebung einer jeden Stelle

$$x = x',\ a_1 = a_1^{(0)}, \ldots, a_\sigma = a_\sigma^{(0)},$$

wo $x', a_1^{(0)}, \ldots, a_\sigma^{(0)}$ endliche Werte bedeuten, die voneinander und von $x_0$ verschieden sind, und daß ebenso die Ausdrücke (4) als Funktionen der $\sigma$ Veränderlichen $a_1, \ldots, a_\sigma$ in der Umgebung jeder Stelle

$$a_1 = a_1^{(0)}, \ldots, a_\sigma = a_\sigma^{(0)}$$

holomorph sind. Natürlich gilt das nur für endliche Werte der $A_{i\varkappa}^{(\nu)}$ und soweit die Ausdrücke (3) bezw. (4) von den $a_1, \ldots, a_\sigma$ explizite abhängen.

Für unser Problem 1. (konstante $A_{i\varkappa}^{(\nu)}$) ist damit der allgemeine analytische Charakter der $y_{i\varkappa}$ und der $\mathsf{A}_{i\varkappa}^{(\nu)}$, wie sie als Funktionen der $a_1, \ldots, a_\sigma$ oben definiert worden sind, festgestellt. Wir wollen nur noch über das Verhalten dieser Funktionen bei Monodromie der Verzweigungspunkte $a_1, \ldots, a_\sigma$ Aufschluß zu gewinnen suchen, und zwar beschränken wir uns der Einfachheit wegen auf die Monodromie der einzelnen Punkte, d. h. auf die Betrachtung solcher Wege, die einen jeden der Punkte $a_1, \ldots, a_\sigma$ in seine Ausgangslage zurückführen.

Es möge der Punkt $a_\lambda$ einen geschlossenen Weg beschreiben; dann bleiben die Koeffizienten des Differentialsystems (A) ungeändert, die Integralmatrix $(y_{i\varkappa})$ wird also wieder in eine Integralmatrix des Differentialsystems (A) übergehen. Wenn der von $a_\lambda$ beschriebene Weg keinen der Punkte

$$(5) \qquad a_1, \ldots, a_{\lambda-1}, a_{\lambda+1}, \ldots, a_\sigma, x_0, x$$

umkreist, so haben auch die Schnitte $l_1, \ldots, l_\sigma$ keine wesentliche

Änderung erfahren, es werden also die $y_{i\varkappa}$ und ebenso die $A_{i\varkappa}^{(\nu)}$ zu ihren Ausgangswerten zurückkehren. Vollzieht $a_\lambda$ einen Umlauf um $x_0$ oder um $x$, und bezeichnen wir mit $l_\lambda'$ den Schnitt, in den sich $l_\lambda$ deformiert hat, so wird $(y_{i\varkappa})$ in diejenige Integralmatrix

$$(6) \qquad L'\!\!\int\limits_{x_0}^{x}\left(\sum_{\nu=1}^{\sigma}\frac{A_{i\varkappa}^{(\nu)}}{x-a_\nu}\,dx+\delta_{i\varkappa}\right)$$

von (A) übergegangen sein, deren Integrationsweg $L'$ in der durch die Schnitte

$$l_1,\ldots,l_{\lambda-1},\,l_\lambda',\,l_{\lambda+1}\ldots,l_\sigma$$

zerschnittene Fläche verläuft. Die Integralmatrix (6) geht aus $(y_{i\varkappa})$ durch Anwendung einer Substitution der aus den $(A_{i\varkappa}^{(\nu)})$ komponierten Monodromiegruppe $G$ hervor; man findet diese Substitution, indem man zusieht, wie oft und in welcher Reihenfolge der Integrationsweg $L'$ die ursprünglichen Schnitte $l_1,\ldots,l_\sigma$ passiert. — Wenn $a_\lambda$ einen der Verzweigungspunkte $a_h$, wo $h \neq \lambda$ ist, umkreist*), so werden die Schnitte $l_\lambda$ und $l_h$ sich in $l_\lambda'$ und $l_h'$ deformiert haben (vergl. die Fig. 5, wo die Deformation für den Fall $h<\lambda$ gezeichnet ist; offenbar wird dieselbe Deformation auch dadurch hervorgerufen, daß man $a_h$ einen Umlauf um $a_\lambda$ vollziehen läßt). Der Integrationsweg von $(y_{i\varkappa})$ erfährt keine Änderung, wir haben also nach dem in Rede stehenden Umlaufe die frühere Integralmatrix $(y_{i\varkappa})$, aber an die Stelle des ursprünglichen Schnittsystems $l_1,\ldots,l_\sigma$ ist ein neues $l_1',\ldots,l_\sigma'$ getreten, in dem $l_h'$, $l_\lambda'$ die Plätze der früheren $l_h$, $l_\lambda$ einehmen, während die übrigen Schnitte keine Änderung erfahren haben. Bezeichnen wir jetzt mit $s_\nu'$ die von $x_0$ aus gelegte Schleife, die den Schnitt $l_\nu'$ des neuen Systems

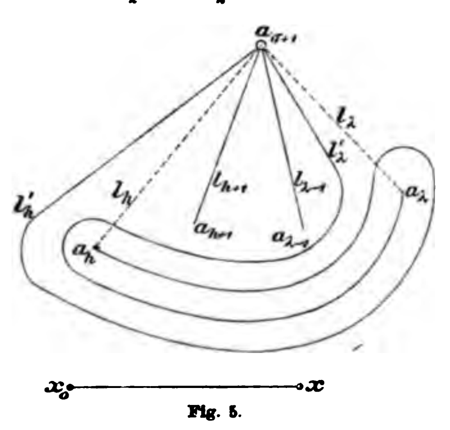


Fig. 5.

*) Die Angabe, daß $a_\lambda$ einen der Punkte (5) umkreist, ist so zu verstehen, daß $a_\lambda$ einen Umlauf vollzieht, der nur diesen einen der Punkte (5) und zwar im positiven Sinne einschließt; wenn es sich um die Umkreisung eines der Punkte $a_h$ $(h \neq \lambda)$ handelt, soll der Umlauf überdies so vollzogen werden, als ob der Punkt $a_\lambda$ den von $a_h$ ausgehenden Schnitt $l_h$ vom positiven nach dem negativen Ufer hin passieren wollte.

einmal überschreitet, so hat sich durch den Umlauf, den $a_\lambda$ um $a_k$ vollzogen hat, die Fundamentalsubstitution $(\mathsf{A}_{ix}^{(\nu)})$ in

$$(\overline{\mathsf{A}}_{ix}^{(\nu)}) = s'_\nu \int\limits_{x_0}^{\widehat{x_0}} \left( \sum_{\mu=1}^{\sigma} \frac{A_{ix}^{(\mu)}}{x - a_\mu} dx + \delta_{ix} \right) \qquad (\nu = 1, 2, \cdots, \sigma)$$

verwandelt. Für die in der Figur gezeichnete Lage findet man z. B.

$$(\overline{\mathsf{A}}_{ix}^{(k)}) = (\mathsf{A}_{ix}^{(\lambda)})\,(\mathsf{A}_{ix}^{(k)})\,(\mathsf{A}_{ix}^{(\lambda)})^{-1},$$

$$(\overline{\mathsf{A}}_{ix}^{(\nu)}) = (\mathsf{A}_{ix}^{(\lambda)})\,(\mathsf{A}_{ix}^{(k)})\,(\mathsf{A}_{ix}^{(\lambda)})^{-1}\,(\mathsf{A}_{ix}^{(k)})^{-1}\,(\mathsf{A}_{ix}^{(\nu)})\,(\mathsf{A}_{ix}^{(k)})\,(\mathsf{A}_{ix}^{(\lambda)})\,(\mathsf{A}_{ix}^{(k)})^{-1}\,(\mathsf{A}_{ix}^{(\lambda)})^{-1},$$
$$(\nu = k+1, \cdots, \lambda - 1)$$

$$(\overline{\mathsf{A}}_{ix}^{(\lambda)}) = (\mathsf{A}_{ix}^{(\lambda)})\,(\mathsf{A}_{ix}^{(k)})\,(\mathsf{A}_{ix}^{(\lambda)})\,(\mathsf{A}_{ix}^{(k)})^{-1}\,(\mathsf{A}_{ix}^{(\lambda)})^{-1};$$

die $(\mathsf{A}_{ix}^{(1)}), \ldots, (\mathsf{A}_{ix}^{(k-1)}),\ (\mathsf{A}_{ix}^{(\lambda+1)}), \ldots, (\mathsf{A}_{ix}^{(\sigma)})$ erfahren keine Änderung. Man beachte, daß, wenn $a_\lambda$ sich stetig ändernd den Umlauf um $a_k$ vollzieht, die Elemente von $(\mathsf{A}_{ix}^{(\nu)})$ ebenfalls kontinuierlich in die Elemente von $(\overline{\mathsf{A}}_{ix}^{(\nu)})$ übergehen.

Es verwandeln sich also durch Monodromie der einzelnen Verzweigungspunkte die $(\mathsf{A}_{ix}^{(\nu)})$ in ähnliche Substitutionen der Monodromiegruppe $G$. Da durch Monodromie der einzelnen Verzweigungspunkte das Schnittsystem $l_1, \ldots, l_\sigma$ stets in ein Schnittsystem $l_1', \ldots, l_\sigma'$ deformiert wird, für das die Schnitte bei einer Umkreisung des unendlich fernen Punktes in derselben Reihenfolge getroffen werden, wie für das ursprüngliche System, so bildet die Gesamtheit der Übergänge von einem Schnittsystem zu einem andern, die durch Monodromie der einzelnen Verzweigungspunkte hervorgerufen werden, die am Schlusse der fünften Vorlesung (S. 85) erwähnte Untergruppe der aus den Übergängen (L) und (R) komponierten Gruppe aller dort betrachteten Übergänge.

In bezug auf das Problem 1. können wir also zusammenfassend sagen, daß die Integralmatrix $(y_{ix})$ in ihrer Abhängigkeit von einem der Verzweigungspunkte $a_\lambda$ so beschaffen ist, daß sie bei Umläufen von $a_\lambda$ um die Punkte (5) lineare Substitutionen erfährt; die Elemente dieser linearen Substitutionen sind aber selbst Funktionen der Variabeln $a_\lambda$. Natürlich gilt dies nicht nur unter der bei dem Probleme 1. gemachten Voraussetzung konstanter (d. h. von

$a_\lambda$ unabhängiger) Residuen $A_{ix}^{(\nu)}$, sondern auch allgemein, wenn wir diese Residuen als irgendwelche eindeutige Funktionen von $a_\lambda$ wählen.*)

* * *

Wir wenden uns nun zu der genaueren Behandlung des Problems 2. Bei diesem Probleme wurden die Fundamentalsubstitutionen $(A_{ix}^{(\nu)})$ als konstante, d. h. von den Verzweigungspunkten $a_1, \ldots, a_\sigma$ unabhängige Matrizen vorausgesetzt. Denken wir uns z. B. nur einen dieser Punkte, etwa $a_\lambda$, als variabel, die $A_{ix}^{(\nu)}$ als beliebig vorgeschriebene (von $a_\lambda$ unabhängige) Konstanten und bestimmen gemäß dem Riemannschen Probleme ein schlechthin kanonisches Differentialsystem (A), dessen Integralmatrix $(y_{ix})$ an den Schnitten $l_1, \ldots, l_\sigma$ die Substitutionen $(A_{ix}^{(\nu)})$ $(\nu = 1, 2, \cdots, \sigma)$ erfährt, so hat also dieses Differentialsystem die folgende Eigenschaft:

Es gibt eine Integralmatrix $(y_{ix})$ von (A), deren Monodromiegruppe $G$ von $a_\lambda$ unabhängig ist.

Die Größe $a_\lambda$ tritt in den Koeffizienten des Differentialsystems (A) als Parameter auf. Unser Problem 2. ordnet sich demzufolge dem folgenden von Fuchs**) aufgestellten und behandelten Probleme unter:

Die Koeffizienten eines linearen Differentialsystems***) mit der unabhängigen Variabeln $x$ hängen noch von einem Parameter $t$ ab; eine Integralmatrix hat die Eigenschaft, daß ihre Monodromiegruppe von $t$ unabhängig ist, man charakterisiere die Elemente dieser Integralmatrix als Funktionen von $x$ und $t$.

Wir wollen nun zunächst nachweisen, daß dieses allgemeine Fuchssche Problem im wesentlichen auf das von uns formulierte, scheinbar speziellere Problem, wo der Parameter $t$ einer der Verzweigungspunkte $a_\lambda$ und das Differentialsystem ein schlechthin kanonisches ist, hinauskommt.

In der Tat, sei

$$\frac{dz_x}{dx} = \sum_{\mu=1}^{n} z_\mu b_{\mu x} \qquad (x = 1, 2, \cdots, n) \tag{7}$$

---

*) Man vergl. die von E. Wilczynski, American Journal, Bd. 21 (1899), S. 354 untersuchten Funktionen einer Variabeln, die bei Umläufen dieser Variabeln lineare Substitutionen erfahren, deren Elemente eindeutige Funktionen dieser Variabeln sind.

**) Sitzungsberichte der Berliner Akademie 1888 ff., Werke, Bd. III (1908).

***) Bei Fuchs handelt es sich um eine lineare Differentialgleichung $n$-ter Ordnung, was natürlich keinen wesentlichen Unterschied ausmacht.

ein Differentialsystem, dessen Koeffizienten $b_{\iota\varkappa}$ wir, um die Vorstellung zu fixieren, als rationale Funktionen von $x$ voraussetzen. Die $b_{\iota\varkappa}$ mögen überdies Funktionen eines Parameters $t$ sein, und es bedeute $(z_{\iota\varkappa})$ eine Integralmatrix des Systems (7), deren Monodromiegruppe im Sinne des **Fuchs**schen Problems von $t$ unabhängig ist. Wir bezeichnen in gewohnter Weise mit $a_1, \ldots, a_\sigma, \infty$ die Verzweigungspunkte der Integrale von (7) und mit $(\mathsf{A}_{\iota\varkappa}^{(\nu)})$ die Fundamentalsubstitution, die $(z_{\iota\varkappa})$ erfährt, wenn die Variable $x$ den Querschnitt $(a_\nu, \infty) = l_\nu$ überschreitet. Es sind dann zwei Fälle zu unterscheiden:

a) Die Verzweigungspunkte $a_1, \ldots, a_\sigma$ sind von $t$ unabhängig,

b) einige der $a_1, \ldots, a_\sigma$ sind Funktionen von $t$.

Im Falle a) legen wir dem Parameter $t$ einen festen Wert $t_0$ bei; die $b_{\iota\varkappa}$ mögen für $t = t_0$ gleich $b_{\iota\varkappa}^{(0)}$ sein. Wir betrachten dann das Differentialsystem

$$\frac{dz_\varkappa^{(0)}}{dx} = \sum_{\mu=1}^{n} z_\mu^{(0)} b_{\mu\varkappa}^{(0)}. \qquad (\varkappa = 1, 2, \cdots, n) \tag{8}$$

Da die $a_1, \ldots, a_\sigma$ von $t$ unabhängig sein sollten, und auch die Fundamentalsubstitutionen $(\mathsf{A}_{\iota\varkappa}^{(\nu)})$ von $t$ unabhängig sind, so ist das Differentialsystem (8) mit (7) kogredient, d. h. es ist

$$z_\varkappa = \sum_{\mu=1}^{n} z_\mu^{(0)} s_{\mu\varkappa}, \qquad (\varkappa = 1, 2, \cdots, n) \tag{9}$$

wo die $s_{\iota\varkappa}$ eindeutige Funktionen von $x$ bedeuten. Wenn insbesondere das Differentialsystem (7) dem **Fuchs**schen Typus angehört, so sind die Differentialsysteme (7) und (8) von derselben Art, und die $s_{\iota\varkappa}$ sind rationale Funktionen von $x$. Da die $z_1^{(0)}, \ldots, z_n^{(0)}$ von $t$ unabhängig sind, so wird die Abhängigkeit der $z_1, \ldots, z_n$ von $t$ durch die Art und Weise, wie die $s_{\iota\varkappa}$ von $t$ abhängen, vollständig erschöpft. Das Studium dieser Abhängigkeit ist also überhaupt kein Problem der Theorie der linearen Differentialgleichungen.

Im Falle b) sei etwa $a_\lambda = f(t)$. Wir können dann an Stelle von $t$ den Punkt $a_\lambda$ als den Parameter ansehen, und es werden diejenigen der Verzweigungspunkte $a_1, \ldots, a_\sigma$, die Funktionen von $t$ sind, in funktionale Abhängigkeit von $a_\lambda$ geraten. Nach dem in der vorigen Vorlesung aufgestellten Satze (S. 298) gibt es dann schlechthin kanonische Differentialsysteme von der Form (A), die mit (7) kogredient sind, und es ist somit in diesem Falle das **Fuchs**sche Problem auf die Untersuchung von Differentialsystemen der Form (A) zurückgeführt, für die die Fundamentalsubstitutionen $(\mathsf{A}_{\iota\varkappa}^{(\nu)})$ von einem — oder eventuell von

mehreren — der singulären Punkte $a_1, \ldots, a_\sigma$ unabhängig sind. Wir werden also unser Problem 2. geradezu als das Fuchssche bezeichnen können.

Dieses Problem behandeln wir jetzt unter den folgenden Voraussetzungen. Wir denken uns den Punkt $a_\lambda$ als Variable, die übrigen Punkte $a_h (h \neq \lambda)$ seien von $a_\lambda$ unabhängig, ebenso sei der Anfangspunkt $x_0$ von $a_\lambda$ unabhängig. Für das Schnittsystem $l_1, \ldots, l_\sigma$, wo $l_\lambda$ im Sinne der oben gemachten Festsetzungen als ausdehnbarer Faden vorzustellen ist, der sich bei einer Lagenänderung von $a_\lambda$ in der verabredeten Weise deformiert, sind die Fundamentalsubstitutionen $(A_{i\varkappa}^{(1)}), \ldots, (A_{i\varkappa}^{(\sigma)})$ als von $a_\lambda$ unabhängige Matrizen mit nicht verschwindenden Determinanten vorgeschrieben. Überdies mögen die zu diesen Matrizen und die zu der Matrix

$$(A_{i\varkappa}^{(\sigma+1)}) = (A_{i\varkappa}^{(1)})^{-1} \ldots (A_{i\varkappa}^{(\sigma)})^{-1}$$

gehörigen Fundamentalgleichungen lauter einfache Wurzeln

$$\omega_1^{(\nu)}, \ldots, \omega_n^{(\nu)} \qquad (\nu = 1, 2, \cdots, \sigma + 1)$$

besitzen.

Es sei nun $a_\lambda^{(0)}$ ein fester endlicher Wert von $a_\lambda$, der von den $a_h (h \neq \lambda)$ und von $x_0$ verschieden ist, $l_\lambda^{(0)}$ sei die der Lage $a_\lambda^{(0)}$ von $a_\lambda$ entsprechende Lage des Schnittes $l_\lambda$. Wir bestimmen gemäß dem Riemannschen Probleme ein Differentialsystem von der Form (A) mit den Residuen $\bar{A}_{i\varkappa}^{(\nu)}$ und den Verzweigungspunkten

$$(10) \qquad a_1, \ldots, a_{\lambda-1}, a_\lambda^{(0)}, a_{\lambda+1}, \ldots, a_\sigma,$$

für das die sich in $x_0$ auf $(\delta_{i\varkappa})$ reduzierende Integralmatrix $(\bar{y}_{i\varkappa})$ an den Schnitten

$$(11) \qquad l_1, \ldots, l_{\lambda-1}, l_\lambda^{(0)}, l_{\lambda+1}, \ldots, l_\sigma$$

die Substitutionen $(A_{i\varkappa}^{(\nu)})$ $(\nu = 1, 2, \cdots, \sigma)$ erfährt, und dessen determinierende Fundamentalgleichungen

$$(12) \qquad |\bar{A}_{i\varkappa}^{(\nu)} - \delta_{i\varkappa} r| = 0, \qquad (\nu = 1, 2, \cdots, \sigma + 1)$$
$$(i, \varkappa = 1, 2, \cdots, n)$$

die als bestimmte Determinationen der Werte

$$(13) \qquad \frac{\log \omega_i^{(\nu)}}{2\pi\sqrt{-1}} \qquad (i = 1, 2, \cdots, n; \nu = 1, 2, \cdots, \sigma + 1)$$

gewählten Wurzeln

$$(14) \qquad r_1^{(\nu)}, \ldots, r_n^{(\nu)} \qquad (\nu = 1, 2, \cdots, \sigma + 1)$$

besitzen, wo zufolge der **Fuchs**schen Relation

$$(15)\qquad \sum_{\nu=1}^{\sigma+1}\sum_{i=1}^{n} r_i^{(\nu)} = 0$$

ist. Betrachten wir dann die Gleichungen (4), die wir jetzt wieder in der Form

$$(16)\qquad \mathsf{A}_{i\varkappa}^{(\nu)} = E_{i\varkappa}^{(\nu)}(A_{11}^{(1)}, \ldots, A_{nn}^{(\sigma)}) \qquad (\nu = 1, 2, \cdots, \sigma)$$

schreiben wollen, so wissen wir, daß in diesen Gleichungen die rechten Seiten ganze transzendente Funktionen der $A_{11}^{(1)}, \ldots, A_{nn}^{(\sigma)}$ sind, deren Funktionaldeterminante für das Wertesystem

$$(17)\qquad A_{11}^{(1)} = \bar{A}_{11}^{(1)}, \ldots, A_{nn}^{(\sigma)} = \bar{A}_{nn}^{(\sigma)}$$

nicht verschwindet. Überdies wissen wir (vergl. S. 309), daß diese rechten Seiten als Funktionen von $a_\lambda$ in der Umgebung der Stelle $a_\lambda = a_\lambda^{(0)}$ holomorph sind, solange die $A_{i\varkappa}^{(\nu)}$ endliche Werte besitzen. Die linken Seiten der Gleichungen (16) sind von $a_\lambda$ unabhängige Konstanten. Nach dem Satze von der impliziten Funktion*) definieren die Gleichungen (16) somit ein System von monogenen Funktionen $A_{i\varkappa}^{(\nu)}$ der komplexen Variabeln $a_\lambda$, das in der Umgebung von $a_\lambda = a_\lambda^{(0)}$ holomorph ist, im Punkte $a_\lambda = a_\lambda^{(0)}$ die Werte (17) annimmt und in die rechten Seiten der Gleichungen (16) eingesetzt, diese identisch befriedigt. Dieses Funktionssystem besitzt die folgenden Eigenschaften.

Bedeutet $a_\lambda$ irgendeinen Punkt der in Rede stehenden Umgebung von $a_\lambda^{(0)}$ und bilden wir uns mit den zugehörigen Werten $A_{i\varkappa}^{(\nu)}$ des gedachten Funktionssystems als Residuen das schlechthin kanonische Differentialsystem (A), so löst dieses Differentialsystem das durch die Verzweigungspunkte $a_1, \ldots, a_\sigma$, die Schnitte $l_1, \ldots, l_\sigma$, die Fundamentalsubstitutionen $\mathsf{A}_{i\varkappa}^{(1)}, \ldots, \mathsf{A}_{i\varkappa}^{(\sigma)}$ und den Anfangspunkt $x_0$ bestimmte **Riemann**sche Problem. Da sich ferner die $A_{i\varkappa}^{(\nu)}$, solange $a_\lambda$ in der gedachten Umgebung verbleibt, mit $a_\lambda$ stetig ändern, so sind die Wurzeln der determinierenden Fundamentalgleichungen

$$(18)\qquad |A_{i\varkappa}^{(\nu)} - \delta_{i\varkappa} r| = 0 \qquad (\nu = 1, 2, \cdots, \sigma + 1)$$
$$(i, \varkappa = 1, 2, \cdots, n)$$

ebenfalls stetige Funktionen von $a_\lambda$, also, da die Numeri dieser Wurzeln im wesentlichen die konstanten Größen $\omega_i^{(\nu)}$ sind, immer mit den Größen

*) Vgl. z. B. **Picard**, Traité d'Analyse, t. II (1893), S. 247.

(14) identisch. Da nun nach dem Fundamentallemma durch diese Daten das Differentialsystem (A) eindeutig bestimmt ist, so können wir folgendes sagen:

Denken wir uns $a_\lambda$ willkürlich variabel, mit der einzigen Beschränkung, daß dieser Punkt stets im Endlichen bleibt und mit keinem der Punkte

(19) $$x_0, a_1, \ldots, a_{\lambda-1}, a_{\lambda+1}, \ldots, a_\sigma$$

koinzidiert, und betrachten wir die Funktionen $A_{ix}^{(\nu)}$ von $a_\lambda$, wie wir sie (S. 308) für unser Problem 2. definiert haben, d. h. bilden wir für jede Lage von $a_\lambda$ dasjenige schlechthin kanonische Differentialsystem (A), das das mit den Verzweigungspunkten $a_1, \ldots, a_\sigma$, den Schnitten $l_1, \ldots, l_\sigma$, den Fundamentalsubstitutionen $(\mathsf{A}_{ix}^{(\nu)})$ und dem Anfangspunkt $x_0$ bestimmte Riemannsche Problem löst, und für das die Wurzeln der determinierenden Fundamentalgleichungen (18) die Größen (14) sind, so sind diese Funktionen in der Umgebung einer jeden von den Punkten (19) verschiedenen endlichen Stelle $a_\lambda$ holomorph.

Um jetzt die $y_{ix}$ selbst als Funktionen von $a_\lambda$ zu charakterisieren, haben wir, wie bereits oben (S. 308) bemerkt wurde, nur in die rechten Seiten der Gleichungen (3) für die $A_{ix}^{(\nu)}$ ihre aus den Gleichungen (4) bezw. (16) berechneten Werte einzusetzen. Da die $A_{ix}^{(\nu)}$ in der Umgebung jeder Stelle $a_\lambda^{(0)}$, die von den Stellen (19) verschieden ist, holomorphe Funktionen von $a_\lambda$ sind, und da, wie wir gezeigt haben, die rechten Seiten der Gleichungen (3), soweit sie explizite von $a_\lambda$ abhängen, in der Umgebung von $a_\lambda = a_\lambda^{(0)}$ ebenfalls holomorph sind, falls die $A_{ix}^{(\nu)}$ endliche Werte besitzen und $x$ von $a_\lambda$ und den übrigen singulären Punkten verschieden ist, so schließen wir, daß auch die $y_{ix}$ selbst als Funktionen von $a_\lambda$ holomorph sind in der Umgebung eines jeden endlichen Wertes von $a_\lambda$, der von den Punkten (19) und von $x$ verschieden ist.

Betrachten wir jetzt wieder alle $a_1, \ldots, a_\sigma$ als Variable und die $\mathsf{A}_{ix}^{(\nu)}$ als von diesen Variabeln unabhängige Größen, so folgt, daß die Funktionen $A_{ix}^{(\nu)}$ und $y_{ix}$ der $a_1, \ldots, a_\sigma$, wie sie oben (S. 308) für das Problem 2. definiert worden sind, die folgenden Eigenschaften haben,

Die $A_{ix}^{(\nu)}$ sind holomorph in der Umgebung jeder Stelle $(a_1, \ldots, a_\sigma)$: für die die $a_1, \ldots, a_\sigma$ endlich, voneinander und von $x_0$ verschieden sind, ide $y_{ix}$ sind holomorph als Funktionen der $\sigma + 1$ Variabeln $x, a_1, \ldots, a_\sigma$

in der Umgebung jedes endlichen Wertesystems dieser Größen, für das die $x, a_1, \ldots, a_\sigma$ voneinander und von $x_0$ verschieden sind.

Das Verhalten der in Rede stehenden Funktionen bei Monodromie der $a_1, \ldots a_\sigma$ läßt sich nun auch in äußerst einfacher Weise charakterisieren. Wir betrachten gleich allgemein die Monodromie der Punktgruppe $(a_1, \ldots, a_\sigma)$.

Jede Änderung der $a_1, \ldots, a_\sigma$, bei der das System dieser Punkte von der Anfangslage $(a_1^{(0)}, \ldots, a_\sigma^{(0)})$ ausgehend wieder in dieselbe Konfiguration zurückkehrt (wobei aber einzelne Punkte $a_1, \ldots, a_\sigma$ ihre Plätze vertauschen können), läßt sich*) aus den Transpositionen zusammensetzen, bei denen zwei benachbarte Punkte $a_\nu, a_{\nu+1}$ ihre Plätze

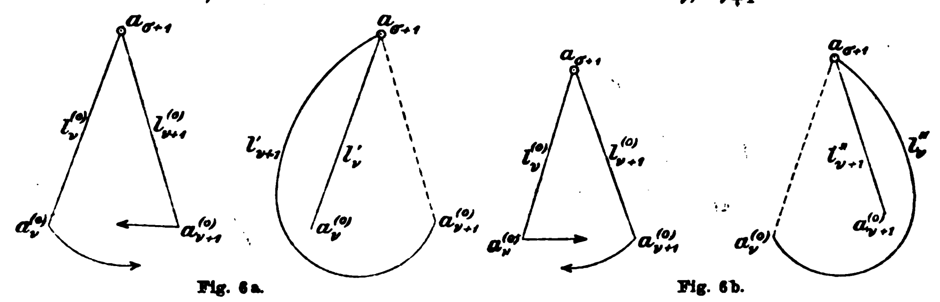



Fig. 6a. Fig. 6b.

wechseln, d. h. wo der Punkt $a_\nu$ in die Lage $a_{\nu+1}^{(0)}$, der Punkt $a_{\nu+1}$ in die Lage $a_\nu^{(0)}$ einrückt. Eine solche Transposition kann in zwiefacher Weise bewirkt werden, wie es in den Figuren 6a und 6b veranschaulicht ist, wo auch die Endlagen der ursprünglichen Schnitte $l_\nu^{(0)}, l_{\nu+1}^{(0)}$ nach erfolgtem Platzwechsel ($l'_\nu, l'_{\nu+1}$ in 6a, $l''_\nu, l''_{\nu+1}$ in 6b) angegeben sind. Wie man sieht, entsprechen diese Transpositionen, wie wir schon zu Beginn dieser Vorlesung bemerkt haben, den am Schlusse der fünften Vorlesung mit (L) und (R) bezeichneten Änderungen des Schnittsystems.

Wir haben nunmehr für die Anfangslage ein Riemannsches Problem mit den Verzweigungspunkten $a_1^{(0)}, \ldots, a_\sigma^{(0)}$, den Schnitten $l_1^{(0)}, \ldots, l_\sigma^{(0)}$ und den Fundamentalsubstitutionen $(\mathsf{A}_{i\varkappa}^{(\mu)})$ an den Schnitten $l_\mu^{(0)}$, wobei der Anfangspunkt $x_0$ und die Wurzeln der determinierenden Fundamentalgleichungen ein für allemal fest zu denken sind. Es seien $\bar{A}_{i\varkappa}^{(\mu)}$ die entsprechenden Residuen, $y_{i\varkappa}^{(0)}$ die Elemente der Integralmatrix, die sich in der durch die Schnitte $l_1^{(0)}, \ldots, l_\sigma^{(0)}$ zerschnittenen Fläche $\bar{T}^{(0)}$

*) Siehe z. B. Hurwitz a. a. O.

im Punkte $x_0$ auf $(\delta_{i\varkappa})$ reduziert. — Nach vollzogener Transposition haben wir für den in der Figur 6a angedeuteten Fall ein Riemannsches Problem mit den singulären Punkten $a_1^{(0)}, \ldots, a_\sigma^{(0)}$, den Schnitten

(20) $$l_1^{(0)}, \ldots, l_{\nu-1}^{(0)}, l'_\nu, l'_{\nu+1}, l_{\nu+2}^{(0)}, \ldots, l_\sigma^{(0)}$$

und den zu diesen Schnitten in der angegebenen Reihenfolge gehörigen Fundamentalsubstitutionen

$$(\mathsf{A}_{i\varkappa}^{(1)}), \ldots, (\mathsf{A}_{i\varkappa}^{(\nu-1)}), (\mathsf{A}_{i\varkappa}^{(\nu+1)}), (\mathsf{A}_{i\varkappa}^{(\nu)}), (\mathsf{A}_{i\varkappa}^{(\nu+2)}), \ldots, (\mathsf{A}_{i\varkappa}^{(\sigma)});$$

die Wurzeln der determinierenden Fundamentalgleichungen sind dieselben geblieben wie ursprünglich, nur haben sich natürlich die zu den Punkten $a_\nu^{(0)}, a_{\nu+1}^{(0)}$ gehörigen gegeneinander vertauscht. Es seien $\bar{A}_{i\varkappa}^{(\mu)}$ die entsprechenden Residuen, $y_{i\varkappa}^{(1)}$ die Elemente der Integralmatrix, die sich in der durch die Schnitte (20) zerschnittenen Fläche $\bar{T}^{(1)}$ im Punkte $x_0$ auf $(\delta_{i\varkappa})$ reduziert. Es sind dann unsere Funktionen $A_{i\varkappa}^{(\mu)}$ und $y_{i\varkappa}$ durch die in Rede stehende Transposition aus den Werten $\bar{A}_{i\varkappa}^{(\mu)}$ und $y_{i\varkappa}^{(0)}$ in die Werte $\bar{A}_{i\varkappa}^{(\mu)}$ und $y_{i\varkappa}^{(1)}$ übergeführt worden; wir können also sagen, daß wir die dieser Transposition entsprechende Werteänderung der gedachten Funktionen vollständig übersehen.

Wenn die von den Punkten $a_\nu$, $a_{\nu+1}$ beschriebenen Wege so beschaffen sind, daß der von $x_0$ nach $x$ in $\bar{T}^{(0)}$ hinführende Integrationsweg auch ganz in der Fläche $\bar{T}^{(1)}$ verläuft, so kann das zu der Endlage gehörige Riemannsche Problem auch so charakterisiert werden, daß den ursprünglichen Schnitten

$$l_1^{(0)}, \ldots, l_{\nu-1}^{(0)}, l_\nu^{(0)}, l_{\nu+1}^{(0)}, l_{\nu+2}^{(0)}, \ldots, l_\sigma^{(0)}$$

in dieser Reihenfolge die Fundamentalsubstitutionen

$$(\mathsf{A}_{i\varkappa}^{(1)}), \ldots, (\mathsf{A}_{i\varkappa}^{(\nu-1)}), (\mathsf{A}_{i\varkappa}^{(\nu)})^{-1}(\mathsf{A}_{i\varkappa}^{(\nu+1)})(\mathsf{A}_{i\varkappa}^{(\nu)}), (\mathsf{A}_{i\varkappa}^{(\nu)}), (\mathsf{A}_{i\varkappa}^{(\nu+2)}), \ldots, (\mathsf{A}_{i\varkappa}^{(\sigma)})$$

zugehören. In der Tat entsprechen den von $x_0$ aus gelegten Schleifen, die die alten Schnitte $l_\nu^{(0)}, l_{\nu+1}^{(0)}$ einmal überschreiten, in der Fläche $\bar{T}^{(1)}$ die Substitutionen

(21) $$(\mathsf{A}_{i\varkappa}^{(\nu)})^{-1}(\mathsf{A}_{i\varkappa}^{(\nu+1)})(\mathsf{A}_{i\varkappa}^{(\nu)}) \text{ bezw. } (\mathsf{A}_{i\varkappa}^{(\nu)}).$$

Analoge Erörterungen gelten für die in der Figur 6b veranschaulichte Transposition; bei dieser sind in der Endlage — sofern auch hier der von $x_0$ nach $x$ führende Integrationsweg keine Änderung zu erfahren braucht — die den ursprünglichen Schnitten $l_\nu^{(0)}, l_{\nu+1}^{(0)}$ entsprechenden Fundamentalsubstitutionen

(22) $$(\mathsf{A}_{i\varkappa}^{(\nu+1)}) \text{ bezw. } (\mathsf{A}_{i\varkappa}^{(\nu+1)})(\mathsf{A}_{i\varkappa}^{(\nu)})(\mathsf{A}_{i\varkappa}^{(\nu+1)})^{-1}.$$

Wir erkennen, daß durch die beiden betrachteten Transpositionen für die den ursprünglichen Schnitten zugeordneten Fundamentalsubstitutionen dieselben Änderungen, nur in umgekehrter Anordnung, hervorgerufen werden, wie die, die nach den Betrachtungen der fünften Vorlesung den dort behandelten Änderungen des Schnittsystems entsprechen. Aus dieser Bemerkung können wir nun einen wichtigen Schluß ziehen.

Gehen wir von den $(\mathsf{A}_{ix}^{(1)}), \ldots, (\mathsf{A}_{ix}^{(\sigma)})$ als einem System von Fundamentalsubstitutionen der Gruppe $G$ aus, so können wir die Gesamtheit derjenigen Systeme von Fundamentalsubstitutionen derselben Gruppe in Betracht ziehen, die entsteht, wenn wir das ursprüngliche System allen denjenigen Änderungen unterwerfen, die aus den Änderungen

$$\left.\begin{array}{ll}
(\mathrm{I}) & \left\{\begin{array}{lll}
(\mathsf{A}_{ix}^{(\nu)})^{-1}(\mathsf{A}_{ix}^{(\nu+1)})(\mathsf{A}_{ix}^{(\nu)}) & \text{an Stelle von} & (\mathsf{A}_{ix}^{(\nu)}) \\
(\mathsf{A}_{ix}^{(\nu)}) & \text{,, \quad ,, \quad ,,} & (\mathsf{A}_{ix}^{(\nu+1)})
\end{array}\right. \\
(\mathrm{II}) & \left\{\begin{array}{lll}
(\mathsf{A}_{ix}^{(\nu+1)}) & \text{,, \quad ,, \quad ,,} & (\mathsf{A}_{ix}^{(\nu)}) \\
(\mathsf{A}_{ix}^{(\nu+1)})(\mathsf{A}_{ix}^{(\nu)})(\mathsf{A}_{ix}^{(\nu+1)})^{-1} & \text{,, \quad ,, \quad ,,} & (\mathsf{A}_{ix}^{(\nu+1)})
\end{array}\right.
\end{array}\right\} (\nu = 1, 2, \cdots, \sigma)$$

als Fundamentaloperationen komponiert sind. Wir bezeichnen diese Gesamtheit durch $H$. — Nunmehr bilden wir uns für eine bestimmte Lage der Verzweigungspunkte $a_1, \ldots, a_\sigma$ und der Schnitte $l_1, \ldots, l_\sigma$ diejenigen Riemannschen Probleme, die wir erhalten, wenn wir an den Schnitten $l_1, \ldots, l_\sigma$ der Reihe nach die in der Gesamtheit $H$ enthaltenen Systeme von Fundamentalsubstitutionen vorschreiben, wobei aber der Anfangspunkt $x_0$ fest ist, und die Wurzeln der determinierenden Fundamentalgleichungen als bestimmte Determinationen der Ausdrücke (13) stets in derselben Weise fixiert werden mögen. Die zu diesen verschiedenen Riemannschen Problemen gehörigen Residuen $A_{ix}^{(\mu)}$ und Integralmatrizen $(y_{ix})$ gehen dann durch Monodromie der Verzweigungspunkte $a_1, \ldots, a_\sigma$ auseinander hervor. Wenn die von den $a_1, \ldots, a_\sigma$ beschriebenen Wege so beschaffen sind, daß der Integrationsweg der Matrix $(y_{ix})$ keine Änderung erfährt, so geht diese Integralmatrix immer wieder in eine solche über, die sich innerhalb der durch die $l_1, \ldots, l_\sigma$ zerschnittenen Fläche im Punkte $x_0$ auf $(\delta_{ix})$ reduziert. Bei solchen Wegen der $a_1, \ldots, a_\sigma$, die den Integrationsweg von $(y_{ix})$ modifizieren, wird $(y_{ix})$, abgesehen davon, daß es in die zu einem anderen Riemannschen Probleme gehörige Integralmatrix übergeht, noch von links her mit einer Substitution der Gruppe $G$ komponiert. Diese

Substitution wird dadurch bestimmt, daß man zusieht, in welcher Reihenfolge der neue Integrationsweg die Schnitte $l_1, \ldots, l_\sigma$ überschreitet.

Wir haben also die folgenden Theoreme:

1. Die zu den gedachten Riemannschen Problemen gehörigen $A_{ix}^{(\nu)}$ bezw. $y_{ix}$ konstituieren ein monogenes Funktionssystem der Variabeln $a_1, \ldots, a_\sigma$ bezw. $x, a_1, \ldots, a_\sigma$, das in der Umgebung jedes Systems endlicher und voneinander sowie von $x_0$ verschiedener Werte der gedachten Variabeln holomorph ist.

Und mit Rücksicht auf die in der vorigen Vorlesung (S. 301) in bezug auf die Gesamtheit $H$ gemachte Bemerkung:

2. Die Aufgabe der Bestimmung eines schlechthin kanonischen Differentialsystems (A) mit den Verzweigungspunkten $a_1, \ldots, a_\sigma$, für das die der Integralmatrix $(y_{ix})$ entsprechende Monodromiegruppe die von den $a_1, \ldots, a_\sigma$ unabhängige Gruppe $G$ ist und die Wurzeln der determinierenden Fundamentalgleichungen fixiert sind, ist ein irreduzibles Problem in dem Sinne, daß seine Lösungen durch analytische Fortsetzung auseinander hervorgehen.

Aus der Gesamtheit $H$ kann man diejenige Gesamtheit aussondern, die der Monodromie der einzelnen Punkte $a_1, \ldots, a_\sigma$ entspricht, und aus dieser letzteren Gesamtheit wieder diejenige, die dadurch entsteht, daß man nur einen der Verzweigungspunkte, etwa $a_\lambda$, als variabel betrachtet und diesen geschlossene Umläufe vollziehen läßt. Die Änderungen der $(A_{ix}^{(\nu)})$, die Umläufen von $a_\lambda$ um die Punkte $a_h (h \neq \lambda)$ entsprechen, können leicht aus der Figur 5 (S. 310) abgelesen werden, indem man von $x_0$ aus die einfachen Schleifen legt, die die ursprünglichen Schnitte $l_1, \ldots, l_\sigma$ einmal überschreiten, und zusieht, in welcher Reihenfolge diese Schleifen die neuen Schnitte, an denen jetzt die Integralmatrix die Substitutionen $(A_{ix}^{(1)}), \ldots, (A_{ix}^{(\sigma)})$ erfährt, überschreiten.*)

Wir bemerken nur noch, daß ein Teil der hier gewonnenen Ergebnisse auch in dem Falle gilt, wo die $A_{ix}^{(\nu)}$ als eindeutige Funktionen der variabeln unter den $a_1, \ldots, a_\sigma$ vorausgesetzt werden.

* * *

Es mögen nun noch einige analytische Entwickelungen vorgeführt werden, die sich auf das Fuchssche Problem beziehen, und die geeignet

*) Man erhält natürlich die Umkehrung der für das dualistische Problem 1. gefundenen Formeln (S. 311).



sind, die Bedeutung dieses Problems bezw. der durch dasselbe definierten Funktionssysteme $A_{i\varkappa}^{(\nu)}$ und $y_{i\varkappa}$ für die Theorie der Differentialgleichungen ins rechte Licht zu setzen.

Wir gehen wieder von denselben Voraussetzungen aus wie auf S. 314, betrachten also $a_\lambda$ allein als variabel und die $\mathsf{A}_{i\varkappa}^{(\nu)}$ als von $a_\lambda$ unabhängige Größen.

Das Verfahren, nach dem die zu einem Verzweigungspunkte

$$a_\nu \qquad (\nu = 1, 2, \cdots, \sigma + 1;\ a_{\sigma+1} = \infty)$$

gehörige kanonische Integralmatrix $(\eta_{i\varkappa}^{(\nu)})$ des Differentialsystems (A) herzustellen ist, besteht im folgenden. Aus den Gleichungen

$$(23) \qquad \sum_{\alpha=1}^{n} (\mathsf{A}_{i\alpha}^{(\nu)} - \delta_{i\alpha}\omega_{\varkappa}^{(\nu)}) c_{\alpha\varkappa}^{(\nu)} = 0 \qquad (i, \varkappa = 1, 2, \cdots, n)$$

berechnen wir die Verhältnisse

$$(24) \qquad c_{1\varkappa}^{(\nu)} : c_{2\varkappa}^{(\nu)} : \cdots : c_{n\varkappa}^{(\nu)}; \qquad (\varkappa = 1, 2, \cdots, n)$$

dann ist

$$(25) \qquad (\eta_{i\varkappa}^{(\nu)}) = (c_{i\varkappa}^{(\nu)})^{-1}(y_{i\varkappa}),$$

und wir haben in der Umgebung von $x = a_\nu$ die Darstellung

$$(26) \qquad \eta_{i\varkappa}^{(\nu)} = (x - a_\nu)^{r_i^{(\nu)}} \varphi_{i\varkappa}^{(\nu)}(x), \qquad (i, \varkappa = 1, 2, \cdots, n)$$

wo die $\varphi_{i\varkappa}^{(\nu)}(x)$ in der Umgebung von $x = a_\nu$ holomorph sind und die Determinante $|\varphi_{i\varkappa}^{(\nu)}(x)|$ für $x = a_\nu$ einen von Null verschiedenen Wert besitzt. Für $\nu = \sigma + 1$ ist natürlich $\frac{1}{x}$ an die Stelle von $x - a_{\sigma+1}$ zu setzen; die gleiche Bemerkung gilt auch für das Folgende.

Aus den Gleichungen (23) ergeben sich die Verhältnisse (24) als von dem Parameter $a_\lambda$ unabhängige Größen; wenn wir die noch willkürlichen Proportionalitätsfaktoren gleichfalls von $a_\lambda$ unabhängig wählen, so sind also die $c_{i\varkappa}^{(\nu)}$ selbst von $a_\lambda$ unabhängig. D. h., wenn die Fundamentalsubstitutionen $(\mathsf{A}_{i\varkappa})$ von dem Parameter $a_\lambda$ unabhängig sind, so können auch die Übergangssubstitutionen $(c_{i\varkappa}^{(\nu)})$, für die

$$(25\text{a}) \qquad (y_{i\varkappa}) = (c_{i\varkappa}^{(\nu)})(\eta_{i\varkappa}^{(\nu)})$$

ist, von $a_\lambda$ unabhängig gewählt werden. Daß die Wurzeln $r_i^{(\nu)}$ der determinierenden Fundamentalgleichungen von $a_\lambda$ unabhängig sind, wurde bereits oben betont.

Nun gilt aber offenbar auch das Umgekehrte, d. h. wenn bekannt ist, daß für $\nu = 1, 2, \cdots, \sigma + 1$ einerseits die $r_i^{(\nu)}$ von dem Parameter $a_\lambda$ unabhängig sind, andererseits die $(c_{i\varkappa}^{(\nu)})$ von $a_\lambda$ unabhängig gewählt werden können, so sind auch die Fundamentalsubstitutionen $(\mathsf{A}_{i\varkappa}^{(\nu)})$ von $a_\lambda$ unabhängig. In der Tat ist nach (23)

$$(27)\qquad (\mathsf{A}_{i\varkappa}^{(\nu)}) = (c_{i\varkappa}^{(\nu)})(e^{2\pi\sqrt{-1}\, r_i^{(\nu)}}\delta_{i\varkappa})(c_{i\varkappa}^{(\nu)})^{-1}.$$

Wir betrachten nun eine endliche Stelle $a_\lambda^{(0)}$ von $a_\lambda$, die von $x_0$ und den übrigen $a_k (h \neq \lambda)$ verschieden ist; dann sind in der Umgebung von $a_\lambda = a_\lambda^{(0)}$ die Residuen $A_{i\varkappa}^{(\nu)}$ und für $x \neq a_\nu$ auch die $y_{i\varkappa}$ holomorph.

Wir können uns also die derivierte Matrix von $(y_{i\varkappa})$ nach dem Parameter $a_\lambda$ bilden.

Es werde

$$(28)\qquad D_{a_\lambda}(y_{i\varkappa}) = (y_{i\varkappa})^{-1}\left(\frac{\partial y_{i\varkappa}}{\partial a_\lambda}\right) = (b_{i\varkappa}^{(\lambda)})$$

gesetzt, und wir wollen zunächst die $b_{i\varkappa}^{(\lambda)}$ als Funktionen von $x$ zu charakterisieren suchen.

In der Umgebung von $x = a_\lambda$ erhalten wir, wenn wir für $y_{i\varkappa}$ die Darstellungen einsetzen, die sich aus (25a) und (26) ergeben:

$$(b_{i\varkappa}^{(\lambda)}) = (\varphi_{i\varkappa}^{(\lambda)})^{-1}((x - a_\lambda)^{-r_i^{(\lambda)}}\delta_{i\varkappa})(c_{i\varkappa}^{(\lambda)})^{-1}$$
$$\cdot (c_{i\varkappa}^{(\lambda)})\left(\left(- r_i^{(\lambda)}(x - a_\lambda)^{r_i^{(\lambda)}-1}\delta_{i\varkappa}\right)(\varphi_{i\varkappa}^{(\lambda)}) + ((x - a)^{r_i^{(\lambda)}}\delta_{i\varkappa})\left(\frac{\partial \varphi_{i\varkappa}^{(\lambda)}}{\partial a_\lambda}\right)\right),$$

mithin

$$(29)\qquad (b_{i\varkappa}^{(\lambda)}) = (\varphi_{i\varkappa}^{(\lambda)})^{-1}\left(\frac{- r_i^{(\lambda)}\delta_{i\varkappa}}{x - a_\lambda}\right)(\varphi_{i\varkappa}^{(\lambda)}) + (\varphi_{i\varkappa}^{(\lambda)})^{-1}\left(\frac{\partial \varphi_{i\varkappa}^{(\lambda)}}{\partial a_\lambda}\right).$$

Die Elemente der Matrizen

$$(\varphi_{i\varkappa}^{(\lambda)}),\ (\varphi_{i\varkappa}^{(\lambda)})^{-1},\ \left(\frac{\partial \varphi_{i\varkappa}}{\partial a_\lambda}\right)$$

sind in der Umgebung von $x = a_\lambda$ holomorphe Funktionen von $x$, die $b_{i\varkappa}^{(\lambda)}$ besitzen also in $x = a_\lambda$ einen Pol erster Ordnung. Zufolge der Gleichung (11) der fünfzehnten Vorlesung (S. 270) ist

$$(\varphi_{i\nu}^{(\lambda)})^{-1}(r_i^{(\lambda)}\delta_{i\varkappa})(\varphi_{i\varkappa}^{(\lambda)}) = (A_{i\varkappa}^{(\lambda)}),$$

wir finden also, indem wir in (29) beiderseits mit $x - a_\lambda$ multiplizieren und dann $x = a_\lambda$ setzen,

$$\mathrm{Res}_{a_\lambda} b_{i\varkappa}^{(\lambda)} = - A_{i\varkappa}^{(\lambda)}.$$

Die Ausdrücke

$$b^{(\lambda)}_{i\varkappa} + \frac{A^{(\lambda)}_{i\varkappa}}{x - a_\lambda} = B^{(\lambda)}_{i\varkappa} \tag{30}$$

sind folglich in der Umgebung von $x = a_\lambda$ holomorphe Funktionen von $x$.

In der Umgebung einer Stelle $a_\nu$, wo $\nu$ eine von $\lambda$ verschiedene der Zahlen $1, 2, \ldots, \sigma + 1$ bedeutet, haben wir:

$$(b^{(\lambda)}_{i\varkappa}) = (\varphi^{(\nu)}_{i\varkappa})^{-1}((x - a_\nu)^{-r^{(\nu)}_i}\delta_{i\varkappa})(c^{(\nu)}_{i\varkappa})^{-1} \cdot (c^{(\nu)}_{i\varkappa})((x-a)^{r^{(\nu)}_i}\delta_{i\varkappa})\left(\frac{\partial \varphi^{(\nu)}_{i\varkappa}}{\partial a_\lambda}\right),$$

mithin

$$(b^{(\lambda)}_{i\varkappa}) = (\varphi^{(\nu)}_{i\varkappa})^{-1}\left(\frac{\partial \varphi^{(\nu)}_{i\varkappa}}{\partial a_\lambda}\right);$$

in dieser Umgebung sind also die $b^{(\lambda)}_{i\varkappa}$ holomorphe Funktionen von $x$. Da die $b^{(\lambda)}_{i\varkappa}$ in der Umgebung eines regulären $x$-Wertes offenbar holomorph sind, so sind die Ausdrücke $B^{(\lambda)}_{i\varkappa}$ in der Umgebung eines jeden endlichen Wertes von $x$ und in der Umgebung von $x = \infty$ holomorph; die $B^{(\lambda)}_{i\varkappa}$ sind demnach von $x$ unabhängig.

Die Gleichungen (28) und (30) liefern

$$\left(\frac{\partial y_{i\varkappa}}{\partial a_\lambda}\right) = (y_{i\varkappa})\left(-\frac{A^{(\lambda)}_{i\varkappa}}{x - a_\lambda} + B^{(\lambda)}_{i\varkappa}\right), \tag{31}$$

wo jetzt die $A^{(\lambda)}_{i\varkappa}$, $B^{(\lambda)}_{i\varkappa}$ bloße Funktionen von $a_\lambda$ sind. Aus den Gleichungen (31) folgt der von Fuchs (1888) aufgestellte Satz:

Wenn die zu der Integralmatrix $(y_{i\varkappa})$ gehörige Monodromiegruppe $G$ von dem Parameter $a_\lambda$ unabhängig ist, so gehört die Matrix der nach $a_\lambda$ genommenen Derivierten der $y_{i\varkappa}$ mit $(y_{i\varkappa})$ zu derselben Klasse.

Zufolge der Gleichungen (31) konstituieren die $y_{i\varkappa}$ eine Integralmatrix des homogenen linearen Differentialsystems mit der unabhängigen Variabeln $a_\lambda$

$$\frac{dy_\varkappa}{da_\lambda} = \sum_{\mu=1}^{n} y_\mu \left(B^{(\lambda)}_{\mu\varkappa} - \frac{A^{(\lambda)}_{\mu\varkappa}}{x - a_\lambda}\right). \qquad (\varkappa = 1, 2, \ldots, n) \tag{32}$$

Indem wir diese Tatsache mit der andern in Verbindung setzen, wonach die $y_{i\varkappa}$ eine Integralmatrix des Differentialsystems (A) mit der unab-

hängigen Variabeln $x$ bilden, können wir schließen, daß die Koeffizientenmatrizen

$$(33)\qquad \begin{cases} (b_{ix}^{(\lambda)}) = \left(B_{ix}^{(\lambda)} - \dfrac{A_{ix}^{(\lambda)}}{x - a_\lambda}\right), \\ (a_{ix}) = \left(\sum_{\nu=1}^{\sigma} \dfrac{A_{ix}^{(\nu)}}{x - a_\nu}\right) \end{cases}$$

der simultanen partiellen Differentialsysteme (32) und (A) den in der vierten Vorlesung (S. 53, 54) aufgestellten Integrabilitätsbedingungen (C) Genüge leisten müssen. Wir haben also die Identität:

$$(34)\qquad \left(\frac{\partial a_{ix}}{\partial a_\lambda}\right) + (b_{ix}^{(\lambda)})(a_{ix}) = \left(\frac{\partial b_{ix}^{(\lambda)}}{\partial x}\right) + (a_{ix})(b_{ix}^{(\lambda)}).$$

Setzen wir in dieser die Ausdrücke (33) ein, so heben sich diejenigen Glieder, die $(x - a_\lambda)^2$ im Nenner haben, weg, und wir erhalten

$$(35)\qquad \begin{cases} \sum_{\nu=1}^{\sigma} \left(\dfrac{dA_{ix}^{(\nu)}}{da_\lambda} \dfrac{1}{x - a_\nu}\right) + (B_{ix}^{(\lambda)}) \left(\sum_{\nu=1}^{\sigma} \dfrac{A_{ix}^{(\nu)}}{x - a_\nu}\right) - \left(\sum_{\nu=1}^{\sigma} \dfrac{A_{ix}^{(\nu)}}{x - a_\nu}\right)(B_{ix}^{(\lambda)}) \\ \quad - \sum_{\nu \neq \lambda} \dfrac{(A_{ix}^{(\lambda)})(A_{ix}^{(\nu)}) - (A_{ix}^{(\nu)})(A_{ix}^{(\lambda)})}{(x - a_\lambda)(x - a_\nu)} = (0).^{*)} \end{cases}$$

Indem wir noch die Glieder, die $(x - a_\lambda)(x - a_\nu)$ im Nenner haben, nach der Formel

$$\frac{1}{(x - a_\nu)(x - a_\lambda)} = \frac{1}{a_\lambda - a_\nu} \frac{1}{x - a_\lambda} + \frac{1}{a_\nu - a_\lambda} \frac{1}{x - a_\nu}$$

zerlegen, nimmt die Gleichung (35) die Form

$$\sum_{\nu=1}^{\sigma} \frac{(M_{ix}^{(\nu)})}{x - a_\nu} = (0)$$

an, wo die $(M_{ix}^{(\nu)})$ von $x$ unabhängige Matrizen bedeuten. Diese Matrizen müssen sich folglich einzeln auf (0) reduzieren. Die Ausführung der angedeuteten Rechnung liefert $\sigma$ Matrizengleichungen, die wir der Deutlichkeit zuliebe gleich in expliziter Form hinschreiben wollen:

---

*) Die durch $\sum\limits_{\nu \neq \lambda}$ angedeutete Summation bezieht sich auf die von $\lambda$ verschiedenen Werte $\nu = 1, 2, \cdots, \sigma$.

$$(36)\begin{cases} \dfrac{dA_{i\varkappa}^{(\lambda)}}{da_\lambda} = \sum_{\mathfrak{a}=1}^{n}\left(\sum_{\nu \neq \lambda} \dfrac{A_{i\mathfrak{a}}^{(\lambda)}A_{\mathfrak{a}\varkappa}^{(\nu)} - A_{i\mathfrak{a}}^{(\nu)}A_{\mathfrak{a}\varkappa}^{(\lambda)}}{a_\lambda - a_\nu} + B_{i\mathfrak{a}}^{(\lambda)}A_{\mathfrak{a}\varkappa}^{(\lambda)} - A_{i\mathfrak{a}}^{(\lambda)}B_{\mathfrak{a}\varkappa}^{(\lambda)}\right), \\ \dfrac{dA_{i\varkappa}^{(\nu)}}{da_\lambda} = \sum_{\mathfrak{a}=1}^{n}\left(\dfrac{A_{i\mathfrak{a}}^{(\lambda)}A_{\mathfrak{a}\varkappa}^{(\nu)} - A_{i\mathfrak{a}}^{(\nu)}A_{\mathfrak{a}\varkappa}^{(\lambda)}}{a_\nu - a_\lambda} + B_{i\mathfrak{a}}^{(\lambda)}A_{\mathfrak{a}\varkappa}^{(\nu)} - A_{i\mathfrak{a}}^{(\nu)}B_{\mathfrak{a}\varkappa}^{(\lambda)}\right). \\ \qquad (\nu = 1, \cdots, \lambda - 1, \lambda + 1, \cdots, \sigma) \end{cases}$$

Diese Gleichungen liefern die **notwendigen und hinreichenden** Bedingungen dafür, daß die Fundamentalsubstitutionen der Integralmatrix $(y_{i\varkappa})$ des Differentialsystems (A) von dem Parameter $a_\lambda$ unabhängig sind.

Die Gleichungen (36) sind in den $B_{i\varkappa}^{(\lambda)}$ linear. Wir behaupten, daß sich **im allgemeinen** diese Größen aus den gedachten Gleichungen **in eindeutiger Weise** bestimmen lassen. — In der Tat, seien

$$B_{i\varkappa}^{(\lambda)},\ \bar{B}_{i\varkappa}^{(\lambda)}$$

zwei verschiedene Wertesysteme der Größen $B_{i\varkappa}^{(\lambda)}$, die den Gleichungen (36) und folglich auch den Gleichungen (35) Genüge leisten; dann zeigen die letzteren Gleichungen unmittelbar, daß für die Differenzen

$$B_{i\varkappa}^{(\lambda)} - \bar{B}_{i\varkappa}^{(\lambda)} = B_{i\varkappa}$$

die Gleichung

$$(37)\qquad (B_{i\varkappa})(a_{i\varkappa}) = (a_{i\varkappa})(B_{i\varkappa})$$

erfüllt ist. Die Koeffizientenmatrix $(a_{i\varkappa})$ des Differentialsystems (A) ist also mit der von $x$ unabhängigen Matrix $(B_{i\varkappa})$ **vertauschbar**.

Bedeutet nun $y_1, \ldots, y_n$ irgendein Lösungssystem des Differentialsystems (A), d. h. ist

$$\frac{dy_\varkappa}{dx} = \sum_{\mathfrak{a}=1}^{n} y_\mathfrak{a} a_{\mathfrak{a}\varkappa}, \qquad (\varkappa = 1, 2, \cdots, n)$$

und setzen wir

$$z_\varkappa = \sum_{\mathfrak{b}=1}^{n} y_\mathfrak{b} B_{\mathfrak{b}\varkappa}, \qquad (\varkappa = 1, 2, \ldots, n)$$

so ist

$$\frac{dz_\varkappa}{dx} = \sum_{\mathfrak{b}=1}^{n}\sum_{\mathfrak{a}=1}^{n} y_\mathfrak{a} a_{\mathfrak{a}\mathfrak{b}} B_{\mathfrak{b}\varkappa},$$

also mit Rücksicht auf (37)

$$\frac{dz_x}{dx} = \sum_{\mathfrak{b}=1}^{n} \sum_{\mathfrak{a}=1}^{n} y_{\mathfrak{a}} B_{\mathfrak{a}\mathfrak{b}} a_{\mathfrak{b}x} = \sum_{\mathfrak{b}=1}^{n} z_{\mathfrak{b}} a_{\mathfrak{b}x}.$$

Die $z_1, \ldots, z_n$ bilden folglich ein Lösungssystem von (A); das letztere Differentialsystem wäre demnach gemäß dem Frobeniusschen Satze (S. 117) reduzibel. — Wenn wir also das Differentialsystem (A), d. h. die aus den Fundamentalsubstitutionen $(A_{ix}^{(\nu)})$ komponierte Gruppe $G$, als irreduzibel voraussetzen, so ergeben sich die $B_{ix}^{(\nu)}$ aus den Gleichungen (36) sicher in eindeutiger Weise, und folglich als rationale Ausdrücke in den

$$A_{ix}^{(\nu)}, \quad \frac{dA_{ix}^{(\nu)}}{da_\lambda}, \quad a_1, \ldots, a_\sigma. \quad (i, x = 1, 2, \cdots, n;\ \nu = 1, 2, \cdots, \sigma)$$

Wir haben also den Satz:

Wenn das Differentialsystem (A) irreduzibel ist, so sind die Koeffizienten des linearen Differentialsystems (32), dem die $y_{ix}$ als Funktionen von $a_\lambda$ genügen, rational in $x$, $a_\lambda$, den Residuen $A_{ix}^{(\nu)}$ und ihren Derivierten nach $a_\lambda$.

Wenn z. B. die Residuen $A_{ix}^{(\nu)}$ eindeutige Funktionen von $a_\lambda$ sind, so sind demzufolge auch die Koeffizienten des Differentialsystems (32) eindeutig in $a_\lambda$. Diesen speziellen Fall des eben abgeleiteten Satzes hat schon Fuchs (1891) ausgesprochen.

* * *

Da wir die $y_{ix}$ jetzt als Funktionen der beiden voneinander unabhängigen Variabeln $x$, $a_\lambda$ betrachten, so impliziert die den $y_{ix}$ auferlegte Anfangsbedingung, wonach sich die Matrix $(y_{ix})$ für $x = x_0$ auf die Einheitsmatrix reduzieren soll, eine gewisse Asymmetrie. Um diese zu beseitigen, verfahren wir wie folgt.

Es sei $a_\lambda^{(0)}$ ein von $x_0$ und den übrigen $a_h (h \neq \lambda)$ verschiedener endlicher Wert; dann sind die $A_{ix}^{(\nu)}$ ebenso wie die $y_{ix}$ und folglich auch die Derivierten der letzteren Größen nach $a_\lambda$ in der Umgebung von $a_\lambda^{(0)}$ holomorphe Funktionen von $a_\lambda$. Zufolge der Gleichungen (31) sind also auch die $B_{ix}^{(\lambda)}$ in der Umgebung von $a_\lambda^{(0)}$ holomorph; wir können folglich für das homogene lineare Differentialsystem

(38)
$$\frac{d\alpha_\varkappa}{da_\lambda} = \sum_{\mu=1}^{n} \alpha_\mu B_{\mu\varkappa}^{(\lambda)} \qquad (\varkappa = 1, 2, \cdots, n)$$

eine Integralmatrix $(\alpha_{i\varkappa})$ bestimmen, die sich für $a_\lambda = a_\lambda^{(0)}$ auf die Einheitsmatrix $(\delta_{i\varkappa})$ reduziert. Setzen wir dann

(39)
$$(y_{i\varkappa})(\alpha_{i\varkappa})^{-1} = (\mathfrak{y}_{i\varkappa}),$$

(40)
$$(\alpha_{i\varkappa})(A_{i\varkappa}^{(\nu)})(\alpha_{i\varkappa})^{-1} = (\mathfrak{A}_{i\varkappa}^{(\nu)}), \qquad (\nu = 1, 2, \cdots, \sigma)$$

so konstituieren die $\mathfrak{y}_{i\varkappa}$ in ihrer Abhängigkeit von $x$ eine Integralmatrix des schlechthin kanonischen Differentialsystems

(A')
$$\frac{d\mathfrak{y}_\varkappa}{dx} = \sum_{\mu=1}^{n} \mathfrak{y}_\mu \sum_{\nu=1}^{\sigma} \frac{\mathfrak{A}_{\mu\varkappa}^{(\nu)}}{x - a_\nu}. \qquad (\varkappa = 1, 2, \cdots, \sigma)$$

Wir bilden ferner die derivierte Matrix von $(\mathfrak{y}_{i\varkappa})$ in bezug auf $a_\lambda$. Es ergibt sich nach der Derivationsregel (IV) (S. 26)

(41)
$$D_{a_\lambda}(\mathfrak{y}_{i\varkappa}) = (\alpha_{i\varkappa}) \cdot D_{a_\lambda}(y_{i\varkappa}) \cdot (\alpha_{i\varkappa})^{-1} + D_{a_\lambda}(\alpha_{i\varkappa})^{-1};$$

nun ist aber nach der Derivationsregel (VI) (S. 28)

$$D_{a_\lambda}(\alpha_{i\varkappa})^{-1} = -(\alpha_{i\varkappa}) \cdot D_{a_\lambda}(\alpha_{i\varkappa}) \cdot (\alpha_{i\varkappa})^{-1},$$

also, da $(\alpha_{i\varkappa})$ eine Integralmatrix von (38) ist,

$$D_{a_\lambda}(\alpha_{i\varkappa})^{-1} = -(\alpha_{i\varkappa})(B_{i\varkappa}^{(\lambda)})(\alpha_{i\varkappa})^{-1}.$$

Setzen wir dies in (41) ein und beachten, daß nach (31)

$$D_{a_\lambda}(y_{i\varkappa}) = \left(-\frac{A_{i\varkappa}^{(\lambda)}}{x - a_\lambda} + B_{i\varkappa}^{(\lambda)}\right)$$

ist, so ergibt sich mit Rücksicht auf (40)

$$D_{a_\lambda}(\mathfrak{y}_{i\varkappa}) = \left(-\frac{\mathfrak{A}_{i\varkappa}^{(\lambda)}}{x - a_\lambda}\right);$$

die $\mathfrak{y}_{i\varkappa}$ konstituieren folglich in ihrer Abhängigkeit von $a_\lambda$ eine Integralmatrix des Differentialsystems

($\mathfrak{A}$)
$$\frac{d\mathfrak{y}_\varkappa}{da_\lambda} = \sum_{\mu=1}^{n} \mathfrak{y}_\mu \frac{\mathfrak{A}_{\mu\varkappa}^{(\lambda)}}{a_\lambda - x}.$$

Die gemeinsame Integralmatrix $(\mathfrak{y}_{i\varkappa})$ der simultanen partiellen Differentialsysteme (A′) und $(\mathfrak{A})$ genügt nunmehr den in $x$ und $a_\lambda$ völlig symmetrischen Anfangsbedingungen

$$\lim_{\substack{x = x_0 \\ a_\lambda = a_\lambda^{(0)}}} \mathfrak{y}_{i\varkappa} = \delta_{i\varkappa},$$

im übrigen hat das Differentialsystem (A′) die Eigenschaft, daß seine zu der Integralmatrix $(\mathfrak{y}_{i\varkappa})$ gehörige Monodromiegruppe $G$ von $a_\lambda$ unabhängig ist. In der Tat erleiden die $\mathfrak{y}_{i\varkappa}$ bei jedem Umlaufe von $x$ dieselbe lineare Substitution wie die $y_{i\varkappa}$. Wir können also alles, was in bezug auf das Differentialsystem (A) bewiesen worden ist, unmittelbar auf das System (A′) übertragen. Nur in einem Punkte zeigt sich ein wesentlicher Unterschied, nämlich in der Art, wie die Fundamentalsubstitutionen $(\mathsf{A}^{(\nu)}_{i\varkappa})$ von den Residuen $\mathfrak{A}^{(\nu)}_{i\varkappa}$ des Systems (A′) abhängen. Die $\mathfrak{y}_{i\varkappa}$ sind nämlich zufolge des Poincaréschen Satzes der vierzehnten Vorlesung ganze transzendente Funktionen der $\mathfrak{A}^{(\nu)}_{i\varkappa}$; da sich aber $(\mathfrak{y}_{i\varkappa})$ für $x = x_0$ nicht auf $(\delta_{i\varkappa})$ reduziert, so ergeben sich die $\mathsf{A}^{(\nu)}_{i\varkappa}$ jetzt nicht mehr als ganze transzendente Funktionen der $\mathfrak{A}^{(\nu)}_{i\varkappa}$; sondern als Quotienten von ganzen transzendenten Funktionen mit einem gemeinsamen Nenner. Wir bezeichnen diese eindeutigen Funktionen der $\mathfrak{A}^{(\nu)}_{i\varkappa}$, die in wohlbestimmter Weise von $a_\lambda$ abhängen, durch

$$\mathsf{A}^{(\nu)}_{i\varkappa} = \mathfrak{E}^{(\nu)}_{i\varkappa}(\mathfrak{A}^{(1)}_{11}, \ldots, \mathfrak{A}^{(\sigma)}_{nn};\, a_\lambda). \tag{41}$$

Bilden wir uns jetzt die den Gleichungen (36) analogen Gleichungen für die Systeme (A′) und $(\mathfrak{A})$, so lauten diese:

$$\left\{\begin{aligned} \frac{d\mathfrak{A}^{(\lambda)}_{i\varkappa}}{da_\lambda} &= \sum_{\alpha=1}^{n} \sum_{\nu \neq \lambda} \frac{\mathfrak{A}^{(\lambda)}_{i\alpha}\mathfrak{A}^{(\nu)}_{\alpha\varkappa} - \mathfrak{A}^{(\nu)}_{i\alpha}\mathfrak{A}^{(\lambda)}_{\alpha\varkappa}}{a_\lambda - a_\nu}, \\ \frac{d\mathfrak{A}^{(\nu)}_{i\varkappa}}{da_\lambda} &= \sum_{\alpha=1}^{n} \frac{\mathfrak{A}^{(\lambda)}_{i\alpha}\mathfrak{A}^{(\nu)}_{\alpha\varkappa} - \mathfrak{A}^{(\nu)}_{i\alpha}\mathfrak{A}^{(\lambda)}_{\alpha\varkappa}}{a_\nu - a_\lambda}, \\ &\qquad (\nu = 1, 2, \ldots, \lambda - 1, \lambda + 1, \ldots, \sigma) \end{aligned}\right. \tag{42}$$

sie liefern also ein System gewöhnlicher Differentialgleichungen zweiten Grades für die Residuen $\mathfrak{A}^{(\nu)}_{i\varkappa}$ $(\nu = 1, 2, \ldots, \sigma)$ des Differentialsystems (A′) als Funktionen von $a_\lambda$. Für dieses bemerkenswerte System von Differentialgleichungen — das natürlich wieder die notwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür darstellt, daß die zu

einer Integralmatrix $(\mathfrak{y}_{i\varkappa})$ von (A') gehörige Monodromiegruppe von $a_\lambda$ unabhängig sei — können wir sofort eine Anzahl **algebraischer Integralgleichungen** angeben.

Zunächst ergibt sich durch Addition

$$\sum_{\nu=1}^{\sigma} \frac{d\,\mathfrak{A}_{i\varkappa}^{(\nu)}}{d\,a_\lambda} = 0,$$

also

$$(43) \qquad \sum_{\nu=1}^{\sigma} \mathfrak{A}_{i\varkappa}^{(\nu)} = -\,\mathfrak{A}_{i\varkappa}^{(\sigma+1)}, \qquad (i,\varkappa = 1, 2, \cdots, n)$$

wo die $\mathfrak{A}_{i\varkappa}^{(\sigma+1)}$ Integrationskonstanten bedeuten. Es sind also für das System (A') die Elemente der zu $x = \infty$ gehörigen Residuenmatrix von $a_\lambda$ unabhängig.

Ferner wissen wir, daß die Wurzeln der zu den Punkten $a_1, \ldots a_\sigma, \infty$ gehörigen **determinierenden Fundamentalgleichungen** des Differentialsystems (A') — die vermöge der Gleichungen (40) mit denen des Differentialsystems (A) übereinstimmen — von $a_\lambda$ unabhängig sind. Es sind also — wie übrigens durch einfache Rechnung auch direkt an dem Differentialsysteme (42) verifiziert werden kann — die Wurzeln $r_1^{(\nu)}, \ldots, r_n^{(\nu)}$ der Gleichungen

$$(44) \qquad \left| \mathfrak{A}_{i\varkappa}^{(\nu)} - \delta_{i\varkappa} r \right| = 0 \qquad (\nu = 1, 2, \cdots, \sigma+1)$$
$$(i,\varkappa = 1, 2, \cdots, n)$$

ebenfalls Integrationskonstanten. Dies gibt $n\sigma$, von den $n^2$ Integralgleichungen (43) unabhängige, algebraische Integralgleichungen des Systems (42).*)

Die allgemeinen Integralgleichungen des Differentialsystems (42) werden durch die Gleichungen (41) gegeben, in denen die $\mathsf{A}_{i\varkappa}^{(\nu)}$ Integrationskonstanten bedeuten.

Für das durch die Gleichungen (40) definierte partikulare Lösungssystem des Differentialsystems (42) wissen wir, daß seine Elemente $\mathfrak{A}_{i\varkappa}^{(\nu)}$ in der Umgebung von $a_\lambda = a_\lambda^{(0)}$ holomorph sind. Bezeichnen wir mit $\overline{\mathfrak{A}}_{i\varkappa}^{(\nu)}$ die Werte, die diese Funktionen $\mathfrak{A}_{i\varkappa}^{(\nu)}$ im Punkte $a_\lambda^{(0)}$ annehmen, so kann dieses Lösungssystem des Differentialsystems (42) entweder durch

---

*) Für $n = 2$, $\sigma = 3$ besteht das System (42) aus $n^2\sigma = 12$ Gleichungen für ebenso viele Unbekannte. Die Anzahl der algebraischen Integralgleichungen ist $n\sigma + n^2 = 10$; das System (42) kann also in diesem Falle auf eines von zwei Differentialgleichungen erster Ordnung reduziert werden. Dieses letztere System ist mit der Differentialgleichung zweiter Ordnung äquivalent, die **Richard Fuchs** in den Comptes Rendus t. 141 (1905) S. 555 aufgestellt hat.

seine Anfangswerte $\mathfrak{A}_{ix}^{(\nu)} = \overline{\mathfrak{A}}_{ix}^{(\nu)}$ im Punkte $a_\lambda = a_\lambda^{(0)}$ bestimmt werden, oder aber dadurch, daß wir in den Integralgleichungen (41) für die Integrationskonstanten $\mathsf{A}_{ix}^{(\nu)}$ die Elemente der vorgeschriebenen Fundamentalsubstitutionen nehmen und überdies die Wurzeln der Gleichungen (44) fixieren.

Wir können also sagen, daß die Integration des Differentialsystems (42), soweit wir uns auf solche Lösungssysteme beschränken, für deren Integrationskonstanten $\mathsf{A}_{ix}^{(\nu)}$ die Determinanten

$$|\mathsf{A}_{ix}^{(\nu)}| \qquad (\nu = 1, 2, \cdots \sigma)$$

von Null verschiedene Werte besitzen, durch das Fuchssche Problem als vollzogen gelten kann.

Man übersieht nun sofort, wie sich die Behandlung des Fuchsschen Problems weiter gestaltet, wenn man mehrere oder alle $a_1, \ldots, a_\sigma$ als variabel und die $\mathsf{A}_{ix}^{(\nu)}$ als von diesen unabhängige Größen betrachtet. — Von besonderer Wichtigkeit ist der Fall, wo die vorgeschriebenen Fundamentalsubstitutionen so beschaffen sind, daß sich die Residuen als eindeutige Funktionen der variabeln unter den $a_1, \ldots, a_\sigma$ ergeben; wir verweisen wegen dieser Frage auf eine Abhandlung des Verfassers.*)

In bezug auf das Differentialsystem (42) bemerken wir nur noch, daß die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß die $\mathfrak{A}_{ix}^{(\nu)}$ sich als von $a_\lambda$ unabhängige Konstanten ergeben, darin besteht, daß

$$(\mathfrak{A}_{ix}^{(\lambda)})(\mathfrak{A}_{ix}^{(\nu)}) - (\mathfrak{A}_{ix}^{(\nu)})(\mathfrak{A}_{ix}^{(\lambda)}) = (0), \qquad (\nu \neq \lambda)$$

d. h. daß $(\mathfrak{A}_{ix}^{(\lambda)})$ mit allen $(\mathfrak{A}_{ix}^{(\nu)})$ vertauschbar sei. Bezeichnen wir dann mit $(\mathfrak{z}_{ix})$ eine Integralmatrix des Differentialsystems

$$\frac{d\mathfrak{z}_x}{dx} = \sum_{\mu=1}^{n} \mathfrak{z}_\mu \sum_{\nu \neq \lambda} \frac{\mathfrak{A}_{\mu x}^{(\nu)}}{x - a_\nu}$$

und mit $(\eta_{ix})$ eine Integralmatrix des Cauchyschen Differentialsystems

$$\frac{d\eta_x}{dx} = \sum_{\mu=1}^{n} \eta_\mu \frac{\mathfrak{A}_{\mu x}^{(\lambda)}}{x - a_\lambda},$$

so liefert, wie man leicht verifiziert,

$$(\mathfrak{y}_{ix}) = (\mathfrak{z}_{ix})(\eta_{ix})$$

eine Integralmatrix des Differentialsystems (A′)

*) Crelles Journal Bd. 124, S. 292.

# Register.


Abel, N. H., 218, 219, 256, 278.
Adjungierte Differentialsysteme und Integralmatrizen 28, 32 ff., 295.
Ähnliche Matrizen 72, 132.
Änderung des Schnittsystems 83 ff.
Anfangswerte 4, 17, 289 ff.
Anormale Reihen 182.
Art 105, 221.
Asymptotische Darstellung 188 ff., 212, 251 ff.
Außerwesentlich singulärer Punkt 92, 216, 303.

Beke, E., 114.
Bendixson, I., 114.
Borel, E., 188.
Brodén, T., 300.

Calcul des limites 88 ff.
Caqué, J., 37.
Cauchy, A. L., 6, 41, 88, 89, 95, 100, 105, 132, 137—140, 145—148, 150, 155, 171, 172, 217, 230, 298, 330.
Cauchysches Differentialsystem 95.
Cauchysche Matrix 139, 146.
Charakteristische Gleichung 96, 133, 252; vergl. Fundamentalgleichung.
Cunningham, E., 182.

Derivationsregeln 26 ff.
Derivierte Matrix 26.
Determinante einer Matrix 18.
Determinierende Fundamentalgleichung 146.
— Matrix 146.
Differentialgleichung 1.
—, lineare, 1, 157.
Differentialsystem 2.
—, lineares, mit konstanten Koeffizienten 95 ff., 122 ff.
Differentialsystem zweiten Grades 328; vergl. Cauchysches, komplettes, totales, simultanes.

Differenzengleichung 4.
Differenzenrechnung 135.
Dini, U., 14, 267.
Diophant 298.
Doppelintegral 50.
Dualistische Probleme (konstanter Residuen und konstanter Substitutionen). 306.

Einheitsmatrix 18.
Elementarteiler 129.
Euler, L., 32.
Evident reduzible Systeme 108.
Existenz, der Integrale 3 ff., 76, 88 ff.

Fabry 181.
Fäden, als Schnitte 305.
Fejér, L., VII, 89.
Fredholm, I., 300.
Frobenius, G., 88, 119, 298, 326.
Frobeniusscher Satz 117.
Fuchs, L., V, VII, 36, 37, 88, 89, 102, 140, 142, 146, 159, 160, 176, 217, 218, 221—226, 235—238, 286, 292—296, 312, 313, 315, 320, 323, 326, 330.
Fuchssche Funktionen 286, 299.
Fuchssches Problem 312, 314 ff.
Fuchssche Relation 232.
Fuchssches Theorem 170.
Fuchsscher Typus 216 ff.
Fuchs, Richard, 329.
Fundamentalbereich 247.
Fundamentalgleichung 102, 133, 139; vergl. charakteristische Gleichung und determinierende Fundamentalgleichung.
Fundamentallemma 234.
Fundamentalsubstitutionen 71, 80.
Fundamentalsystem 159.

Gauß, C. F., 237, 304.
Gebrochene Linie 278.
Gesamtschwankung 9.

Geschlossene Integralmatrix 78, 81.
Gespaltene Matrix 77.
Goursat, E., 50.
Gruppe 71, 80, 85.
Günther, P., 240.

Hamburger, M., 117.
— A., 214, 267.
Hauptsystem 36.
Hauptklasse 229.
Heffter, L., VII, 50.
Hensel, K., 97, 154.
Hilbert, D., 300.
Hirsch, A., VII.
Holomorph 45, 78.
Homogenes Differentialsystem 2.
Horn, J., 149, 159, 175, 192, 214, 242, 266, 267.
Hurwitz, A., 306, 317.

Identität von Lagrange 33.
Infinitesimalkalkül der Matrizen 26.
Inhomogenes Differentialsystem 2; vergl. komplettes.
Integral, allgemeines, partikuläres 3.
Integralgleichung 1.
Integralgleichung, algebraische 329.
Integralmatrix 20, 23.
Integralmatrix längs einer Kurve 52.
Integralmatrix, komplexe 78 ff.
Integrationsregeln 28 ff.
Interpolationsverfahren 4 ff.
Invarianten der Art 222, 235.
Inverse Matrix 19.
Irreduzibilität 105 ff.

Jacobi, C. G. J., 21, 32, 91, 144, 147, 262.
Jacobische Gleichung 21.

Kanonische Form eines Differentialsystems 164.
Kanonische Form einer Matrix 100, 132.
Kanonische Integralmatrix 103.
Kellog, O. D., 300.
Klasse 219, 227.
Klein, F., 286, 304.
Kneser, A., 214, 267.
Knickpunkt 279.
Kogredienz 139, 220.
Kolonnenteiler 151.
Komplettes Differentialsystem 2, 36.
Komplexe Integralmatrix 79.
Komponierte Matrix 18.
Koenigsberger, L., VI, 159, 237.
Konstante Matrix 22.
Kontinuitäts-Methode 286 ff.
Kronecker, L., 97, 154.
Kurvenintegrale 48 ff.

Lagrange, J. L., 32—35, 53.
Λ-Funktionen 244 ff.
Landau, E., 118.
Landsberg, G., 154.
Laurent 92—94, 102, 138, 142, 143, 242, 251.
Legendre, A. M., 188.
Lineare Differentialsysteme 1 ff., 51.
Lineare Substitution 71.
Lipschitz, R., 6.
Loewy, A., VII, 104, 119, 121.
Lüroth, J., 14.

Mannigfaltigkeiten 286.
Matrizenkalkül 17 ff.
Mittag-Leffler, G., 278.
Monodromiegruppe 80, 301.
Monodromie einer Punktgruppe 306 ff.
Multiplikator 32 ff.

Nicht unbestimmt 142.
Neutrale Matrix 154.
Normalform 155.
Normalreihen und -integrale 181.

Ordnung einer Differentialgleichung 1.

Parameter, Abhängigkeit von einem 239 ff.
Parametrische Normalreihen 255.
Peano 37.
Picard, E., 186, 315.
Poincaré, H., 170, 181, 186, 188, 192, 193, 199, 214, 237—240, 243, 258, 286, 299, 300, 328.
Poincarésches Lemma 192, 196.
Pol 141 ff., 216.
Positiver Umlauf 68.
Potenz einer Matrix 18.
Pringsheim, A., 50.
Produkt von Matrizen 18.
Punkt der Unbestimmtheit 143, 216.

Quadratur 2, 36, 255.
Querschnitte 68.

Rang einer Matrix 97.
— eines Differentialsystems, einer Normalreihe 181.
Rationalitätsbereich 104.
Rechtecksatz 60.
Reduzibilität 105 ff.
Reduziertes Differentialsystem 36.

Rekursionsformel 87, 149, 172, 255.
Residuengleichung 172.
Residuenmatrix 148.
Riccati, J., 197—199.
Riccatische Systeme, Differentialgleichung 196.
Riemann, B., V, VI, 3, 47, 50, 66, 68, 218, 219, 227, 230, 231, 235, 237, 238, 250, 286—308, 312, 314—320.
Riemannsches Problem 229ff.
— — leichter Teil 236.
— — schwieriger Teil 236, 289.

Sauvage, L., 88, 159, 175, 176.
Sauvagesches Theorem 170.
Schepp 14.
Schleife 217.
Schlechthin kanonische Differentialsysteme 223, 225 ff., 268 ff.
Schlesinger, L., VII, 173, 300, 330.
Schnittsysteme 68ff., 301, 302, 304 ff.
Schwankung 8.
Semikonvergente Reihen 188ff.
Sich selbst adjungierte Differentialsysteme 34.
Simultane partielle Differentialsysteme 53, 324; vergl. totale Differentialsysteme.
Spaltung 77.
Stäckel, P., 2.
Substitution, lineare 71.
Sukzessive Approximation 37ff., 240ff., 308.
Summe von Matrizen 18.

Taylor 87.
Thomae, J., 3.
Thomé, L. W., 160, 181, 251, 267.
Totale Differentialsysteme 51ff.
Transformation 72.
Transposition einer Matrix 28.
— zweier Punkte 317.

Verschiebbare singuläre Stellen 89.
Vertauschbare Matrizen 325, 330.
Verzweigungspunkt der Lösungen 215.
Verzweigungsmannigfaltigkeit 248.
Volterra, V., VI, 26, 50.

Weber, E. v., 51.
Weierstraß, K., 53, 91, 129.
Weyr, Ed., 173.
Wilczynski, E., 312.
Wirth, J., 140.
Wronskische Determinante, Matrix, Differentialsystem 159, 302—304.

Zwischenwert 4.

## Berichtigungen.

Seite 8 Zeile 7 lies $a_{i\varkappa}$ statt $a_{ik}$,

" 8 Gl. (9) lies $\sum_{\lambda=1}^{n} | y_{\lambda}^{(0)} |$ statt $\sum_{\lambda=1}^{n} | y_{\varkappa}^{(0)} |$,

" 15 Zeile 7 v. u. ist hinter „Betrage" einzuschalten „nach",

" 15 " 6 v. u. lies $y_{\varkappa}(x)$ statt $y_k(x)$,

" 26 Fußnote **) lies 1887 statt 1889,

" 49 Gl. (VI) lies als untere Grenze $(\xi_0, \eta_0)$ statt $(\xi, \eta_0)$,

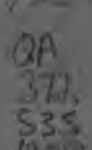
" 73 Zeile 13 lies komplett statt komplet,

" 119 " 20 lies 6) statt 5),

" 140 am Kopfe lies Achte statt Neunte,

" 215 Zeile 8 lies Differentialgleichung $n$-ter Ordnung statt Differentialsysteme $n$-ter Ordnung.





**VERLAG VON B. G. TEUBNER IN LEIPZIG UND BERLIN.**

# Encyklopädie der Elementar-Mathematik.

**Ein Handbuch für Lehrer und Studierende von**

## Dr. Heinrich Weber und Dr. Joseph Wellstein,

Professoren an der Universität Straßburg i. Els.

In drei Bänden:

**I. Elementare Algebra und Analysis.** Bearbeitet von **H. Weber.** 2. Auflage. Mit 38 Textfiguren. [XVIII u. 539 S.] gr. 8. 1906. In Leinwand geb. n. ℳ 9.60.

**II. Elemente der Geometrie.** Bearbeitet von **H. Weber, J. Wellstein** und **W. Jacobsthal.** Mit 280 Textfiguren. [XII u. 604 S.] gr. 8. 1905. In Leinwand geb. n. ℳ 12.— [2. Auflage unter der Presse.]

**III. Angewandte Elementar-Mathematik.** Bearbeitet von **H. Weber, J. Wellstein** und **R. H. Weber** (Heidelberg). Mit 358 Textfiguren. [XIII u. 666 S.] gr. 8. 1907. In Leinwand geb. n. ℳ 14.—

Das Werk verfolgt das Ziel, den künftigen Lehrer auf einen wissenschaftlichen Standpunkt zu stellen, von dem aus er imstande ist, das, was er später zu lehren hat, tiefer zu erkennen und zu erfassen und damit den Wert dieser Lehren für die allgemeine Geistesbildung zu erhöhen. — Das Ziel dieser Arbeit ist nicht in der Vergrößerung des Umfanges der Elementar-Mathematik zu ersehen oder in der Einkleidung höherer Probleme in ein elementares Gewand, sondern in einer strengen Begründung und leicht faßlichen Darlegung der Elemente. Das Werk ist nicht sowohl für den Schüler selbst als für den Lehrer und Studierenden bestimmt, die neben jenen fundamentalen Betrachtungen auch eine für den praktischen Gebrauch nützliche, wohlgeordnete Zusammenstellung der wichtigsten Algorithmen und Probleme darin finden werden.

„... Zwei Momente müssen hervorgehoben werden, die dem Buche das Gepräge verleihen. Das eine liegt darin, daß die grundlegenden Fragen der Geometrie eine eingehende Behandlung erfahren, in einem Umfange, wie er in zusammenfassenden Werken sonst nicht anzutreffen ist. ... Das zweite Moment ist in dem Umstande zu erblicken, daß die Verfasser es nicht darauf angelegt haben, eine pragmatische Vorführung des üblichen Vorrats an geometrischen Sätzen, Konstruktionen und Rechnungen zu geben, sondern daß es ihnen mehr darum zu tun war, an ausgewähltem Material die wissenschaftlichen Methoden der Geometrie zur Geltung zu bringen und überall auf die Grundfragen einzugehen. ... So darf der Inhalt des zweiten Bandes der „Encyklopädie der Elementar-Mathematik" als ein sehr reichhaltiger bezeichnet werden, der über Grenzen dessen, was an der Schule geboten werden kann, erheblich hinausführt, der aber ... und das ist noch wichtiger und offenkundig der Hauptzweck des Werkes — eine Vertiefung ... geometrischen Wissens vermittelt. Jüngere Lehrer der Mathematik werden das Buch ... und mit Nutzen zu Rate ziehen, namentlich wenn sie im Unterrichte zu prinzipiellen Fragen kommen, um sich über die leitenden Gedanken zu orientieren.

Eines verdient noch besonders hervorgehoben zu werden: das ist die reiche ... mit schönen, sehr instruktiv gezeichneten Figuren. Der schwierigen Vorstellung ... Formen sphärischer Dreiecke kommen die stereographischen Bilder der Euler'schen ... und Study'schen Dreiecke sehr zu statten." (Zeitschrift für das Realschulwesen ...)

„... Daß ein Hochschullehrer von der Bedeutung des Verfassers ... matik von höherer Warte aus behandelt und mustergültig darstellt, ist ... Lehrer, jeder Studierende muß das Werk, welches nicht nur in met... systematischer Hinsicht von Bedeutung und daher eine w... elementaren mathematischen Literatur ist, besitzen und studieren ...

(Zeitschrift für lateinlose höhere ...)

„... Die Encyklopädie will kein Schulbuch im gewöhnlichen ... aber zur Vorbereitung auf den Unterricht, namentlich in ... Mathematik dringend zu empfehlen, welche die bezügl... studiert haben, sich aber doch orientieren wollen, wie ... schaft die Begriffsbildungen, Methoden und Entwi... stalten sind." (C. Färber im Archiv der ...)

